G. Decher,

Handbuch der Mechanik.

Zweiter Band.

Handbuch

der

rationellen und technischen

Mechanik.

Von

G. Decher,

Professor der Physik und Mechanik an der k. polytechnischen Schule zu Augsburg.

Erste Abtheilung.

Rationelle Mechanik.

Augsburg.

Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.

1853.

Handbuch

der

rationellen Mechanik.

Von

G. Decher,
Professor der Physik und Mechanik an der k. polytechnischen Schule in Augsburg.

Zweiter Band.

Mechanik fester Systeme.

Mit 8 Steintafeln.

Augsburg.
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1853.

Vorwort.

Indem ich den Freunden der wissenschaftlichen Mechanik den zweiten Band meines Handbuches übergebe, welcher das zweite Buch der rationellen Mechanik umfaßt und die **Mechanik fester Systeme** behandelt, erlaube ich mir über die Behandlung dieses Stoffes nur einige kurze Andeutungen zu geben und in Betreff der besondern Anordnung und Ausführung auf die Inhalts-Anzeige und das Buch selbst zu verweisen.

Die **Mechanik fester Systeme** zerfällt ebenso wie die Mechanik des materiellen Punktes in drei Abschnitte. Der erste derselben befaßt sich wieder mit der Untersuchung der **Gesammtwirkung** der an einem festen System angreifenden Kräfte und mit der **Bestimmung des Angriffspunktes der allgemeinen Resultirenden**, wo eine solche vorhanden ist, und zwar sowohl für solche Systeme, bei denen die Kräfte und ihre Angriffspunkte einzeln gegeben vorausgesetzt werden, d. i. für **Systeme ohne stetigen Zusammenhang**, als auch für solche feste Systeme von materiellen Punkten, von denen nur die äußere geometrische Begrenzung und die Dichte gegeben ist, und von denen, für die Rechnung wenigstens, vorausgesetzt wird und vorausgesetzt werden muß, daß die einzelnen materiellen Punkte in einer stetigen Berührung, in **stetigem Zusammenhange** stehen. Diese Systeme habe ich **stetige Systeme** genannt, und auf den Unterschied hingewiesen, welcher zwischen der Vorstellung des Physikers und der des Mathematikers in Betreff der innern Beschaffenheit solcher Systeme besteht; der letztere kann sich nicht auf eine Berücksichtigung der Porosität einlassen; für ihn ist die Masse eines Körpers eine stetige Größe, wie der Raum; es gibt deßhalb für

ihn, für seine Rechnung, in demselben keine **materiellen** Punkte mehr, sondern nur noch **geometrische**, und die Annahme von sogenannten **unendlich kleinen Körpertheilchen**, welchen man je nach dem gewählten Coordinatensystem eine andere Gestalt beilegen muß, ist eine mit mathematischer Strenge unvereinbare und daher des Mathematikers unwürdige Vorstellungsweise, welche aus den mathematischen Untersuchungen verbannt werden muß, und wie ich gezeigt habe, verbannt werden kann.

Nach dieser geometrischen Vorstellung von einem Körper kann dann auch nicht mehr von einer **physischen** Dichte und von der Masse eines Punktes die Rede sein, ebensowenig als von einem Rauminhalte desselben; beachtet man aber, daß man jedes Gesetz, welches für die Aenderung der Dichte von einem Theil eines Körpers gegen den andern hin stattfindet, durch eine analytische Function ausdrücken kann, welche für jeden durch seine Coordinaten bestimmten **geometrischen** Punkt einen bestimmten Werth erhält, so wird dadurch und für die mathematische Betrachtung die Dichte eine **stetig veränderliche Größe**, wie die Coordinaten, und der Werth, welchen jene Function für einen bestimmten **geometrischen** Punkt annimmt, stellt die **geometrische Dichte** für diesen Punkt vor. So wie es ferner in einem geometrischen Punkte ein **Aenderungsgesetz des Volumens** gibt, so gibt es auch in demselben ein **Aenderungsgesetz der Masse**, und dieses wird analytisch durch die Function ausgedrückt, welche die geometrische Dichte dieses Punktes bestimmt. Auf gleiche Weise verhält es sich dann auch mit den Kräften, deren Intensitäten, wie fast immer, Functionen der Coordinaten, oder Functionen der Coordinaten und der Masse ihrer Angriffspunkte sind; es kann auch hier nicht mehr von einer eigentlichen Kraft in einem geometrischen Punkte gesprochen werden; jene Functionen geben aber für jeden solchen Punkt einen bestimmten Werth und für jeden noch so nahe liegenden einen andern; die auf einen bestimmten Punkt ausgeübte Wirkung wird wieder eine **stetig veränderliche** Größe, eine **geometrische Kraft**, und ist in Bezug auf die Aenderung der Raumbegrenzung das **Aenderungsgesetz** der Function, welche das Maaß der auf einen bestimmten **Körpertheil** ausgeübten Wirkung oder das Maaß der **physischen Kraft** ausdrückt. Durch diese Vorstellungsweise wird die Anwendung der höhern Analysis, der **Analysis der**

Stetigkeit eine bestimmte, klare und unzweifelhafte, und es werden dadurch die hypothetischen, im Kreise sich drehenden Definitionen der veränderlichen Dichte, Masse, Kraft, u. s. f. beseitigt. *)

Ich habe ferner bei der Betrachtung der Gesammtwirkung der an einem festen System thätigen Kräfte, ebenso wie bei der Untersuchung des Gleichgewichtes und der Bewegung eines solchen Systems durchaus die bereits in der Einleitung zum ersten Bande angedeutete Unterscheidung der **fördernden** und **drehenden** Wirkung einer Kraft zu Grunde gelegt, und daher nach der Erörterung einiger einfacher Fälle im ersten Kapitel, im zweiten die **Zusammensetzung und Zerlegung der drehenden Kräfte**, die Theorie der Kräftepaare von Poinsot, ausführlich abgehandelt.

Das dritte Kapitel untersucht dann insbesondere die Gesammtwirkung eines Systems **paralleler Kräfte**, wendet diese Untersuchung auf die schweren Körper an, und gibt eine ganz neue, streng mathematische Ableitung der allgemeinen analytischen Beziehungen für die **Bestimmung des Schwerpunktes** oder des **Mittelpunktes der Masse.**

Das vierte Kapitel ist der **Anwendung dieser allgemeinen Beziehungen** sowohl in Bezug auf rechtwinklige als Polar-Coordinatensysteme gewidmet, und die Behandlung dieses Gegenstandes dürfte sowohl was die Strenge der Darstellung als die Ausführlichkeit betrifft, in einem andern Werke nicht übertroffen worden sein. Ins Einzelne einzugehen, würde hier zu weit führen, ich muß deßhalb hierüber auf die Inhaltsanzeige und das Werk selbst verweisen.

Im fünften Kapitel findet man die Untersuchung über die **Gesammtwirkung eines Systems nicht paralleler Kräfte** unter der Voraussetzung, daß deren Angriffspunkte nicht in stetigem Zusammenhange stehen, und ihre Intensitäten bestimmte Werthe haben, weßhalb

im sechsten Kapitel die Aufgabe behandelt wird, die Gesammtwirkung eines Systems von Kräften zu bestimmen, **deren Angriffs-**

*) Kann es etwas unlogischeres geben als die Definition: Die **veränderliche Dichte** in einem Punkte ist die **Masse**, welche in der Volumen-Einheit enthalten **wäre, wenn** alle Punkte dieser Volumen-Einheit **dieselbe Dichte hätten?**

punkte eine stetige Folge bilden, deren Richtungen von der Lage der Angriffspunkte abhängen, und deren Intensitäten Functionen von der Lage und Masse dieser Angriffspunkte sind. Um der Vorstellung eine bestimmte Richtung zu geben, habe ich speciell die Betrachtung der **allgemeinen Massenanziehung** zu Grunde gelegt; es findet indessen diese Untersuchung auch ihre Anwendungen bei der Lehre von der Electricität und dem Magnetismus, namentlich auf die Berechnung der anziehenden Wirkung electrischer Ströme, weßhalb denn auch in der Wahl der Beispiele darauf Rücksicht genommen ist. Auch von diesem Kapitel glaube ich behaupten zu dürfen, daß es seinen Gegenstand mit einer Strenge, Ausführlichkeit und Allgemeinheit behandelt, welche demselben bisher, wenigstens in Lehr- oder Handbüchern der Mechanik, nicht zu Theil geworden ist, und es dürfte nicht blos der Freund der Mechanik manches Neue darin finden, sondern auch der Mathematiker für die Integralrechnung, namentlich was den immer noch gefürchteten Durchgang des Aenderungsgesetzes durch **Unendlich** und die Ableitung eines bestimmten Integrals durch Differenziren eines andern bestimmten Integrals in Bezug auf eine Constante betrifft, manche gute Lehre daraus ziehen. Denn gerade die Ausarbeitung dieses Kapitels führte mich durch die Irrthümer, denen ich in Betreff der Function V begegnete, auf meine neuen Ansichten von der Bedeutung der Differentiale und Integrale, welche zwar Hr. Dr. Schnuse **sinn- und begriffslos** und **reinen Unsinn** zu nennen beliebte, von denen ich aber fest überzeugt bin, daß sie in nicht langer Zeit allgemein als Grundlage für die Differential- und Integralrechnung werden angenommen werden, besonders wenn einmal diese Metaphysik in einem Lehrgebäude der **Analysis der Stetigkeit** systematisch durchgeführt ist, wie ich ein solches bereits auszuarbeiten begonnen habe und hoffe, den Freunden einer klaren und strengen Anschauung der mathematischen Wahrheiten in nicht langer Zeit vorlegen zu können.

Der zweite Abschnitt enthält die Untersuchungen über die **Bedingungen des Gleichgewichtes** eines festen Systems, demselben Stufengange folgend, wie die Untersuchungen über die Gesammtwirkung der Kräfte; es schließt mit der Betrachtung des **Princips der virtuellen Geschwindigkeiten**, welches wie im I. Buch für einen materiellen Punkt, so hier für ein festes System eine genauere

Fassung erhalten hat, und zeigt, wie die gewöhnlichen Bedingungsgleichungen aus diesem Princip allgemein abgeleitet werden können.

Der dritte Abschnitt erörtert die **Gesetze der Bewegung eines festen Systems** in vier Kapiteln, von denen das erste sich insbesondere mit der **fortschreitenden Bewegung** beschäftigt und die Gesetze derselben auf freie und gezwungene Bewegungen schwerer Körper in einem widerstehenden Mittel anwendet. Das zweite Kapitel untersucht die **drehende Bewegung um eine feste Achse**, die Eigenschaften der **Massemomente**, der **Hauptachsen**, u. s. f., welche dann im dritten Kapitel auf die Untersuchung der allgemeineren **drehenden Bewegung eines festen Systems um einen festen Punkt** angewendet werden. Inwiefern in diesen Kapiteln meine Bemühung, die darin abgehandelten, für den Anfänger meistens äußerst schwierigen Untersuchungen klar und anschaulich darzustellen, ihren Zweck erreicht hat, überlasse ich dem Urtheile derjenigen, welche dieselbe Materie schon in andern Werken studirt und sich mit derselben befreundet haben.

Im vierten Kapitel endlich werden die Gesetze der Bewegung eines festen Systems allgemein dargestellt; zuerst werden die Gleichungen der Bewegung eines **freien Systems** mit Umgehung des Princips von d'Alembert unmittelbar auf die Lehre von der Gesammtwirkung der Kräfte gegründet und daraus die beiden Hauptgesetze dieser Bewegung, nämlich die Gleichungen für die **fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse**, und die Gleichungen für die **drehende Bewegung des Systems um diesen Mittelpunkt** abgeleitet, dadurch also nachträglich die bereits in der Einleitung und im ersten Kapitel dieses Abschnitts zu Grunde gelegte Unterscheidung bestätigt. Beide Gesetze erscheinen dann innig verbunden in dem Lehrsatze von der **Aenderung der lebendigen Kraft** durch die **Arbeit** der Kräfte, welcher in mehreren Formen dargestellt ist. Aus den Gleichungen der freien Bewegung ergeben sich die der **gezwungenen Bewegung**, von welcher zwei Hauptfälle schon im zweiten und dritten Kapitel behandelt wurden, und von welcher als dritter Hauptfall hier insbesondere die Bewegung eines festen Systems **auf einer festen Fläche** sowohl **ohne** als **mit** Berücksichtigung der **Reibung** erörtert und mit Beispielen erläutert wird. Die allgemeine Untersuchung der Gesetze dieser Bewegung unter Berücksichtigung der

Reibung ist eine ganz neue, bisher gänzlich verkannte, und ich schmeichle mir, dadurch die Mechanik mit einer nicht unwesentlichen Erweiterung bereichert zu haben. Es wird in dieser Untersuchung gezeigt, daß die Reibung nicht ganz wie eine nach einer bestimmten Richtung wirkende Kraft behandelt werden dürfe, und daß deßhalb die beiden Hauptgesetze der freien Bewegung, welche auch die Grundlage für die Untersuchung der Bewegung auf einer festen Fläche bilden, wenn **keine** Reibung berücksichtigt wird, nicht mehr **allgemein** angewendet werden dürfen, wenn bei dieser Bewegung Reibung stattfindet; daß man die allgemeinen Gleichungen der freien Bewegung in Bezug auf ein beliebiges Coordinatensystem nicht mehr in solche umwandeln darf, welche sich auf den Mittelpunkt der Masse beziehen, sondern in solche umwandeln muß, welche sich auf den **Berührungspunkt** (die Berührungslinie) beziehen, so daß sie einerseits die **fortschreitende Bewegung** dieses Berührungspunktes auf der festen Fläche; und anderseits die **drehende Bewegung des Systems um diesen Punkt** ausdrücken. Als Beispiele dienen die Bewegung eines parallelepipedischen Stabes, welcher sich mit einer Kante auf eine horizontale Ebene stützt, und der je nach der Größe des Reibungscoeffizienten und der anfänglichen Neigung sehr verschiedene Bewegungen annimmt, dann die einer Kugel oder eines Cylinders auf einer geneigten Ebene, für welche man die durch die Erfahrung gegebenen Gesetze nur durch künstliche Wendungen und falsche Schlüsse ableiten konnte.

Mögen meine Bemühungen die gewünschten Früchte tragen, und mein Streben bei den Freunden der Wissenschaft jene Anerkennung finden, welche zu fernerem Streben ermuthigt und die nächst dem eigenen freudigen Bewußtsein den höchsten Lohn für anstrengende Arbeiten gewährt.

Augsburg im Januar 1853.

G. Decher.

Inhalt
des zweiten Bandes.

Zweites Buch.
Mechanik fester Systeme.

Erster Abschnitt.
Gesammtwirkung der an einem festen System angreifenden Kräfte.

Erstes Kapitel.
Vorläufige Betrachtung über die Wirkung der Kräfte in besondern Fällen.

Zweites Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung der drehenden Kräfte oder Momente.

Drittes Kapitel.

Gesammtwirkung paralleler Kräfte. Schwerpunkt.

Viertes Kapitel.

Analytische Bestimmung des Schwerpunktes. Anwendung desselben zur Berechnung des Flächen- und Raum-Inhaltes.

I. Schwerpunkt homogener Linien.

II. Schwerpunkt homogener Flächen.

III. Schwerpunkt homogener körperlicher Räume.

IV. Berechnung von Flächen und körperlichen Räumen mittels des Schwerpunktes.

Sechstes Kapitel.

Gegenseitige Anziehung der Körper.

I. Systeme ohne stetigen Zusammenhang.

II. Wirkung eines stetig zusammenhängenden Systems auf einen materiellen Punkt.

III. Anziehende Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen materiellen Punkt.

IV. Gegenseitige Wirkung zweier stetigen Systeme.

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht eines festen Systems.

I. Gleichgewicht eines Systems paralleler Kräfte.

II. Gleichgewicht eines festen Systems, wenn die Kräfte und ihre Angriffspunkte alle in derselben Ebene liegen.

III. Gleichgewicht eines festen Systems mit beliebigen Kräften.

IV. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein festes System.

Dritter Abschnitt.

Bewegung eines festen Systems.

Erstes Kapitel.

Fortschreitende Bewegung.

Zweites Kapitel.

Bewegung eines festen Systems um eine feste Achse.

Drittes Kapitel.

Bewegung eines festen Systems um einen festen Punkt.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Bewegung eines festen Systems.

I. Bewegung eines freien Systems.

II. Gezwungene Bewegung eines festen Systems.

Berichtigungen.

Erster Band.

Seite	Zeile	von	Fehler	Berichtigung
28	8	oben	$b'y$	$b'z$
„	„	„	$z = bx + y$	$z = bx + g$
41	6—8	„	sind die Gleichungen rechts durch folgende zu ersetzen	$ab + a'b' + a''b'' = 0$ $ac + a'c' + a''c'' = 0$ $bc + b'c' + b''c'' = 0$
71	12	unten	$\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dx}{dy}$	$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$
72	1	oben	xz	xy
77	5	unten	$V_{,} \cos\mu = F'_x(x, y, z)$	$V_{,} \cos\mu = F'_y(x, y, z)$
142	7	„	S	P
145	1	oben	$P_1 = 25{,}30$, $P_2 = 32{,}63$	$P_1 = 25{,}38$, $P_2 = 32{,}73$
161	1	„	$\sqrt{\ldots\ldots} = V$	$\frac{1}{\sqrt{\ldots\ldots}} = V$
181	18	„	fQ	$fQ \cos\alpha$
„	8	unten	P_2	P_1
235	1	„	$f'(t)$	$mf'(t)$
276	11	„	(97)	(67)
334	1	„	(68)	(86)
349	7	oben	$\alpha - Cz_0$	$\beta - Cz_0$
392	15 u. 16	„	sind die Worte: „daher — also" zu streichen	
400	5	unten	$R\varphi^2$	$R_0 \varphi^2$
404	10	„	r	v
510	2	„	$= r_0$	$r = r_0$
516	12	„	U_ξ	U_ξ^2
„	10	„	s	r
521	3	oben	$\varphi = t \int d\omega .$	$\varphi t = \int d\omega .$
527	14	„	$\nu = \frac{1}{2}\pi + \alpha$	$\nu = \frac{1}{2}\pi + \beta$

Zweiter Band.

Seite	Zeile	von	Fehler	Berichtigung
59	11	unten	$LY \int_{s_0}^{S} ds \,.\, y$	$LY = \int_{s_0}^{S} ds \,.\, y$
61	4	„	$f. \frac{1}{4}\alpha \,.\, cos \frac{1}{4}\alpha$	$f\left(\frac{1}{4}\alpha\right) cos \frac{1}{4}\alpha$
„	3	„	$f. \frac{1}{8}\alpha \,.\, cos \frac{1}{8}\alpha$	$f\left(\frac{1}{8}\alpha\right) cos \frac{1}{8}\alpha$
84	7	oben	EBJH	EBFH
85	4	„	ist zu lesen: „durch eine Diagonale AD in zwei Dreiecke ABD und ACD"	
112	14	unten	OCEe	QCEe
147	sind alle		X in	Z zu ändern
189	8	oben	und die Richtung	und von der Richtung
197	9	„	$\widehat{R'z} = 49^\circ\, 1',3$	$\widehat{R'z} = 119^\circ\, 1',3$
198	16	„	AMP' und AMP''	AM'P' und AM''P''
232	fehlt in den Gleichungen 78ᵃ und 78ᵇ der Factor q vor den Ausdrücken der innersten Integrale			
233	10	oben lies:	„Nehmen wir diese Gerade als Achse der x, einen ihrer Endpunkte als Anfangspunkt der Coordinaten an, so hat man	
235	„	„	—2BC	—2BM
322	13	„	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
324	16	unten	Nb	N'b
327	5	„	Mittelpunkt	Stützpunkt
337	1	„	OB	CB
396	3	„	fehlt nach „von" der Buchstabe p	
399	14	oben	$\frac{1}{f(\alpha) - etc.}$	$\frac{1 - p\, cot\, \alpha'}{f(\alpha) - etc.}$
432	12 u. 14	unten	OC und OD	MC und MD

Zweites Buch.

Mechanik fester Systeme.

Erster Abschnitt.

Gesammtwirkung der an einem festen System angreifenden Kräfte.

Erstes Kapitel.

Vorläufige Betrachtung über die Wirkung der Kräfte in besondern Fällen.

§. 1.

Unter einem festen System verstehen wir eine Verbindung von materiellen Punkten in der Art, daß diese eine unveränderliche Lage gegen einander behalten, welche Kräfte auch an denselben wirken, und in welchem Zustande, ob des Gleichgewichtes oder der Bewegung sich dieselben befinden mögen. Die tägliche Erfahrung lehrt zwar, daß ein solches System in der Wirklichkeit nicht vorhanden ist, daß vielmehr alle sogenannten festen Körper oder Verbindungen von festen Körpern ihre Gestalten und gegenseitige Lage etwas ändern, selbst wenn sie nur der Wirkung von Kräften unterworfen werden, die bei weitem kleiner sind, als diejenigen, welche ihre Cohäsionskraft zu überwinden und eine gänzliche Umgestaltung derselben hervorzubringen vermögen. Wenn wir aber von diesen zuletzt genannten Kräften Umgang nehmen, so zeigen sich jene Veränderungen in der gegenseitigen Lage der Körpertheile theils so klein, daß wir sie meistens gänzlich unbeachtet lassen können, theils bleiben sie für dieselben Kräfte gewissen Grenzen unterworfen und während der fortdauernden Wirkung dieser Kräfte unveränderlich, so daß wir die meisten festen Körper in der Gestalt, die sie nach dem Angriff der Kräfte angenommen haben, als feste Systeme betrachten dürfen.

Aus der vorhergehenden Erklärung von einem festen System bilden wir uns die weitere Vorstellung, daß, weil innerhalb eines solchen Systems keine Bewegung stattfinden kann, die Wirkung einer jeden Kraft, welche an irgend einem Punkte desselben angreift, unverändert auf das ganze System übergeht, und sich dadurch eine Gesammtwirkung aller an demselben thätigen Kräfte erzeugt, welche wir als die zunächstliegende Ursache der Bewegung des Systems oder seines örtlichen Zustandes überhaupt betrachten, und mittels welcher wir auch am sichersten auf die Gesetze der Bewegung oder die Bedingungen des Gleichgewichtes eines solchen Systems schließen werden.

Zunächst folgern wir aus unserer Erklärung von einem festen System von materiellen Punkten insbesondere, daß jeder Punkt desselben, welcher in der Richtung einer an einem andern Punkte angreifenden Kraft liegt, ohne Unterschied und ohne die geringste Aenderung in der Wirkung dieser Kraft als deren Angriffspunkt genommen werden kann, daß man also eine Kraft an jedem in ihrer Richtung liegenden Punkte des Systems angreifen lassen oder, wie man sich auch ausdrückt, in jeden dieser Punkte versetzen kann. — Denn greift an dem Punkte A, Fig. 1, eine Kraft P in der Richtung AP an, und ist der Punkt B, welcher in der Verlängerung dieser Richtung liegt, mit A auf eine unveränderliche Weise verbunden, so kann man an dem Punkte B längs derselben Richtung, aber in entgegengesetztem Sinne zu einander zwei der Kraft P gleiche Kräfte P′ und P″ angreifen lassen, ohne dadurch die geringste Veränderung in dem Zustande des Systems, welchem die Punkte A und B angehören, hervorzubringen, da die beiden neuen Kräfte ihre Wirkungen gegenseitig vollständig aufheben. Vermöge der festen, unveränderlichen Verbindung zwischen jenen Punkten werden sich aber auch die Kräfte P und P″ gegenseitig unwirksam machen, da ihr Bestreben dahingeht, diese Verbindung zu trennen oder überhaupt die Entfernung ihrer Angriffspunkte zu ändern, was als unmöglich vorausgesetzt wurde. Man kann demnach auch, ohne im Zustande des Systems eine Aenderung hervorzubringen, die Kräfte P und P″ entfernen, und es wird dann nur die Kraft P′ übrig sein, welche in derselben Richtung und in demselben Sinne wie die Kraft P thätig und dieser an Intensität gleich ist, aber an dem Punkte B angreift, oder es wird ohne Aenderung der Wirkung die Kraft P von A nach B versetzt sein.

§. 2.

Der vorhergehende Satz kann in vielen besonderen, einfachen Fällen mit Vortheil angewendet werden, um die Gesammtwirkung mehrerer

Kräfte kennen zu lernen. Man wird mittels desselben leicht die Resultirende von einer beliebigen Anzahl von Kräften finden, deren Angriffspunkte in derselben Geraden liegen, welche zugleich die gemeinschaftliche Richtung aller dieser Kräfte vorstellt; denn man darf sich nur alle diese Kräfte von ihren ursprünglichen Angriffspunkten hinweg in einen beliebigen Punkt ihrer gemeinschaftlichen Richtung versetzt denken, so wird der in §. 3. des I. Buches betrachtete Fall eintreten, nach welchem sich ergibt, daß die Resultirende der Summe aller dieser Kräfte gleich und in derselben Richtung thätig ist, wie diese, wenn sie alle in demselben Sinne wirken, und daß sie, wenn dies nicht der Fall ist, dem Unterschiede zwischen der Summe der in dem einen Sinne wirkenden und der Summe der im entgegengesetzten Sinne angreifenden Kräfte gleich kommt, und im Sinne der größeren Summe thätig ist. Der Angriffspunkt dieser Resultirenden dagegen bleibt nach dem vorhergehenden §. ganz unbestimmt, und kann innerhalb des Systems in ihrer Richtung beliebig angenommen werden.

Die Versetzung der Kräfte längs ihrer Richtung kann ferner dazu dienen, die Resultirende von Kräften zu bestimmen, welche nicht in derselben Richtung thätig sind, deren Richtungen sich aber durchschneiden. Seien z. B. die beiden Kräfte P und Q gegeben, die an den Punkten A und B, Fig. 2, angreifen, und deren Richtungen sich bei hinreichender Verlängerung in einem dritten Punkte C schneiden. Wird dieser letztere mit den ersten in eine feste Verbindung gebracht, so kann man die beiden Kräfte P und Q in ihren Richtungen von A und B nach C versetzen, und da sie nun in demselben Punkte angreifen, nach dem für die fördernden Kräfte gegebenen Verfahren (I. B. §. 6.) ihre Mittelkraft R der Größe und Richtung nach bestimmen; der Angriffspunkt derselben kann dann ebensowohl in dem Punkte C, wie in jedem andern D in ihrer Richtung angenommen werden. Gewöhnlich nimmt man den Punkt D, wo diese Richtung die Verbindungslinie AB schneidet, als Angriffspunkt, und die Lage desselben bestimmt sich leicht nach der Proportion:

$$P : Q = \sin(\alpha - \vartheta) : \sin\vartheta$$
$$= \sin DCB : \sin DCA ,$$

oder wenn man die Gerade CD mit h bezeichnet:

$$P : Q = h \sin DCB : h \sin DCA$$
$$= Dq : Dp ,$$

woraus man schließt, daß sich die von dem Punkte D auf die Richtungen

der Kräfte P und Q gefällten Senkrechten umgekehrt wie diese Kräfte verhalten müssen.

Dieser einfache Fall zeigt, daß im Allgemeinen die Resultirende von beliebig vielen Kräften, deren Richtungen sich in demselben Punkte schneiden, ganz ebenso gefunden wird, als wenn für alle diese Kräfte der gemeinschaftliche Punkt ihrer Richtungen auch der gemeinschaftliche Angriffspunkt wäre.

Dasselbe Verfahren kann selbst mit einiger Abänderung bei parallelen Kräften angewendet werden. Hat man z. B. wieder zwei solche Kräfte, und sind beide in demselben Sinne gerichtet, wie die Kräfte P und Q, Fig. 3, so läßt man in ihren Angriffspunkten A und B zwei neue, gleiche, aber sonst beliebige Kräfte S längs der Richtung AB in entgegengesetztem Sinne zu einander angreifen, wodurch in dem Verhalten des Systems keine Aenderung hervorgebracht wird. Die Kräfte P und S können dann durch ihre Mittelkraft T, die Q und S durch ihre Resultirende T' vertreten werden; die Richtungen dieser Kräfte T und T' schneiden sich nun in einem Punkte C, wo deren Mittelkraft R, welche auch die der Kräfte P und Q ist, entweder durch das Parallelogramm oder durch Zerlegen gefunden werden kann. Wählt man das Letztere, zerlegt man nämlich jede der nach C versetzten Kräfte T und T' parallel zu den Richtungen der Kräfte P, Q und S, so erhält man diese Kräfte selbst wieder; die beiden S heben sich gegenseitig auf, die P und Q fallen in dieselbe Gerade und geben eine Mittelkraft

$$R = P + Q .$$

Die Richtung dieser Resultirenden schneidet die Gerade AB in einem Punkte D, der wieder gewöhnlich als Angriffspunkt genommen wird, und dessen Lage sich durch folgende Betrachtung bestimmen läßt. Die Dreiecke CDA und APT, so wie CDB und BQT' sind offenbar ähnlich, da sie ihre Seiten beziehungweise parallel haben; man hat also:

$$CD : AD = P : S$$

oder die Gleichung:

$$CD \times S = AD \times P ;$$

auf der andern Seite ist ebenso

$$CD : BD = Q : S ,$$
$$CD \times S = BD \times Q ,$$

und daraus schließt man auf die Gleichung:

$$AD \times P = BD \times Q$$

oder die Proportion:

$$P : Q = BD : AD .$$

Aus dieser Proportion leitet man ferner ab:

$$P : P + Q = P : R = BD : BD + AD = BD : AB ,$$

und damit erhält man die fortlaufende Proportion:

$$P : Q : R = BD : AD : AB ,$$

wornach jede der drei Kräfte P, Q und R durch den Abstand der Angriffspunkte der beiden andern vorgestellt werden kann. — Für den Fall, wo $Q = P$ ist, Fig. 4, wird

$$R = 2P \quad , \qquad AD = \frac{1}{2} AB .$$

Die Construction bleibt dieselbe, wenn die beiden parallelen Kräfte in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind, welcher Fall in Fig. 5 vorgestellt ist; es fällt dann aber der Punkt D, wo die Richtung der Resultirenden die Gerade AB schneidet, nicht mehr zwischen die Punkte A und B, sondern in die Verlängerung von AB und zwar auf die Seite der größern Kraft, und man hat, wenn Q diese größere ist,

$$R = Q - P .$$

Ferner hat man ganz wie im vorigen Falle

$$P : Q \quad = BD : AD ,$$
$$P : Q - P = BD : AD - BD ,$$
$$P : Q : R \quad = BD : AD : AB .$$

Nimmt man aber hier $Q = P$, so wird $R = 0$, und da man allgemein auch

$$P : Q = AD - AB : AD$$

hat, so folgt für diesen Fall

$$AD - AB = AD \quad \text{oder} \quad AB = 0 ;$$

es ist also nur dann eine Resultirende und zwar mit dem Werthe: Null möglich, wenn die Entfernung der beiden Angriffspunkte A und B Null ist, oder wenn die Richtungen der beiden Kräfte in derselben Geraden liegen; in jedem andern Falle ist die Bedingung: $AD - AB = AD$, also auch eine Resultirende unmöglich. Dieses sonderbar scheinende Ergebniß wird durch Anschauung der Fig. 6 einleuchtend werden;

denn will man hier unsere obige Construction ausführen und mit den gleichen Kräften P und P′ die ebenfalls gleichen Kräfte S und S′ verbinden, so erhält man die beiden Mittelkräfte T und T′, die noch parallel, gleich und entgegengesetzt sind, deren Richtungen sich ebensowenig schneiden, als die der Kräfte P und P′. Es gibt demnach keinen Punkt, in dem die Resultirende angreifen sollte, es ist folglich auch keine Resultirende denkbar. — Dieser Fall, der viel allgemeiner ist, als es auf den ersten Blick scheint, wird im nächsten Kapitel Gegenstand einer ausführlichen Erörterung sein.

Bemerken wir noch, daß sich aus den obigen Proportionen eine einfache Construction zur Bestimmung des Punktes D ergibt, in welchem die Richtung der Resultirenden zweier parallelen Kräfte P und Q, Fig. 7 und 8, die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte schneidet. Ueberträgt man nämlich die Länge BQ auf die Richtung der Kraft P von A nach Q′ und die Länge AP auf die rückwärts verlängerte Richtung der Kraft Q von B nach P′, so wird die Gerade P′Q′ oder ihre Verlängerung die AB im Punkte D schneiden. Ist aber $P = Q$ und dieser dem Sinne nach entgegengesetzt, so bleibt die PQ′, Fig. 9, der Geraden AB parallel; es gibt also keinen Durchschnittspunkt.

Hat man nun auf solche Weise die Resultirende von zwei parallelen Kräften gefunden, so wird man dieselbe mit einer dritten parallelen Kraft zu einer zweiten Resultirenden zusammensetzen, diese mit einer vierten Kraft verbinden und so fortfahrend die Mittelkraft von einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte bestimmen können.

§. 3.

Die eben gegebene Andeutung wird es übrigens hinreichend einleuchtend machen, daß das vorhergehende Verfahren ebensowenig für die Rechnung geeignet ist, wie das in §. 7 im I. Buche für die fördernden Kräfte auseinandergesetzte, und sowie dort durch Anwendung eines Coordinatensystems ein ganz allgemeines und einfaches Verfahren für die Berechnung der Resultirenden erhalten wurde, so wird uns dasselbe Mittel auch hier zum Ziele führen und uns sowohl für die Berechnung der Gesammtwirkung eines Systems von parallelen Kräften, wie für die eines Systems von beliebig gerichteten Kräften den allgemeinsten und einfachsten Weg zeigen.

Bevor wir jedoch zu diesen Untersuchungen übergehen, wollen wir uns noch mit einer zweiten Klasse von Kräften mit **einfacher Wirkung** bekannt machen. In der Mechanik des materiellen Punktes haben

wir es nämlich blos mit fördernden Kräften zu thun gehabt, d. h. mit solchen, welche nur eine fortschreitende Bewegung hervorbringen, also nur eine einfache Wirkung äußern. Die Kräfte dagegen, welche an einem festen System angreifen und dasselbe in Bewegung setzen, bringen im Allgemeinen je nach der Lage ihrer Angriffspunkte eine zusammengesetzte Wirkung hervor; wenigstens kann man sich ihre Wirkung, wie bereits in der Einleitung (§. 15) erörtert wurde, aus zwei einfachen Wirkungen, der fördernden und drehenden, zusammengesetzt denken und jede dieser letztern für sich bestehend, die eine als fördernde, die andere als drehende Kraft ansehen. Es wird dann nur darauf ankommen, den Einfluß zu bestimmen, den irgend eine an dem System angreifende Kraft sowohl auf die fortschreitende als auf die drehende Bewegung desselben haben wird, oder mit andern Worten, es wird dann nur darauf ankommen, eine gegebene Kraft in eine fördernde und in eine drehende zu zerlegen, um das System der gegebenen Kräfte mit zusammengesetzter Wirkung auf zwei Systeme von Kräften mit einfacher Wirkung, nämlich auf ein System fördernder und ein System drehender Kräfte zurückführen zu können, und man ist darnach zunächst darauf hingewiesen, die Gesammtwirkung eines jeden dieser beiden einfachen Systeme zu ermitteln.

Für ein System fördernder Kräfte ist bereits im ersten Buche das Nöthige vorgetragen worden; ich werde daher im folgenden Kapitel die Beschaffenheit der drehenden Kräfte oder Momente kennen lehren und zeigen, wie die Gesammtwirkung eines Systems solcher Kräfte gefunden werden kann.

Zweites Kapitel.

Zusammensetzung und Zerlegung der drehenden Kräfte oder Momente.

§. 4.

Da alle Kräfte, welche an demselben materiellen Punkte angreifen, oder deren Richtungen sich in diesem Punkte schneiden, in Bezug auf diesen nur als fördernde Kräfte betrachtet werden können, so kann es nur an einem festen System von materiellen Punkten drehende Kräfte geben, und das einfachste System dieser Art wird dasjenige sein, welches aus zwei solchen Punkten besteht.

Sei demnach der Angriffspunkt M, Fig. 10, einer Kraft P durch eine feste unbiegsame Gerade mit einem zweiten materiellen Punkte N verbunden, und die Richtung dieser Kraft senkrecht zu der Geraden MN. Die Wirkung, welche diese Kraft auf die beiden Punkte M und N ausübt, mag nicht so geradezu auf den ersten Blick zu erkennen sein; doch wird es sogleich einleuchten, daß diese Wirkung nicht für beide Punkte dieselbe sein kann, daß also die Gerade MN sich nicht parallel zu ihrer jetzigen Lage fortbewegen, sondern gegen eine feste Gerade allmählig eine andere Lage einnehmen oder sich drehen wird. Stellen wir uns dann vor, daß der Mittelpunkt C der Geraden MN in dem Augenblicke, wo wir sie betrachten, einem festen Punkte C begegnet sei, so ist ferner einleuchtend, daß die Kraft P fortwährend dahin wirken wird, ihren Angriffspunkt M längs ihrer Richtung weiter zu bewegen, also die Gerade MN um den festen Punkt C zu drehen; bei dieser Drehung muß aber dem Punkte N eine Bewegung ertheilt werden, welche der des Punktes M gleich und entgegengesetzt ist, und diese Wirkung kann offenbar nur dadurch hervorgebracht werden, daß sich die unbiegsame Gerade MN an den festen Punkt C anlehnt und auf ihn in Folge jenes Bestrebens der Kraft P einen gewissen Druck ausübt, welcher andeutet, daß die Kraft P dem Mittelpunkt C jener Geraden zugleich eine fortschreitende Bewegung ertheilen will, und wir schließen daraus, daß eine einzige Kraft nicht für sich allein eine blos drehende Bewegung erzeugen kann. Läßt man aber eine der Kraft P gleiche Kraft P′ in entgegengesetzter Richtung im Punkte N, Fig. 11, angreifen, so wird diese dem

Mittelpunkte C eine gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete, fortschreitende Bewegung mittheilen wollen, dieser Punkt also sich nach keiner Seite hin weiter bewegen können. Man sieht daraus, daß nun beide Kräfte als fördernde unwirksam geworden sind, daß sie aber auf ihre Angriffspunkte M und N, ohne daß ein fester Punkt vorhanden ist, noch dieselbe Wirkung hervorbringen, wie sie die Kraft P allein mittels des festen Punktes C ausübte; denn diese Wirkung wird nun allein noch darin bestehen, die Gerade MN gegen die feste Gerade AB in eine andere Lage zu bringen, sie zu drehen, oder vielmehr, sie drehen zu wollen, da es sich hier nicht darum handeln kann, welche Bewegung die Kräfte wirklich erzeugen, d. h. was sie für eine Wirkung in einer bestimmten Zeit hervorbringen, während welcher sich die gegenseitigen Verhältnisse bezüglich ihrer Intensitäten und Richtungen ändern können, sondern nur darum, welches die in einem bestimmten Augenblicke, wo die Verhältnisse gerade die gegebenen sind, erstrebte Wirkung ist. Diese beiden gleichen, parallelen und in entgegengesetztem Sinne angreifenden Kräfte P und P′ stellen folglich zusammen die drehende Wirkung oder das Moment der Kraft P in Bezug auf den mit ihrem Angriffspunkte M fest verbundenen materiellen Punkt N in dem Augenblicke vor, in welchem sie in Betrachtung gezogen werden; sie sollen deßhalb zusammen eine drehende Kraft oder ein Moment genannt und vorläufig durch P . MN bezeichnet werden.

§. 5.

Ein solches Moment haben wir schon in §. 2 betrachtet und dort gesehen, daß die Wirkung der beiden Kräfte, welche dasselbe zusammen bilden, nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden kann, wie dies auch aus dem Vorhergehenden hervorgegangen ist, daß es aber beliebig viele andere Paare von gleichen, parallelen und entgegengesetzten Kräften gibt, welche ganz dieselbe Wirkung hervorbringen. Verbindet man z. B., wie in Fig. 12, die gleichen und entgegengesetzten Kräfte S mit den Kräften P, so entsteht das Moment P′. MN, welches dieselbe drehende Kraft besitzt, wie P . MN, weil die Kräfte S keine Aenderung in dieser Wirkung verursachen können. Ebenso kann man mittelst der Kräfte S′ das Moment P″. MN bilden, welches noch dem P . MN gleich ist, u. s. f. Aus dieser Construction geht aber auch hervor, daß wenn die Kräfte des Momentes nicht senkrecht zu der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte gerichtet sind, jede nach dieser Geraden und senkrecht zu derselben zerlegt werden kann, und daß nur diese senkrechten Seitenkräfte für die

drehende Wirkung thätig sind. Fallen z. B. die Richtungen der Kräfte mit der Geraden MN zusammen, so sind die Seitenkräfte, also auch das Moment selbst Null, wie dieses von selbst einleuchtet.

Statt dieser Zerlegung der Kräfte, welche in einer schiefen Richtung zu der Geraden MN angreifen, kann man auch eine Aenderung in den Angriffspunkten selbst vornehmen, so daß die neue Verbindungslinie derselben senkrecht zur Richtung der Kräfte wird, ohne daß in der Wirkung der Kräfte eine Aenderung eintritt. Verlängert man nämlich, Fig. 13, die Richtung der Kraft P′, welche in N angreift, fällt von M eine Senkrechte MO darauf und versetzt die Kraft P′ von N nach O, wodurch in ihrer Wirkung nichts geändert wird, so erhält man das Moment P′.MO, welches noch den Momenten P.MN und P′.MN gleich ist. Wir werden deßhalb im Folgenden die Kräfte, welche ein Moment bilden, immer schon senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte gerichtet annehmen. Ferner ist leicht zu sehen, daß die Dreiecke MON und PMP′ ähnlich sind, daß man folglich die Proportion hat:

$$MN : MO = MP' : MP = P' : P$$

woraus folgt:

$$P \times MN = P' \times MO.$$

Wenn demnach zwei Momente gleich sind, so hat bei jedem von beiden das Product aus einer der Kräfte in den Abstand (senkrechte Entfernung) ihrer Richtungen, den man auch den **Hebelarm** des Momentes nennt, denselben Werth. Bezeichnen wir also den Abstand MN der Kräfte P mit p, den Abstand MO der Kräfte P′ mit p′, und die drehenden Wirkungen der Momente P.MN und P′.MO mit M und M′, so haben wir zugleich $M = M'$ und $Pp = P'p'$.

Es folgt daraus natürlich nicht, daß die Momente immer gleich sein müssen, wenn die Producte Pp und P′p′ gleiche Werthe haben; es kann jedoch mit großer Wahrscheinlichkeit daraus geschlossen werden, daß die Wirkung einer drehenden Kraft eine Function jenes Productes sein wird.

§. 6.

Untersuchen wir nun, um den vorhergehenden Schluß strenge nachzuweisen, von welchen Größen die Intensität der drehenden Wirkung eines Momentes abhängt, und beachten wir zunächst, daß es, wie für eine fördernde Kraft, deren Richtung bestimmt ist, so auch für ein Moment nur einen zweifachen Sinn seiner drehenden Wirkung geben

kann, die wir am leichtesten durch Vergleichung mit dem Zeiger einer Uhr unterscheiden, je nachdem das Moment eine Drehung in demselben Sinne hervorbringen will, wie der Zeiger einer Uhr sich bewegt (von der Linken nach Oben zur Rechten), oder eine entgegengesetzte Bewegung zu bewirken strebt. Wir werden uns demnach auch von der Gleichheit oder Ungleichheit zweier drehenden Kräfte auf ähnliche Weise überzeugen, wie es bei den fördernden Kräften geschehen ist, nämlich dadurch, daß wir zwei Momente in entgegengesetztem Sinne an derselben Geraden drehen lassen; diese Momente werden gleich sein, wenn sie ihre Wirkung gegenseitig aufheben, wenn also keine Drehung stattfindet, und wenn diese eintritt, wird diejenige offenbar die größere drehende Kraft sein, in deren Sinne die Drehung erfolgen will. So sind die beiden Momente P.MN und P'.MN, Fig. 14, welche aus gleichen Kräften P und P' und mit demselben Hebelarm MN gebildet sind, offenbar einander gleich, da jede einzelne Kraft des ersten Momentes die Wirkung der ihr gegenüberstehenden Kraft des zweiten vernichtet.

§. 7.

Die Wirkung eines Momentes ist durchaus unabhängig von seiner Lage, und man kann ein Moment in seiner Ebene, d. h. in der Ebene, welche durch die beiden Angriffspunkte und durch die Richtungen der Kräfte geht, an irgend einen andern Ort versetzen und dasselbe in irgend eine Lage bringen, ohne daß seine Wirkung auf die frühern Angriffspunkte oder überhaupt auf alle, die mit den neuen in einer festen Verbindung stehen, geändert wird.

Um diesen Satz zu beweisen, sei P.MN, Fig. 15, das gegebene Moment; auf einer zu MN parallelen, übrigens beliebigen Geraden seien zwei Punkte H und K so angenommen, daß HK = MN ist, und diese vier Punkte seien auf irgend eine Weise fest mit einander verbunden. In jedem der beiden Punkte H und K lasse man zwei der P gleiche und parallele, einander entgegengesetzte Kräfte P' und P'' angreifen, oder man lasse an der Geraden HK die beiden gleichen Momente P'.HK und P''.HK, von denen jedes auch dem gegebenen Momente P.MN gleich ist, in entgegengesetztem Sinne drehen; es wird in beiden Fällen die Wirkung des gegebenen Momentes P.MN durchaus ungeändert bleiben. Man kann nun aber auch nach §. 2 die Kräfte P und P'' an den Punkten N und H zu einer einzigen Kraft P + P'' vereinigen, welche parallel zu ihnen gerichtet ist und in der Mitte L von HN angreift;

ebenso können die beiden in entgegengesetztem Sinne zu den vorigen wirkenden Kräfte P und P″ an den Punkten M und K zu einer Mittelkraft P + P″ zusammengesetzt werden, welche in der Mitte von MK, also ebenfalls in L angreift und, da sie in derselben Richtung und in entgegengesetztem Sinne wirkt, die Wirkung der gegenüberstehenden gleichen Kraft P + P″ aufhebt. Es bleibt demnach nur noch das Moment P′. HK übrig, oder es ist dadurch das Moment P.MN parallel mit sich selbst unbeschadet seiner Wirkung nach HK versetzt worden.

Ferner sei P. MN, Fig. 16, wieder das gegebene Moment und O ein beliebiger Punkt des mit dem Halbmesser MN von M aus beschriebenen Kreises, so daß immer MO = MN ist, und dieser Punkt O sei mit M und N auf unveränderliche Weise verbunden. Man lasse wieder an der Geraden MO zwei dem gegebenen Momente P. MN gleiche und in entgegengesetztem Sinne drehenden Momente P′. MO und P″. MO angreifen, wodurch die Wirkung des ersten unverändert bleibt. Werden dann die Kräfte P und P″ an dem Punkte M zu einer Resultirenden R zusammengesetzt, so halbirt diese den Winkel PMP″; die Richtungen der Kräfte P und P″ an den Punkten N und O werden sich bei gehöriger Verlängerung in einem Punkte L schneiden, die Verbindungslinie ML wird den Winkel NLO ebenso wie den Winkel OMN halbiren, und die Kräfte P und P″ können von N und O nach L versetzt und dort zu einer Mittelkraft vereinigt werden. Diese letztere Mittelkraft wird offenbar der ersten R gleich sein und ebenso den Winkel NLO halbiren, also wie diese, welcher sie dem Sinne nach entgegengesetzt ist, längs der Geraden ML oder ihrer Verlängerung thätig sein und deßhalb die Wirkung derselben vollständig aufheben. Es ist dann nur noch das Moment P′. MO übrig, das so angesehen werden kann, als sei das Moment P. MN um den Punkt M gedreht worden.

Durch die Vereinigung der eben als erlaubt nachgewiesenen Versetzung und Drehung eines Momentes kann demselben aber jede beliebige Lage in seiner Ebene ertheilt werden, ohne daß etwas in seiner Wirkung geändert wird, wie es oben ausgesprochen wurde, und wir schließen daraus zunächst, daß es ganz gleichgültig ist, welchen Punkt in der Geraden MN oder selbst in der Ebene des Momentes man als Mittelpunkt der beabsichtigten Drehung annimmt, daß dieses also nicht gerade der Mittelpunkt jener Geraden sein muß. Um jedoch in dieser Beziehung der Vorstellung einen bestimmten Anhalt zu geben, wollen wir uns künftig einen der beiden Angriffspunkte M oder N selbst als Mittel-

punkt der von einem Momente beabsichtigten Drehung denken, da dieses für die Anwendung, die wir von den Momenten machen werden, die zweckmäßigste Vorstellung ist.

§. 8.

Die Wirkung eines Momentes ist nach dem Vorhergehenden von seiner Lage in seiner Ebene unabhängig; es sind demnach nur noch die Kräfte und der Hebelarm, der Abstand ihrer Richtungen, als diejenigen Größen übrig, durch welche jene Wirkung bedingt ist, durch deren Veränderung eine Vermehrung oder Verminderung derselben entstehen kann. Daß die Intensität eines Momentes mit der Intensität seiner Kräfte zunimmt, wenn der Hebelarm ungeändert bleibt, bedarf kaum eines Beweises; man überzeugt sich beim Anblick der Fig. 17, wo an derselben Geraden MN die beiden Momente P.MN und P′.MN in entgegengesetztem Sinne wirken, daß hier, wo die Kräfte des zweiten Momentes größer sind, als die des ersten, keine Gleichheit stattfinden kann, daß vielmehr durch Zusammensetzung der in M und N entgegengesetzt angreifenden Kräfte P und P′ ein neues Moment (P′—P).MN entsteht, welches im Sinne des aus den größern Kräften P′ gebildeten Momentes P′.MN wirkt und ausdrückt, um wie viel die Wirkung dieses letztern größer ist, als die des Momentes P.MN.

Sind dagegen bei zwei Momenten die Kräfte gleich und ihre Hebelarme verschieden, so versetze man sie so in denselben Punkt M, Fig. 18, daß ihre Hebelarme in dieselbe Gerade MO fallen und sie in entgegengesetztem Sinne zu drehen streben. Die Kräfte P und P′ am Punkte M heben ihre Wirkungen als gleich und entgegengesetzt auf, und es bleibt noch das Moment P.ON übrig, welches im Sinne des Momentes P.MO wirkt und zeigt, daß dieses Moment, welches den größern Hebelarm hat, auch die größere Wirkung besitzt.

§. 9.

Aus diesen Betrachtungen schließen wir denn, daß das Maaß der drehenden Wirkung eines Momentes eine Function von der Intensität der Kräfte und von seinem Hebelarm sein muß, daß man also mit der früheren Bezeichnung dieser Größen

$$M = f(P, p)$$

hat.

Um die Form dieser Function zu bestimmen, vergleichen wir zuerst zwei Momente von gleichen Kräften P, aber mit verschiedenen Hebel-

armen p und p' und nehmen $p' = np$, wo n irgend eine ganze Zahl vorstellt; dadurch erhalten wir für die Wirkungen M und M' dieser Momente die Ausdrücke:

$$M = f(P, p) \quad , \quad M' = f(P, p') = f(P, np) \; .$$

Denkt man sich nun den Hebelarm p auf den Hebelarm p' oder MN, Fig. 19, des Momentes P.MN nmal aufgetragen und in jedem Theilungspunkte zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte P angebracht, so wird dadurch in der Wirkung M' dieses Momentes nichts geändert werden; es kann dasselbe nun aber auch aus n gleichen Momenten P.Mn, P.no, etc. bestehend angesehen werden, deren Wirkung M nach dem Vorhergehenden unabhängig ist von ihrer Lage, die also zusammen dasselbe leisten, als wenn sie alle an demselben Punkte M thätig wären; wir ziehen daraus:

$$M' = nM \quad , \quad f(P, np) = nf(P, p)$$

und damit folgt

$$\frac{f(P, p)}{p} = \frac{f(P, np)}{np} \; .$$

Die Function $f(P, p)$ muß demnach eine solche sein, daß ihr Verhältniß zu der Länge p unabhängig von der Längen-Einheit und folglich nur eine Function von P ist, so daß man hat

$$\frac{f(P, p)}{p} = \frac{M}{p} = f(P) \text{ *)}.$$

Versetzen wir dann die n gleichen Momente P.Mn, P.no, etc. wirklich in denselben Punkt und an dieselbe Gerade Mn und vereinigen

---

*) Man kann übrigens auch unabhängig von der Natur der Größen den Schluß ziehen, daß weil die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{f(P, p)}{p} = \frac{f(P, np)}{np}$$

unabhängig von der willkürlichen Größe n ist, auch die rechte Seite davon unabhängig sein muß; dies kann aber nur der Fall sein, wenn n Factor des Zählers wird, und da die Bezeichnung $f(P, np)$ fordert, daß p nur als Factor von n vorkommt, so muß man haben

$$f(P, np) = npf(P) \; ,$$

also auch

$$\frac{f(P, p)}{p} = \frac{npf(P)}{np} = f(P) \; .$$

die n gleichen Kräfte P an den Punkten M und n zu einer Mittelkraft nP, so entsteht dadurch ein Moment, dessen Wirkung $M_{,}$ wieder der nfachen Wirkung M des Momentes P. Mn gleich ist, und dessen Kräfte P, auch der nfachen P gleich sind; man hat also auch

$$M_{,} = nM \quad , \quad f(nP, p) = nf(P, p)$$

und folgert daraus

$$\frac{f(P, p)}{P} = \frac{f(nP, p)}{nP} .$$

Es ist demnach auch das Verhältniß des Momentes M zu der Kraft P unabhängig von der Einheit der Kraft, also nur noch eine Function von p; d. h. es ist

$$\frac{M}{P} = f(p) .$$

Nimmt man daher das Verhältniß von M zu dem Producte Pp, so muß dieses sowohl von der Einheit der Kraft als von der Einheit der Länge unabhängig und kann nur einer constanten Größe k gleich sein; man hat also

$$\frac{M}{Pp} = k \quad , \quad M = k . Pp ,$$

übereinstimmend mit unserm frühern Schlusse, daß die Wirkung eines Momentes eine Function des Productes Pp sein werde, und zwar sieht man, daß jene Wirkung einfach diesem Producte proportional ist; denn man hat für ein anderes Moment, das von zwei Kräften P' mit dem Abstand p' gebildet wird,

$$M' = k . P'p'$$

und erhält dadurch die Proportion:

$$M : M' = Pp : P'p' .$$

Wenn man dann dasjenige Moment M', dessen Kräfte P' der Einheit der Kraft gleich sind und die Längeneinheit zur Entfernung p' haben, als Einheit für die drehende Wirkung der Momente nimmt, so wird

$$M : 1 = Pp : 1 ,$$

und man hat einfach

$$M = Pp ;$$

auf diese Weise wird also das Product Pp das absolute Maaß für die Wirkung eines Momentes. Nach unsern Maaßeinheiten wird die Einheit für die drehenden Kräfte dasjenige Moment sein, dessen Kräfte P = 1 Kilogramm und dessen Hebelarm p = 1 Meter ist; wir wollen diese Einheit, welche mit der Einheit für die Arbeit einer Kraft homogen ist, wie diese Meterkilogramm, zur Unterscheidung aber, da die Arbeit eine in einer gewissen Zeit geleistete Wirkung, das Moment nur einen augenblicklichen Zustand der Wirkung einer Kraft vorstellt, drehendes Meterkilogramm nennen, wonach wir uns dann unter dem Product Pp immer eine bestimmte Anzahl von drehenden Meterkilogramm vorzustellen haben werden.

Nach diesem läßt sich dann ein Moment auch geometrisch durch die Oberfläche eines Rechtecks oder eines Dreiecks darstellen, wie eine fördernde Kraft durch die Länge einer Geraden vorgestellt wird. Als Beispiel diene Fig. 12, wo die an Oberfläche gleichen Dreiecke MNP, MNP′, MNP″ die gleichen Momente P.MN, P′.MN, P″.MN vertreten können.

§. 10.

Nachdem wir auf solche Weise ein Maaß für die Wirkung eines Momentes erhalten haben, können wir leicht die Wirkungen mehrerer Momente zusammensetzen, d. h. ein Moment finden, welches dieselbe drehende Wirkung besitzt, wie mehrere andere gegebene Momente.

Seien zuerst die beiden Momente P.MN und Q.MO, Fig. 20, gegeben, deren Maaße durch Pp und Qq bezeichnet seien, welche in derselben Ebene liegen, in demselben Sinne wirken und in denselben Punkt M versetzt worden sind, und sei deren resultirendes Moment zu suchen. Die beiden in M angreifenden Kräfte P und Q geben eine Resultirende P + Q; die beiden in N und O angreifenden geben ebenfalls eine Mittelkraft P + Q, welche nach §. 2 in einem Punkte R zwischen N und O angreift, so daß man hat:

$$NR : ON = Q : P + Q$$

oder

$$NR = \frac{Q}{P+Q} \times ON = \frac{Q}{P+Q}(q-p).$$

Man hat damit als Maaß des resultirenden Momentes, dessen Hebelarm MR ist, den Ausdruck:

$$(P+Q).MR = (P+Q)\left[p+\frac{Q}{P+Q}(q-p)\right],$$

oder wenn man entwickelt und reduzirt:

$$(P + Q)\,MR = Pp + Qq\ ;$$

man schließt daraus, daß das Resultirende zweier gegebenen Momente, die in demselben Sinne drehen wollen, der Summe derselben gleich ist.

Wenn dagegen die beiden gegebenen Momente P.MN und Q.MO, Fig. 21, eine entgegengesetzte Richtung haben, so geben die in M angreifenden Kräfte P und Q eine im Sinne der größern Kraft Q wirkende Mittelkraft Q — P; ebenso die in N und O angreifenden eine gleiche auf die Seite von Q fallende, welche in einem Punkte R angreift, so daß man hat (§. 2):

$$NR : NO = Q : Q - P\ ,$$

also auch:

$$NR = \frac{Q}{Q - P} \times NO = \frac{Q}{Q - P}(q - p)\ .$$

Das resultirende Moment (Q — P).MR hat daher zum Maaß:

$$(Q - P)\left[p + \frac{Q}{Q - P}(q - p)\right]$$

oder einfacher:

$$Qq - Pp\ ;$$

dieses resultirende Moment ist folglich dem Unterschiede der beiden gegebenen Momente gleich und wirkt im Sinne des größern von beiden.

Ueberträgt man daher das Zeichen der Richtung oder des Sinnes, in welchem ein Moment drehen will, auf dessen Maaß und nimmt —Pp als das Maaß des Momentes P.MN, während das des Momentes Q.MO wie vorher Qq, also positiv bleibt, so kann man allgemeiner sagen: das Maaß des Resultirenden zweier gegebenen Momente, die in derselben Ebene wirken, ist ihrer algebraischen Summe gleich.

Sind dann mehrere Momente in derselben Ebene zu einem einzigen zusammenzusetzen, und betrachtet man diejenigen von ihnen, welche in demselben Sinne drehen wollen, wie sich der Zeiger einer Uhr bewegt, als positive, die entgegengesetzt wirkenden als negative Größen, so ist nach dem Vorhergehenden, indem man zuerst zwei dieser Momente zusammensetzt, das hieraus entstehende mit einem dritten verbindet, u. s. f.,

leicht zu folgern, daß das Resultirende aller dieser Momente ihrer algebraischen Summe gleich ist, d. h. daß man

1.) $$Rr = \Sigma . Pp$$

hat, wenn man die Kräfte des resultirenden Momentes mit R, ihren Abstand mit r bezeichnet, wobei indessen zu beachten ist, daß diese Größen nicht beide genau bestimmt sind, sondern daß eine von beiden immer willkürlich angenommen werden kann.

Die vorhergehenden Sätze dienen auch zur Auflösung der umgekehrten Aufgabe: ein Moment in zwei oder mehrere andere zu zerlegen, deren Gesammtwirkung der Wirkung des gegebenen Momentes gleich ist, und die alle in derselben Ebene, wie dieses, thätig sind. Diese Aufgabe ist natürlich keine bestimmte; es können vielmehr alle Momente bis auf eines willkürlich angenommen, und nur dieses letzte, welches die Summe aller dem Maaße des gegebenen Momentes gleich macht, darf berechnet werden.

§. 11.

Bisher wurden die Momente blos in derselben Ebene angenommen und ihre Gesammtwirkung untersucht; gehen wir nun zur Betrachtung von Momenten über, die in verschiedenen Ebenen wirksam sind, unter der Voraussetzung, daß alle diese Ebenen unter sich in einer festen Verbindung stehen.

Unter dieser Voraussetzung kann zuerst der in §. 7 bewiesene Satz von der Versetzung der Momente weiter ausgedehnt und so ausgesprochen werden: Ein Moment kann nicht nur in seiner Ebene, sondern auch in jede parallele Ebene und in dieser in jede beliebige Lage versetzt werden, ohne seine Wirkung zu ändern. Denn es ist leicht zu sehen, daß der daselbst geführte Beweis auch hier seine Anwendung findet, wenn man die Punkte H und K, Fig. 15, oder die Gerade HK statt in der Ebene des Momentes selbst in einer dazu parallelen Ebene annimmt und im Uebrigen wie dort verfährt. Es ist also dadurch die Möglichkeit der parallelen Versetzung dargethan und durch Verbindung derselben mit der Drehung in derselben Ebene ergibt sich wie dort die Möglichkeit jeder beliebigen Versetzung eines Momentes aus einer gegebenen Ebene in eine parallele.

Daraus folgt sofort mit Beachtung der Gleichung (1), daß wenn irgend eine Anzahl von Momenten, die in parallelen Ebenen wirken, gegeben ist, das Resultirende derselben

ihrer algebraischen Summe gleich ist, da man alle diese Momente in eine beliebige Ebene versetzen und dort zu einem einzigen vereinigen kann.

Umgekehrt wird es denn auch gestattet sein, ein gegebenes Moment in eine beliebige Anzahl anderer Momente zu zerlegen und diese in beliebige parallele Ebenen zu vertheilen, wenn sie nur der Bedingungsgleichung

$$Rr = \Sigma . Pp$$

Genüge leisten.

Seien ferner zwei Momente gegeben, deren Ebenen nicht mehr parallel sind, sich also unter irgend einem Winkel schneiden, und das Resultirende derselben zu suchen.

Die gegebenen Momente mögen ursprünglich in ihren Ebenen liegen, wie sie wollen, sie können immer so versetzt werden, daß von einem jeden einer der Angriffspunkte in einen bestimmten Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen zu liegen kommt, daß die beiden Hebelarme auf dieser Geraden senkrecht stehen und demnach denselben Winkel unter sich bilden, wie die Ebenen der Momente, und daß die längs jener Durchschnittslinie thätigen Kräfte derselben in demselben Sinne gerichtet sind. In dieser Lage betrachten wir nun die Momente $P . MN = Pp$ und $P'. MO = P'p'$, Fig. 22, von denen das erste in der Ebene ABCD, das zweite in der Ebene ABEF liegt, und welche den Punkt M in der Durchschnittslinie AB dieser Ebenen gemeinschaftlich haben; wir werden dabei zuerst voraussetzen, daß der Winkel OMN ein Rechter sei, daß also die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen.

Die beiden in M angreifenden, in demselben Sinne thätigen Kräfte geben eine Resultirende $R = P + P'$; die in N und O angreifenden parallelen Kräfte haben eine ganz gleiche, in entgegengesetztem Sinne gerichtete, deren Angriffspunkt Q die Gerade ON so theilt, daß man hat:

$$ON : OQ = P + P' : P \ ; \quad \frac{OQ}{ON} = \frac{P}{P + P'} \ ;$$

zieht man alsdann Qn parallel zu MN, wie Fig. 23 zeigt, so ist auch

$$OQ : ON = Qn : MN = On : OM$$

also.

$$Qn = MN \frac{OQ}{ON} = p \frac{P}{P + P'} \ ,$$

$$On = OM \frac{OQ}{ON} = p' \frac{P}{P + P'} \ .$$

Daraus folgt weiter:

$$Mn = p' - \frac{P}{P+P'}p' = \frac{P'}{P+P'}p' ,$$

und man findet damit

$$MQ = \sqrt{\overline{Qm}^2 + \overline{Qn}^2} = \frac{1}{P+P'}\sqrt{(Pp)^2 + (P'p')^2} .$$

Das Maaß des resultirenden Momentes ist aber

$$(P + P') \times MQ \quad \text{oder} \quad Rr ,$$

und die vorhergehenden Werthe geben:

2.) $$Rr = \sqrt{(Pp)^2 + (P'p')^2} ;$$

man ersieht daraus, daß das Resultirende von zwei unter sich rechtwinkligen Momenten durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der gegebenen Momente ausgedrückt wird, also in ähnlicher Weise wie die Resultirende zweier fördernden Kräfte, deren Richtungen senkrecht zu einander sind (I. Buch. §. 5). Ferner ergeben sich hier, wie dort, wenn man den Winkel, den die Ebene des Resultirenden mit der Ebene des Momentes Pp bildet, durch den also die Lage der ersten Ebene bestimmt wird, mit ϑ bezeichnet, die Verhältnisse:

3.) $$\left\{ \begin{array}{l} \cos\vartheta = \frac{Mm}{MQ} = \frac{Pp}{\sqrt{(Pp)^2+(P'p')^2}} , \quad \sin\vartheta = \frac{Mn}{MQ} = \frac{P'p'}{Rr} , \\ \tan\vartheta = \frac{P'p'}{Pp} . \end{array} \right.$$

Umgekehrt kann man mittelst dieser Ausdrücke ein gegebenes Moment M in zwei andere Momente M' und M'' zerlegen, deren Ebenen die Winkel ϑ und $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ mit seiner Ebene einschließen; man erhält dadurch

$$M' = M\cos\vartheta \quad , \quad M'' = M\sin\vartheta$$

als Werthe dieser Nebenmomente.

§. 12.

Es wäre nun nicht schwer, die Untersuchung auch auf den Fall auszudehnen, wo die Ebenen der beiden Momente einen spitzen oder stumpfen Winkel unter sich bilden; ich übergehe jedoch diesen besondern Fall, von dem wir in der Folge keine Anwendung zu machen haben, da er in einem allgemeinen enthalten ist, den wir sogleich werden kennen lernen.

Die Winkel, welche eine Ebene mit einer oder mehreren andern einschließt, werden gewöhnlich und namentlich in Bezug auf die Richtung, in der diese Winkel genommen werden sollen, mit größerer Bestimmtheit durch die Winkel dargestellt, welche von der Normalen der ersten Ebene mit den Normalen der andern Ebenen gebildet werden. Indem wir nun dieses auch bei den Ebenen unserer Momente anwenden, können uns diese Normalen zugleich dazu dienen, unsere Momente oder ihre Wirkung selbst darzustellen und zwar sowohl der Größe als Richtung nach, was auf eine andere Weise nicht mit derselben Einfachheit möglich wäre. Dazu ist es aber vor Allem nöthig, eine Annahme zu treffen über die Beziehung, welche zwischen der Normalen zur Ebene des Momentes und dem Sinne, in dem dasselbe drehen will, bestehen soll, da die Normale sich zu beiden Seiten der Ebene erstreckt. Wir wollen daher festsetzen, daß die Normale immer so auf der Ebene des Momentes und zwar in einem der Angriffspunkte desselben errichtet werde, daß für ein Auge, welches sich in einem Punkte der Normalen befindet und gegen die Ebene gerichtet ist, das Bestreben des Momentes dahingeht, seine Ebene in demselben Sinne zu drehen, wie sich der Zeiger einer Uhr bewegt. Diese bestimmte Normale, welche auf solche Weise sowohl die Richtung der Ebene des Momentes als auch den Sinn seiner Thätigkeit in jeder Beziehung genau angibt, soll die Achse des Momentes genannt und zuletzt auch dazu benützt werden, die Intensität des Momentes anschaulich darzustellen, indem man ihre Länge proportional zu dem Maaße Pp des Momentes nimmt. Man wählt dazu, wie für die Einheit der fördernden Kräfte auch eine beliebige Längeneinheit zur Vertreterin der Einheit der Momente und bestimmt nach dieser und dem Zahlenwerthe des Productes Pp die Länge der Achse des Momentes; auf diese Weise wird dann das betreffende Moment durch seine Achse der Größe und Richtung nach vollständig vertreten, und man darf dabei nur im Auge behalten, daß die Wirkung des Momentes darin besteht, eine Drehung um diese Achse und zwar in dem vorher festgestellten Sinne hervorzubringen.

Der Lehrsatz über die Versetzung und Veränderung der Momente kann nach diesen Bestimmungen nun einfach so ausgesprochen werden: **Ein Moment kann, unbeschadet seiner Wirkung, einer jeden Veränderung und Versetzung unterworfen werden, bei welcher seine Achse parallel und sein Maaß (das Product Pp) unverändert bleibt.**

§. 13.

Mittels der vorhergehenden Bestimmungen wird die Zusammensetzung und Zerlegung der Momente ganz auf das für die fördernden Kräfte gegebene Verfahren zurückgeführt.

Denn liegen die gegebenen Momente alle in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen, so ist das resultirende Moment gleich der Summe der gegebenen; in diesem Falle sind aber auch die Achsen aller gegebenen Momente parallel und können in dieselbe Gerade versetzt werden, und die Achse des resultirenden Momentes ist dann mit Berücksichtigung der Qualitätszeichen derselben nach Gl. (1) gleich der algebraischen Summe der Achsen der gegebenen Momente, wie die Resultirende von fördernden Kräften, welche längs derselben Geraden wirken, durch deren algebraische Summe ausgedrückt wird.

Bilden dagegen die Ebenen zweier Momente einen rechten Winkel unter sich, wie im Falle des §. 11 und der Fig. 22, so schließen auch die Achsen dieser Momente einen rechten Winkel unter sich ein; es wird das Moment P . MN durch die Achse MH, das Moment P'. MO durch die Achse MK vorgestellt werden, deren Längen den Producten Pp und P'p' proportional sind, und von deren Endpunkten H und K aus angesehen, jene Momente im Sinne eines Uhrzeigers drehen wollen. Die Achse des resultirenden Momentes ist dann offenbar die Diagonale MJ des über MH und MK construirten Rechtecks, denn man hat für diese die Beziehungen:

$$\overline{MJ}^2 = (Pp)^2 + (P'p')^2 = (Rr)^2$$

und

$$\tang \vartheta = \tang \widehat{JH} = \frac{P'p'}{Pp}$$

wie es die Gleichungen (2) und (3) verlangen. Auch sieht man, daß durch diese Achse der Sinn, in welchem das resultirende Moment drehen will, unserer Voraussetzung entsprechend, richtig bestimmt wird, und daß sich umgekehrt die Achsen MH und MK als rechtwinklige Componenten

der Achse MJ ergeben, wie die rechtwinkligen Componenten einer fördernden Kraft.

Diese beiden Hauptfälle, auf welche sich alle übrigen zurückführen lassen, genügen, um zu zeigen, daß sich die Momenten-Achsen gerade so zusammensetzen und zerlegen lassen, wie die fördernden Kräfte.

Sind demnach drei Momente M_X, M_Y, M_Z gegeben, deren Ebenen oder Achsen senkrecht auf einanderstehen, so mögen sie in ihren Ebenen liegen, wie sie wollen, man kann sie immer so versetzen, daß die Anfangs- oder Fußpunkte ihrer Achsen in demselben Punkte zusammentreffen, und diese selbst zu ihren früheren Richtungen parallel sind. Die Achse des resultirenden Momentes M_R wird dann gerade so gefunden, wie die Resultirende dreier rechtwinkligen fördernden Kräfte, und wenn l, m, n die Winkel bezeichnen, welche diese letztere Achse mit den Achsen der drei gegebenen Momente einschließt, so hat man

$$M_R^2 = M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2 \qquad (4.$$

und für diese Winkel die Gleichungen:

$$\cos l = \frac{M_X}{M_R}\ , \qquad \cos m = \frac{M_Y}{M_R}\ , \qquad \cos n = \frac{M_Z}{M_R}\ . \qquad (5.$$

Dieselben Gleichungen dienen auch wieder dazu, ein gegebenes Moment M in drei unter sich rechtwinklige M_X, M_Y, M_Z zu zerlegen, deren Achsen die Winkel l, m, n mit der des gegebenen Momentes bilden sollen.

Um endlich eine beliebige Anzahl von Momenten in beliebigen Ebenen zu einem einzigen zu vereinigen, wird man durch einen beliebigen Punkt, der mit allen diesen Ebenen fest verbunden ist, drei rechtwinklige Coordinaten-Achsen legen, die Anfangspunkte aller Momenten-Achsen in jenen Anfangspunkt der Coordinaten versetzen und die Winkel λ, μ, ν bestimmen, welche jede dieser Achsen mit den drei Coordinaten-Achsen bildet. Man zerlegt dann jedes Moment M in drei unter sich rechtwinklige:

$$M \cos \lambda\ , \qquad M \cos \mu\ , \qquad M \cos \nu\ ,$$

deren Achsen mit den entsprechenden Coordinaten-Achsen zusammenfallen, und erhält so drei Systeme von Momenten, die in den drei Coordinaten-Ebenen thätig sind, oder drei Systeme von Momenten-Achsen längs der drei Coordinaten-Achsen. Man findet daher nach (1) als resultirende Momente dieser Systeme:

$$6.)\quad \begin{cases} M_X = \Sigma\,.\,M\cos\lambda & \text{in der Ebene der } yz\,, \\ M_Y = \Sigma\,.\,M\cos\mu & \text{in der Ebene der } xz\,, \\ M_Z = \Sigma\,.\,M\cos\nu & \text{in der Ebene der } xy\,, \end{cases}$$

und der Index x, y, oder z bezeichnet die Coordinatenachse, in welcher die Achse des entsprechenden resultirenden Momentes liegt, oder um welche dasselbe drehen will. Zuletzt geben die Gleichungen (4) und (5) die Größe des Resultirenden M_R aller Momente und die Winkel l, m, n, welche dessen Achse mit den drei Coordinatenachsen bildet.

§. 14.

Zufolge der vorhergehend gefundenen Ausdrücke für die Zusammensetzung der Momente werden wir bei diesen ganz ähnliche Lehrsätze für das resultirende Moment erhalten, wie wir sie (I. Buch. §. 12) für die Resultirende der fördernden Kräfte abgeleitet haben. So wird man, auf demselben Wege wie dort, einen Ausdruck für das resultirende Moment erhalten, welcher von der Lage der Coordinaten-Ebenen unabhängig ist, nämlich:

$$M_R^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + \text{etc.}$$
$$+ 2 M_1 M_2 \cos \widehat{M_1 M_2} + 2 M_1 M_3 \cos \widehat{M_1 M_3} + \text{etc.}$$

oder auch in abgekürzter Form:

$$7.)\qquad M_R^2 = \Sigma\,.\,M^2 + 2\Sigma\,.\,MM' \cos \widehat{MM'}\,,$$

worin wie früher $\widehat{MM'}$, $\widehat{M_1 M_2}$, etc. die Winkel bezeichnen, welche die Achsen der entsprechenden Momente mit einander bilden.

Ferner kann auf gleiche Weise, wie in dem genannten §. bewiesen werden, daß die Projection der Achse des resultirenden Momentes auf irgend eine Gerade der Summe der Projectionen von den Achsen aller gegebenen Momente auf dieselbe Gerade gleich ist, daß also auch die Projection des Resultirenden selbst auf irgend eine Ebene der Summe der Projectionen aller Momente auf dieselbe Ebene gleich ist, oder analytisch ausgedrückt, indem man die Winkel zwischen den Achsen der Momente und der Normalen zu dieser Ebene durch $\widehat{M_R N}$, $\widehat{MN}$, etc. vorstellt:

$$8.)\qquad M_R \cos \widehat{M_R N} = \Sigma\,.\,M \cos \widehat{MN}\,.$$

Bezeichnet man dann die Winkel zwischen dieser Normalen und den drei Achsen mit g, h, k und macht $\widehat{M_R N}$ gleich ϑ, so hat man auch:

$$M_R \cos\vartheta = M_X \cos g + M_Y \cos h + M_Z \cos k \;,$$

und wenn es die Ebene des resultirenden Momentes selbst ist, auf welche die Momente projicirt werden, so ist dieses seiner Projection gleich, und demnach wird

$$M_R = M_1 \cos \widehat{M_1 M_R} + M_2 \cos \widehat{M_2 M_R} + M_3 \cos \widehat{M_3 M_R} + \text{etc.}$$

oder einfacher ausgedrückt,

$$M_R = \Sigma . M \cos \widehat{M M_R} \;. \qquad (9.$$

Das Resultirende ist folglich das größte Moment, das durch Projection der gegebenen Momente auf irgend eine Ebene erhalten werden kann, und die Summe aller Projectionen auf eine Ebene, welche auf der des resultirenden Momentes senkrecht steht, ist gleich Null. Für drei unter sich rechtwinklige Momente, deren Achsen mit der des Resultirenden die Winkel l, m, n bilden, zieht man daraus

$$M_R = M_X \cos l + M_Y \cos m + M_Z \cos n \;.$$

Einige andere bemerkenswerthe Eigenschaften und die descriptive Darstellung der Momente werden später erörtert werden, wenn die Zusammensetzung von Kräften, welche beliebige Angriffspunkte und Richtungen haben, zur Untersuchung gekommen ist.

Drittes Kapitel.

Gesammtwirkung paralleler Kräfte. Schwerpunkt.

§. 15.

Das einfachste System von Kräften mit beliebigen Angriffspunkten ist dasjenige, bei welchem die Richtungen aller Kräfte parallel sind. Ich beginne deßhalb die Untersuchung über die Gesammtwirkung der Kräfte an einem festen System mit diesem Falle und zwar zuerst unter der Voraussetzung, daß alle diese Kräfte in derselben Ebene liegen.

Sei also eine beliebige Anzahl von parallelen Kräften P, P', etc. gegeben, welche alle in derselben Ebene liegen, wie ihre Angriffspunkte M, M', etc., Fig. 24. — Durch einen beliebigen Punkt A in dieser Ebene ziehe man ein rechtwinkliges Achsenpaar AX und AY, von denen die erstere mit der Richtung der Kräfte parallel ist, und beziehe auf diese die Lage der Angriffspunkte M, M', etc. durch deren Coordinaten x und y, während man den Sinn, in welchem die Kräfte wirken, durch ihre Qualitätszeichen unterscheidet und diejenigen Kräfte, wie P, welche ihren Angriffspunkt im Sinne der positiven x bewegen wollen, als positive oder $P \cos 0$, die im entgegengesetzten Sinne wirkenden, wie P', als negative oder $P \cos \pi$ nimmt.

In dem Anfangspunkte A der Coordinaten lasse man nun längs der Achse der x zwei der Kraft P gleiche, aber einander entgegengesetzte Kräfte angreifen, durch welche in der Wirkung der gegebenen Kräfte offenbar nichts geändert wird; man wird nun aber die, in gleichem Sinne mit der gegebenen Kraft P in M, im Anfangspunkte A wirkende Kraft für sich allein als fördernde, die beiden gleichen und entgegengesetzten, in A und M angreifenden zusammen als drehende Kraft betrachten und in solcher Weise die Wirkung jener gegebenen Kraft P in M in Bezug auf den Anfangspunkt A in seine fördernde Wirkung P und in seine drehende Wirkung oder das Moment P . AM zerlegen. Das Maaß dieser drehenden Wirkung ist offenbar — Py, da die Ordinate y des Angriffspunktes M zugleich der Abstand oder Hebelarm der Kräfte des Momentes ist, und seine Wirkung nach unserer Annahme, daß dasjenige Moment als positives betrachtet werden soll, welches seine Ebene in demselben Sinne drehen will, wie sich der Zeiger einer Uhr

bewegt, eine negative ist, und man sieht leicht, daß dies immer der Fall sein wird, sobald P und y gleiche Zeichen haben, daß das Moment dagegen positiv würde, wenn sie entgegengesetzte Zeichen hätten, und daß demnach der negative Ausdruck: — Py als allgemeiner anzunehmen ist.

Verfährt man dann auf dieselbe Weise mit allen übrigen der gegebenen Kräfte, zerlegt also die Wirkung eines jeden in Bezug auf den Punkt A in eine fördernde und in eine drehende, so erhält man statt des gegebenen Systems von Kräften zwei neue Systeme, ein System von fördernden Kräften P am Punkte A und ein System von Momenten — Py in der Ebene der Kräfte. Das erste derselben, dessen Kräfte alle längs derselben Geraden, der Achse der x, thätig sind, läßt sich durch eine einzige Kraft ersetzen, welche der algebraischen Summe aller Kräfte gleich ist; das zweite System kann ebenso zu einem einzigen Moment vereinigt werden, indem man sämmtliche Momente desselben mit Rücksicht auf ihre Zeichen summirt. Die Wirkung des ganzen Systems der gegebenen Kräfte in Bezug auf den Punkt A wird demnach durch eine einzige fördernde Kraft: $\Sigma . P$ und eine einzige drehende Kraft: $\Sigma . -Py$ oder $-\Sigma . Py$ ausgedrückt oder vorgestellt.

In sehr vielen Fällen kann diese Wirkung selbst als die einer einzigen Kraft R angesehen werden, welche in einem Punkte $\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}$ in der Ebene der Kräfte angreift, und deren Richtung zu der der gegebenen Kräfte parallel ist. Es ist einleuchtend, daß wenn dieses der Fall sein soll, die Wirkung der genannten Kraft sich in eine fördernde und in eine drehende muß zerlegen lassen, von denen die erstere der Kraft $\Sigma . P$, die zweite dem Momente: $-\Sigma . Py$ gleich ist. Man erhält aber durch eine gleiche Behandlung jener Kraft R, wie sie der Kraft P zu Theil wurde, eine fördernde Kraft R am Anfangspunkte längs der Achse der x und dann das Moment: $-R\mathfrak{Y}$, und damit hat man zur Bestimmung der Kraft R die Gleichungen:

$$R = \Sigma . P \quad , \quad -R\mathfrak{Y} = -\Sigma . Py ;$$

die erste gibt die Intensität dieser Kraft, die zweite den Abstand $\mathfrak{Y}$ ihrer Richtung von der Achse der x, nämlich

$$\mathfrak{Y} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P} ,$$

so daß der Angriffspunkt selbst in dieser Richtung, wie vorauszusehen war, unbestimmt bleibt.

Wird aber in der ersten Gleichung $\Sigma.P$, also auch R gleich Null, ohne daß auch das Moment $\Sigma.Py$ Null ist, so kommt die Wirkung des gegebenen Systems auf dieses letztere allein zurück und kann nicht mehr durch eine einzige Kraft ersetzt werden. Hat man dagegen

$$\Sigma.Py = 0 ,$$

ohne daß zugleich $\Sigma.P$ Null ist, so ist $Y = 0$, und die Richtung der Resultirenden R fällt in die Achse der x.

§. 16.

Die Gleichung:

$$Y = \frac{\Sigma.Py}{\Sigma.P} = b$$

gibt, wie schon bemerkt, nur den Abstand der Richtung der Resultirenden von der Achse der x und kann auch als die Gleichung dieser Richtung, d. i. einer zu der Achse der x parallelen Geraden, angesehen werden; es ist dabei gleichgültig, in welchem Punkte dieser Geraden die Kraft R angreift, ihre Wirkung ist stets dieselbe.

Dreht man nun die Richtungen aller Kräfte um deren Angriffspunkte durch einen rechten Winkel, so daß dieselben zur Achse der y parallel werden, Fig. 25, so ergeben sich, bei gleicher Behandlung wie vorher, zwei ähnliche Systeme, eines von förbernden Kräften P und eines von drehenden Kräften Px, deren Maaß im Allgemeinen positiv zu nehmen ist, da ihre Wirkung einen positiven Sinn hat, wenn P und x gleiche Zeichen haben, und dann erhält man durch Zusammensetzung der Kräfte desselben Systems die beiden Resultirenden: $\Sigma.P$ und $\Sigma.Px$. Die Richtung der Resultirenden R des ganzen Systems muß dann ebenfalls der Achse der y parallel sein, weil für eine andere Richtung dieser Kraft, wie man sich durch Zerlegung derselben in eine parallele und eine senkrechte Componente leicht überzeugen wird, niemals Gleichheit zwischen den förbernden Wirkungen dieser Componenten und der förbernden Wirkung des gegebenen Systems erreicht werden kann; man findet daher nun die Gleichungen:

$$R = \Sigma.P \quad , \qquad RX = \Sigma.Px$$

und zieht daraus

$$X = \frac{\Sigma.Px}{\Sigma.P} = a .$$

Diese Gleichung ist nun die Gleichung einer zur Achse der y parallelen Geraden, welche wieder alle möglichen Angriffspunkte der Kraft R enthält und darunter auch einen, der zugleich der ersten Geraden: $\mathfrak{Y} = b$ angehört und demnach als Angriffspunkt von R für beide Lagen der Kräfterichtungen angesehen werden kann.

Es ist aber nicht schwer zu zeigen, daß dieser Punkt in allen Lagen, welche die Kräfte gegen die Coordinatenachsen einnehmen können, in der Richtung der Resultirenden R liegt und demnach immer Angriffspunkt dieser Kraft bleibt. Denn dreht man die Richtungen aller Kräfte in eine beliebige Lage, zieht durch den Anfang A, Fig. 26, zwei neue Achsen AX' und AY', von denen die erstere parallel zur neuen Richtung der Kräfte sei, und bezeichnet die Coordinaten der Angriffspunkte der einzelnen Kräfte in Bezug auf diese Achsen durch x', y', für die Resultirende mit $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, so ist wie oben

$$R = \Sigma . P \quad , \quad R\mathfrak{Y}' = \Sigma . Py' .$$

Wird dann der Winkel zwischen den Achsen AX und AX' mit ω bezeichnet, so hat man zwischen den alten und den neuen Coordinaten die bekannten Beziehungen:

$$x' = x \cos\omega + y \sin\omega \quad , \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \cos\omega + \mathfrak{Y} \sin\omega \ ,$$
$$y' = y \cos\omega - x \sin\omega \quad , \quad \mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} \cos\omega - \mathfrak{X} \sin\omega \ ,$$

mit welchen die zweite der vorhergehenden Gleichungen die Form annimmt:

$$R(\mathfrak{Y} \cos\omega - \mathfrak{X} \sin\omega) = \Sigma . P(y \cos\omega - x \sin\omega)$$

oder:

$$(R\mathfrak{Y} - \Sigma . Py) \cos\omega = (R\mathfrak{X} - \Sigma . Px) \sin\omega \ ,$$

und dieser letztern Gleichung wird offenbar für jeden Werth von ω Genüge geleistet, wenn man zugleich

$$R\mathfrak{Y} = \Sigma . Py \quad , \quad R\mathfrak{X} = \Sigma . Px$$

setzt. Die Gleichungen:

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P} \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P}$$

drücken demnach unabhängig von dem Winkel ω, d. h. für jede Lage der Kräfte einen Punkt in der Richtung der Resultirenden aus, und

man kann diesen deßhalb vorzugsweise den Angriffspunkt derselben nennen; wir werden ihn sogleich bei einem allgemeinen System von parallelen Kräften noch unter einem besondern Namen kennen lernen.

§. 17.

In dem allgemeinen Falle, wo die Kräfte nicht mehr in derselben Ebenen liegen, nehmen wir irgend einen dem festen System angehörigen Punkt A, Fig. 27, als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen eine Achse, z. B. die AX, parallel zur Richtung der Kräfte ist, während die AY und AZ eine beliebige Lage haben, beziehen auf diese die Lage der Angriffspunkte durch die Coordinaten x, y, z und untersuchen wieder die Wirkung der einzelnen Kräfte in Bezug auf den Anfang A, indem wir wie immer diejenigen Kräfte als positive nehmen, welche ihre Angriffspunkte im Sinne der positiven x bewegen wollen.

Dazu bringen wir wie vorher in dem Punkte A zwei der Kraft P gleiche und einander entgegengesetzte Kräfte P längs der Achse der x an, wodurch in der Wirkung der Kräfte nichts geändert wird; diese drei Kräfte P können aber auch als die nach A versetzte fördernde Wirkung der gegebenen Kraft P und als ein Moment P.AM betrachtet werden, welches deren drehende Wirkung in Bezug auf den Punkt A ausdrückt. Die Ebene dieses Momentes geht durch die Achse der x, seine Achse fällt demnach in die Ebene der yz, und seine Intensität ist gleich $P\sqrt{y^2+z^2}$. Dieses Moment zerlegen wir wieder in zwei unter sich rechtwinklige, deren Achsen mit den Achsen der y und z zusammenfallen, und die durch

$$P\sqrt{y^2+z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}=Pz \quad , \quad P\sqrt{y^2+z^2}\cdot\frac{-y}{\sqrt{y^2+z^2}}=-Py$$

ausgedrückt sind, da die Quotienten

$$\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \quad \text{und} \quad -\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

die Cosinus der Winkel sind, welche die Achse Pp des obigen Momentes mit den Achsen der y und z bildet, wie man sich leicht durch den Anblick der Fig. 28 überzeugen wird, welche die Ebene der yz mit dem Riß der Ebene des Momentes Pp, mit seiner Achse Pp und deren Seitenachsen —Py und Pz vorstellt.

Durch gleiche Behandlung aller übrigen gegebenen Kräfte bildet man dann drei Systeme von einfachen Kräften, von denen das erste nur fördernde, in der Achse der x thätige Kräfte enthält und durch eine einzige fördernde Kraft $\Sigma . P$ ersetzt werden kann, während die beiden andern aus einer gleichen Anzahl von drehenden Kräften bestehen, für welche man die resultirenden Momente:

$$-\Sigma . Py \quad , \quad \Sigma . Pz$$

findet.

Diese drei Kräfte von einfacher Wirkung:

$$\Sigma . P \quad , \quad -\Sigma . Py \quad , \quad \Sigma . Pz$$

können wieder in sehr vielen Fällen als die fördernde und als die drehenden Wirkungen einer Kraft R betrachtet werden, deren Richtung der der gegebenen Kräfte parallel ist. Bezeichnet man daher, um die Größe und Lage dieser Kraft zu bestimmen, die Coordinaten ihres Angriffspunktes mit $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ und denkt sich dieselbe von diesem Punkte wie die Kraft P in den Anfang A versetzt, so wird sie dadurch zuerst in eine fördernde Kraft R, und in ein Moment $R\sqrt{\mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}^2}$ zerlegt, welches letztere wieder zwei rechtwinklige Seitenmomente:

$$-R\mathbf{Y} \quad , \quad R\mathbf{Z}$$

gibt. Da aber diese drei Kräfte die Wirkungen der vorhergehenden fördernden Kraft $\Sigma . P$ und der Momente $-\Sigma . Py$ und $\Sigma . Pz$ ersetzen sollen, so hat man die Gleichungen

$$R = \Sigma . P \ ,$$

$$-R\mathbf{Y} = -\Sigma . Py \quad , \quad R\mathbf{Z} = \Sigma . Pz$$

und zieht daraus

$$\mathbf{Y} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P} \quad , \quad \mathbf{Z} = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P} \ .$$

Diese beiden Gleichungen lassen den Werth von $\mathbf{X}$ wieder unbestimmt und geben blos die Lage einer zur Achse der x oder zur Richtung der Kräfte parallelen Geraden als Richtung der allgemeinen Resultirenden R.

Werden nun die Richtungen aller Kräfte wieder um deren Angriffspunkte gedreht und zwar zuerst so, daß sie parallel zur Achse der y werden, und die Kräfte wie vorher zerlegt, so erhält man wieder dieselbe fördernde Resultirende $\Sigma . P$ nun längs der Achse der y wirkend,

und die beiden resultirenden Momente $\Sigma . Px$ und $-\Sigma . Pz$ in den Ebenen der xy und der yz. Diese letztern können dann als Ergebnisse der Versetzung einer Kraft $R = \Sigma . P$ von ihrem ursprünglichen Angriffspunkte $\mathfrak{X}\, \mathfrak{Y}\, \mathfrak{Z}$ in den Punkt A angesehen werden, und man hat zur Bestimmung jenes Punktes die Gleichungen:

$$R\mathfrak{X} = \Sigma . Px \quad , \qquad -R\mathfrak{Z} = -\Sigma . Pz$$

oder auch

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P} \quad , \qquad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P} .$$

Die durch diese Gleichungen bestimmte, zur Achse der y parallele Gerade schneidet die vorhergehende Richtung der Resultirenden R in einem Punkte, der allen Richtungen dieser Kraft gemeinschaftlich bleibt, wie man auch die Kräfte um ihre Angriffspunkte drehen mag, und welcher nach dem Obigen durch die drei Gleichungen:

10.) $$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P} \quad , \qquad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P} \quad . \qquad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P}$$

gegeben ist. Denn es ist leicht zu sehen, daß wenn die Kräfte noch ferner gedreht werden, bis sie zur Achse der z parallel geworden sind, man immer wieder $R = \Sigma . P$ findet, dann

$$-R\mathfrak{X} = -\Sigma . Px \quad , \qquad R\mathfrak{Y} = \Sigma . Py$$

und folglich auch

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P} \quad , \qquad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P} .$$

Wird endlich die Richtung der Kräfte irgend eine beliebige gegen das Coordinatensystem, und bezeichnet man den Winkel, welchen diese Richtung mit der Achse der z bildet, durch ϑ, den, welchen ihre Projection in der Ebene der xy mit der Achse der x einschließt, mit ω, und denkt sich durch den Anfang A neue Coordinaten-Achsen der x', y', z' so gelegt, daß die Achse der z' mit der Richtung der Kräfte parallel wird, wobei die Lage der Achse der y' unbestimmt bleibt und deßhalb in der Ebene der xy angenommen werden kann, so hat man in Bezug auf die neuen Achsen nach dem Vorhergehenden:

$$R\mathfrak{X}' = \Sigma . Px' \quad , \qquad R\mathfrak{Y}' = \Sigma . Py' \; ,$$

wenn $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft R in Bezug auf die neuen Achsen bezeichnen. Man hat aber auch zwischen den alten und neuen Coordinaten nach §. 22 der Einleitung die Beziehungen:

$$x' = \mathfrak{x} \cos \vartheta \cos \omega + y \cos \vartheta \sin \omega - \mathfrak{z} \sin \vartheta \ ,$$
$$y' = - x \sin \omega + y \cos \omega \ ,$$

und damit nehmen die obigen Gleichungen die Form an:

$$(R\mathfrak{X} - \Sigma.Px) \cos \vartheta \cos \omega + (R\mathfrak{Y} - \Sigma.Py) \cos \vartheta \sin \omega = (R\mathfrak{Z} - \Sigma.Pz) \sin \vartheta ,$$
$$(R\mathfrak{X} - \Sigma.Px) \sin \omega = (R\mathfrak{Y} - \Sigma.Py) \cos \omega ;$$

es geht daraus hervor, daß sie unabhängig von den Winkeln ω und ϑ oder für alle mögliche Werthe derselben befriedigt werden, wenn

$$R\mathfrak{X} = \Sigma.Px \quad , \qquad R\mathfrak{Y} = \Sigma.Py \quad , \qquad R\mathfrak{Z} = \Sigma.Pz$$

gesetzt wird, daß also der Punkt, dessen Coordinaten durch diese oder die Gleichungen (10) bestimmt werden, in allen Lagen, welche das System von parallelen Kräften um die unveränderten Angriffspunkte einnehmen kann, in der Richtung der Resultirenden des Systems liegt. Dieser Punkt wird deßhalb **Mittelpunkt der parallelen Kräfte** genannt.

§. 18.

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß die Summe aller Kräfte P immer dieselbe bleibt, wie auch das Coordinatensystem liegen mag; die Momente dagegen ändern sich nicht nur mit der Lage der Achsen gegen die gemeinschaftliche Richtung der Kräfte, sondern auch hauptsächlich mit der Lage des Anfangspunktes der Coordinaten; es ist deßhalb immer möglich, durch Aenderung dieser Lage des Anfangspunktes den Summen der Momente in den einzelnen Coordinaten-Ebenen oder den resultirenden Momenten einen beliebigen Werth zu geben, namentlich den Werth: Null. Ist z. B. die Achse der z der Richtung der Kräfte parallel, und man verlegt den Anfang der Coordinaten in der Ebene der xy so, daß man

$$y = \mathfrak{Y} - y' \quad , \qquad x = \mathfrak{X} - x'$$

hat, so werden die Momentensummen in den Ebenen der xz und yz

$$\Sigma.P(\mathfrak{Y} - y') \quad , \qquad \Sigma.P(\mathfrak{X} - x')$$

oder auch

$$\Sigma.P\mathfrak{Y} - \Sigma.Py' \quad , \qquad \Sigma.P\mathfrak{X} - \Sigma.Px' \ ,$$

und damit jede derselben Null werde, muß man haben

$$\Sigma.P\mathfrak{Y} = \Sigma.Py' \quad , \qquad \Sigma.P\mathfrak{X} = \Sigma.Px' \ ,$$

oder da $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{X}$ für alle Summenglieder denselben Werth behalten:

$$\mathfrak{Y}\,\Sigma.P = \Sigma.Py' \quad , \quad \mathfrak{X}\,\Sigma.P = \Sigma.Px' \,,$$

woraus man zieht

$$\mathfrak{Y} = \frac{\Sigma.Py'}{\Sigma.P} \quad , \quad \mathfrak{X} = \frac{\Sigma.Px'}{\Sigma.P} \,.$$

Diese beiden Gleichungen drücken aber die Richtung der Resultirenden aus und zeigen demnach, daß **für jeden Punkt in der Richtung der Resultirenden des ganzen Systems die Summen der Momente in zwei zu dieser Richtung parallelen Ebenen Null werden.** In Bezug auf den Mittelpunkt der parallelen Kräfte hat man folglich für jede Lage der Achsen die Momentensummen gleich Null, d. h.

$$11.) \quad \Sigma.Px = 0 \quad , \quad \Sigma.Py = 0 \quad , \quad \Sigma.Pz = 0 \,,$$

und umgekehrt schließt man, daß wenn sich für ein System mit parallelen Kräften die vorstehenden Gleichungen ergeben, der Anfang der Coordinaten der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist. Sind nur zwei jener Gleichungen Null, so liegt dieser Mittelpunkt in der in denselben nicht vertretenen Achse, also wenn die beiden ersten Null sind, in der Achse der z, und wenn nur eine derselben Null ist, in der Ebene, welche die nicht vertretenen Achsen enthält, also für die erste der obigen Gleichungen in der Ebene der yz, für die zweite in der Ebene der xz, u. s. f.

In dem besondern Falle dagegen, wo $\Sigma.P = 0$ ist, ohne daß die Momente $\Sigma.Px$, $\Sigma.Py$, $\Sigma.Pz$ Null sind, können die Gleichungen (10) nicht mehr befriedigt werden; es gibt dann keine einzelne Kraft mehr, welche die Wirkung des ganzen Systems ersetzen kann; denn diese kommt auf das Resultirende der beiden von den obigen Momenten zurück, deren Achsen zur Richtung der Kräfte senkrecht sind, also wenn die Achse der z zu dieser Richtung parallel ist, auf das Resultirende der Momente: $\Sigma.Px$ und $\Sigma.Py$, welches durch:

$$M_R = \sqrt{(\Sigma.Px)^2 + (\Sigma.Py)^2}$$

ausgedrückt wird. Dieses Moment und seine Componenten sind dann durchaus unabhängig von der Lage des Anfangspunktes, sie ändern ihre Werthe nicht und können folglich niemals Null werden. Denn die Gleichungen:

$$\Sigma.Px = \Sigma.P(\mathfrak{X} + x') \quad , \quad \Sigma.Py = \Sigma.P(\mathfrak{Y} + y') \,,$$

unter die Form gebracht:

$$\Sigma.Px = \mathfrak{X}\,\Sigma.P + \Sigma.Px' \quad , \quad \Sigma.Py = \mathfrak{Y}\,\Sigma.P + \Sigma.Py' \,,$$

zeigen, daß für $\Sigma . P = 0$,

$$\Sigma . Px = \Sigma . Px' \quad , \quad \Sigma . Py = \Sigma . Py'$$

wird, welches auch X und Y sein mögen. In diesem Falle gibt es natürlich auch keinen Mittelpunkt der Kräfte mehr.

§. 19.

Das bemerkenswertheste Beispiel für parallele Kräfte bieten uns die Erscheinungen der Schwere oder die Wirkungen dar, welche die Erde durch ihre Anziehung auf die Körper, die sich auf ihrer Oberfläche befinden, hervorbringt.

Diese Kraft ist nämlich, wie bereits im vorhergehenden Buche erörtert wurde, an allen Orten der Erdoberfläche senkrecht zu der Oberfläche eines ruhigen Wassers oder senkrecht zur geometrischen Erdoberfläche gerichtet, d. h. zu derjenigen Fläche, welche durch die unter das feste Land verlängerte Meeresfläche gebildet wird. Da nun die Gestalt der Erde der einer Kugel sehr nahe kommt, so schneiden sich alle Normalen ihrer Oberfläche nahe an ihrem Mittelpunkte, und es bilden zwei solche Vertikale oder Lothlinien je nach der Lage der entsprechenden Orte einen größern oder kleinern Winkel mit einander, welcher durch den Bogen eines größten Kreises gemessen wird, der die beiden Orte verbindet. Der Halbmesser eines solchen Kreises beträgt ohngefähr 6370000 Meter; jener Bogen muß also

$$\frac{6370000^{m}}{206265} = 31^{m} \text{ nahezu}$$

lang sein, wenn die an seinen beiden Enden errichteten Vertikalen oder die Richtungen der Schwere daselbst einen Winkel von einer Sekunde einschließen sollen. Man kann demnach bei einem Körper von gewöhnlicher Ausdehnung die Richtungen der Schwere für alle Punkte desselben als parallel betrachten. Wir haben ferner in dem vorhergehenden Buche gesehen, daß sich die Intensität dieser Kraft mit der geographischen Breite eines Ortes und mit der Entfernung eines Körpers von dem Mittelpunkte der Erde ändert; aber auch diese Ortsveränderungen müssen sehr beträchtlich werden, wenn die Veränderung in der Stärke der Anziehung der Erde bemerkbar werden soll, jedenfalls weit größer, als die Ausdehnungen der Körper, welche wir in dieser Beziehung zu untersuchen haben werden, und wir können deßhalb die Schwere für alle Punkte desselben Körpers und selbst für mehrere Körper, die

nicht sehr weit von einander entfernt sind, als unveränderliche Kraft annehmen.

Nach diesen Wahrnehmungen und den weitern in §§. 43 u. f. f. des vorhergehenden Buches abgeleiteten Sätzen müssen wir uns also sämmtliche materielle Punkte (Atome) eines Körpers von parallelen Kräften angegriffen denken, welche alle in demselben Sinne wirken und den Massen derselben proportional sind, deren Resultirende daher ihrer Summe gleich ist und das Gewicht des ganzen Körpers vorstellt. Die Richtung dieser Kräfte ist unveränderlich; sie drehen sich also alle, wenn der Körper in eine andere Lage gebracht wird, um ihre Angriffspunkte, und ihre Resultirende dreht sich um den Mittelpunkt dieser Kräfte, welcher hier den besondern Namen Schwerpunkt führt und am einfachsten geradezu als Angriffspunkt dieser Resultirenden oder des Gewichtes des entsprechenden Körpers angenommen wird. In vielen Fällen, in denen es nämlich nicht auf die Gestalt eines Körpers ankommt, kann man daher einen solchen blos als einen materiellen Punkt ansehen, welcher dieselbe Masse und dasselbe Gewicht wie jener besitzt, und der den Ort des Schwerpunktes von diesem Körper einnimmt, und in allen Untersuchungen, die das Gleichgewicht oder die Bewegung fester Körper auf der Erde betreffen, wird deren Gewicht als eine lothrecht abwärts wirkende Kraft in Rechnung gebracht, welche in dem Schwerpunkte des betreffenden Körpers angreift.

Aus diesen Bemerkungen erhellt, wie wichtig es ist, den Schwerpunkt eines Körpers oder eines festen Systems von Körpern bestimmen zu können, weßhalb denn auch dieser Gegenstand im Folgenden ausführlich behandelt werden soll.

§. 20.

Zuerst ist es einleuchtend, daß für ein System von Körpern oder Körpertheilen, deren Form und Anzahl bestimmt, und deren Gewichte und Schwerpunkte bekannt sind, die Gleichungen (10) unmittelbar zur Bestimmung des Schwerpunktes von dem ganzen System dienen werden. Denn bezeichnet man das Gewicht von irgend einem derselben mit P, die Coordinaten seines Schwerpunktes in Bezug auf ein beliebig gerichtetes Achsensystem mit x, y, z und die des gesuchten Schwerpunktes vom ganzen System mit X, Y, Z, so kann man in dieser Beziehung jeden dieser Körper durch sein Gewicht, also durch eine lothrecht in seinem Schwerpunkte angreifende Kraft ersetzen und erhält so ein System von parallelen Kräften P, deren Angriffspunkte durch die Coordinaten x, y, z gegeben sind. Man hat demnach

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P} \qquad (12.$$

als die Gleichungen, durch welche die Lage des Mittelpunktes jener Kräfte oder des Schwerpunktes vom ganzen System vollständig bestimmt wird.

Aus diesen Werthen und aus dem Umstande, daß alle Kräfte P in demselben Sinne thätig sind, schließt man sogleich, daß der Schwerpunkt des ganzen Systems immer zwischen die Schwerpunkte der einzelnen Körper oder Körpertheile fallen muß. Denn legt man das willkürliche Coordinatensystem so, daß alle diese Schwerpunkte auf die positive Seite der Achsen desselben zu liegen kommen, daß also alle x, y und z positiv sind, so leuchtet ein, daß $\Sigma . Px$ größer sein wird, als $x_0 \Sigma . P$ und kleiner als $X \Sigma . P$, wenn x_0 den kleinsten, X den größten Werth von x bezeichnet, daß folglich

$$\mathfrak{X} > x_0 \quad \text{und} \quad < X$$

sein muß. Dasselbe gilt natürlich auch für $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$.

Die vorhergehenden Ausdrücke und Folgerungen behalten ihre Gültigkeit, wie auch die Anordnung des Systems beschaffen sein mag, wenn nur alle Körper unter sich in fester Verbindung stehen, also auch dann noch, wenn sie, in stetige Berührung gekommen, als Theile eines und desselben Körpers betrachtet werden können. Sie finden daher häufig in solchen Fällen Anwendung, wo man die Schwerpunkte einzelner Theile eines Körpers kennt und den des ganzen Körpers daraus bestimmen will, oder wo dieser letztere und die Schwerpunkte von einem oder mehreren Theilen gegeben sind, und der Schwerpunkt eines andern Theiles damit bestimmt werden soll.

§. 21.

In dieser Weise können jene Ausdrücke aber nicht mehr angewendet werden, wenn das zu untersuchende System von materiellen Punkten ein stetig zusammenhängendes, und von demselben nichts weiter gegeben ist, als die geometrische Form seiner Begrenzung und das Gesetz, nach welchem sich seine Dichte von einem Punkte zum andern ändert, und doch sieht man ein, daß durch diese beiden Gegebenen die Masse und ihre Vertheilung im Körper, folglich auch das Gewicht und dessen Vertheilung und damit die Lage des Schwerpunktes bestimmt ist, daß diese Lage also auch aus jenen Gegebenen muß abgeleitet werden können.

Bevor wir jedoch in diese Untersuchung eingehen, ist es nothwendig, uns über einen wichtigen Unterschied klar zu machen, welcher zwischen unserer physikalischen Vorstellung von der Bildung eines Körpers oder Systems von materiellen Punkten und zwischen unserer mathematischen Vorstellungsweise darüber besteht. Nach der erstern Vorstellung denken wir uns, wie in der Einleitung erläutert wurde, die Körper aus einzelnen materiellen Punkten zusammengesetzt, welche sehr klein sind (doch nicht, wie man sich oft ausdrückt, unendlich klein), über deren Größe und Ausdehnung wir aber nicht das Geringste wissen, die wir also auch nicht in Rechnung nehmen können; dazu kommt noch, daß diese materiellen Punkte den Raum nicht einmal stetig ausfüllen, sondern sich alle in sehr kleinen gegenseitigen Entfernungen halten, die wir ebenfalls nicht kennen, weßwegen es denn auch für uns rein unmöglich ist, die Masse und das Gewicht eines Körpers dieser Vorstellung gemäß und mittels derselben zu bestimmen. Wir nehmen daher bei der Berechnung dieser Größen von jener physikalischen Vorstellungsweise gänzlich Umgang und stellen uns einen physischen Körper gerade so wie den geometrischen Raum, welchen seine Begrenzungen einschließen, als ein stetig zusammenhängendes Ganze vor; die Punkte, welche wir innerhalb desselben durch Coordinaten bestimmen, sind dann rein geometrische Punkte ohne alle Ausdehnung, von welchen man nicht sagen kann, daß sie eine Masse, ein Gewicht, u. s. f., besitzen, ebensowenig als man von Fläche und Rauminhalt eines geometrischen Punktes reden kann. Es kann folglich auch von einer physischen Dichte in einem solchen Punkte nicht mehr die Rede sein, da diese, wie im ersten Buche (§. 45) erörtert worden ist, das Verhältniß eines bestimmten Rauminhaltes zu der darin enthaltenen Stoffmenge ausdrückt. Man bildet sich deßhalb ebenso einen mathematischen Begriff für die Dichte, indem man sich den Körper in beliebig viele kleine Theile zerlegt vorstellt, die Verhältnisse zwischen Masse und Volumen dieser einzelnen Theile berechnet denkt, diese Verhältnisse als die Dichten für die Mittelpunkte der genannten Theilchen aufstellt und einen analytischen Ausdruck sucht oder als gefunden annimmt, welcher alle diese Dichten nach der Lage jener Mittelpunkte durch ein mathematisches Gesetz vereinigt, so daß nach demselben die Dichte für einen jeden solchen Punkt berechnet werden kann. Dieser analytische Ausdruck wird nun die Dichte als eine stetig veränderliche Größe und als eine Function anderer stetig veränderlicher Größen darstellen; er wird für jeden geometrischen Punkt des Körpers einen bestimmten Werth geben, und dieser Werth wird nun die **geometrische Dichte** für jenen Punkt vorstellen.

Diese stetig veränderliche, geometrische Dichte ist nun nicht mehr das Verhältniß einer bestimmten abgegrenzten Stoffmenge zu dem von ihr erfüllten Raume; sie ist vielmehr das Aenderungsgesetz einer solchen Stoffmenge in Bezug auf die Aenderung des Raumes, wie sich durch folgende Betrachtung leicht ergibt.

Denken wir uns irgend ein stetiges System von materiellen Punkten bis zu einem bestimmten geometrischen Punkte im Innern desselben abgegrenzt; bezeichnen wir das Volumen dieses begrenzten Theiles mit V, die darin enthaltene Masse mit M und die geometrische Dichte in dem betreffenden Grenzpunkte mit q. Lassen wir nun das Volumen V unter irgend einer Form um einen kleinen Raum $\varDelta V$ wachsen, in welchem die Dichte den größten Werth $q + \varDelta' q$ und den kleinsten Werth $q - \varDelta'' q$ erreichen soll, so wird zu der Masse M noch ein neuer Theil $\varDelta M$ hinzukommen, welcher jedenfalls größer ist, als der, den derselbe Raum fassen würde, wenn die Dichte durchaus constant und der kleinsten Dichte $q - \varDelta'' q$ in diesem kleinen Raume gleich wäre, der also durch das Product:

$$\varDelta V (q - \varDelta'' q)$$

gemessen würde. Offenbar muß die Stoffmenge $\varDelta M$ aber auch kleiner sein, als diejenige Masse, welche der Raum $\varDelta V$ fassen würde, wenn die Dichte überall der größten Dichte $q + \varDelta' q$ gleich wäre, und welche durch das Product:

$$\varDelta V (q + \varDelta' q)$$

gemessen wird. Man hat demnach die beiden Ungleichungen:

$$\varDelta M > \varDelta V (q - \varDelta'' q) \quad \text{und} \quad < \varDelta V (q + \varDelta' q) ,$$

aus denen man leicht die Gleichung zieht:

$$\varDelta M = \varDelta V [q + \alpha (\varDelta' q - \varDelta'' q)] ,$$

wenn man unter α einen Zahlenwerth zwischen 0 und 1 versteht, und leitet daraus das Verhältniß ab:

$$\frac{\varDelta M}{\varDelta V} = q + \alpha (\varDelta' q - \varDelta'' q) . \qquad \text{(a.}$$

Gehen wir nun wieder zur ursprünglichen Begrenzung und in den gewählten geometrischen Punkt zurück, wo die Größen $\varDelta M$, $\varDelta V$, $\varDelta' q$, $\varDelta'' q$ einzeln für sich Null werden, das Verhältniß $\frac{\varDelta M}{\varDelta V}$ dagegen seinen

und das Product gq ist nun auch das Maaß für das Gewicht der Volumen-Einheit des betreffenden Stoffes.

§. 22.

Um nun ebenso die Beziehungen zu erhalten, welche zwischen der Gestalt und Dichte eines Körpers und der Lage seines Schwerpunktes bestehen, sei P in Function der Coordinaten x, y, z das Gewicht eines Körpertheiles, welcher auf der einen Seite durch drei zu den Coordinaten-Ebenen parallele und von diesen um die Abstände x, y, z entfernte Ebenen begrenzt wird, und $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ seien die Coordinaten seines Schwerpunktes. Während nun y und z unverändert bleiben, wachse der Abstand x der zur Ebene der yz parallelen Grenzebene um Δx und in Folge dessen das Gewicht P um $\Delta_x P$, indem man mit $\Delta_x P$ andeutet, daß dieser Zuwachs nur von der Veränderung von x herrührt. Der Körper wird dadurch einen neuen Theil erhalten, dessen Schwerpunkt nach §. 20 in das Innere desselben fällt, weßhalb die Entfernung x' dieses Punktes von der Ebene der yz, welche größer ist als x und kleiner als $x + \Delta x$ gleich $x + \alpha \Delta x$ gesetzt werden kann, wenn α einen Zahlenwerth zwischen 0 und 1 bezeichnet. Mit diesen Werthen findet man zur Bestimmung der Abscisse $\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}$ des Schwerpunktes beider Körpertheile zusammen nach den Gleichungen (12) den Ausdruck:

$$\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X} = \frac{P\mathbf{X} + \Delta_x P\,(x + \alpha \Delta x)}{P + \Delta_x P}$$

und daraus durch Reduction:

$$\mathbf{X}\Delta_x P + P\Delta\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}\Delta_x P = x\Delta_x P + \alpha\Delta x\Delta_x P \quad .$$

Diese Gleichung gibt ferner:

$$\mathbf{X}\frac{\Delta_x P}{\Delta x} + P\frac{\Delta\mathbf{X}}{\Delta x} + \Delta_x P\frac{\Delta\mathbf{X}}{\Delta x} = x\frac{\Delta_x P}{\Delta x} + \alpha\Delta_x P \quad .$$

Geht man dann wieder zu der früheren Grenze des Körpers zurück, wodurch Δx Null wird, so hat man auch $\Delta_x P = 0$ und umsomehr $\alpha\Delta_x P = 0$ und $\frac{\Delta\mathbf{X}}{\Delta x}\Delta_x P = 0$; die Verhältnisse $\frac{\Delta_x P}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta\mathbf{X}}{\Delta x}$ erhalten ihre Anfangswerthe: $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{d\mathbf{X}}{dx}$, und man hat dadurch:

$$P\frac{d\mathbf{X}}{dx} + \mathbf{X}\frac{dP}{dx} = x\frac{dP}{dx} \,,$$

oder in einfacherer Form:

$$\frac{d.P\mathfrak{X}}{dx} = x\frac{dP}{dx}.$$

Verfährt man dann ebenso in Bezug auf die beiden andern den Ebenen der xz und xy parallelen Grenzen des Körpers, so erhält man die drei Gleichungen:

$$\frac{d.P\mathfrak{X}}{dx} = x\frac{dP}{dx}, \quad \frac{d.P\mathfrak{Y}}{dy} = y\frac{dP}{dy}, \quad \frac{d.P\mathfrak{Z}}{dz} = z\frac{dP}{dz}, \quad (14.$$

welche die verlangten Beziehungen zwischen der Lage des Schwerpunktes und dem Gewichte eines gegebenen Körpers in Function der Coordinaten der Begrenzung, worin offenbar Form und Dichte enthalten ist, ausdrücken; sie geben die **Aenderungsgesetze der Momente** $P\mathfrak{X}$, $P\mathfrak{Y}$, $P\mathfrak{Z}$ in Bezug auf die Aenderung der Coordinaten, d. h. sie zeigen, wie sich diese Momente ändern wollen, wenn man die entsprechende Grenze des Körpers erweitert, und bieten uns die Mittel, den Schwerpunkt eines Körpers aus seiner Gestalt und seiner Dichte durch die Integralrechnung zu finden.

Wir haben nämlich oben gesehen, daß

$$\varDelta P = \int dx.\int dy.\int dz.gq = \int dx.\int dy.\int dz.p,$$

wenn man das Aenderungsgesetz gq des Gewichtes oder das geometrische spezifische Gewicht in dem Punkte xyz mit p bezeichnet. Daraus folgt zunächst, weil hier x, y, z ganz unabhängig sind, und deßhalb die Ordnung in der Aufeinanderfolge der Integrationen willkürlich ist:

$$\frac{dP}{dx} = \int dy.\int dz.p, \quad \frac{dP}{dy} = \int dx.\int dz.p, \quad \frac{dP}{dz} = \int dx.\int dy.p,$$

und damit ergibt sich zufolge der Gleichungen (14):

$$\varDelta.P\mathfrak{X} = \int dx.x\frac{dP}{dx} = \int dx.x\int dy.\int dz.p = \int dx.\int dy.\int dz.px,$$

$$\varDelta.P\mathfrak{Y} = \int dy.y\frac{dP}{dy} = \int dy.y\int dx.\int dz.p = \int dx.\int dy.\int dz.py,$$

$$\varDelta.P\mathfrak{Z} = \int dz.z\frac{dP}{dz} = \int dz.z\int dx.\int dy.p = \int dx.\int dy.\int dz.pz.$$

Werden also diese Integralien zwischen den entsprechenden Grenzen, die wir mit X und x_0 für x, Y und y_0 für y, Z und z_0 für z bezeichnen

wollen, genommen, so daß sie in bestimmte übergehen, so erhalten wir zur unmittelbaren Bestimmung des Schwerpunktes die vier Gleichungen:

$$15.)\left\{\begin{array}{c} P = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . p \,, \\ P\mathbf{X} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . px \,, \quad P\mathbf{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . py \,, \\ P\mathbf{Z} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . pz \end{array}\right.$$

und ziehen daraus

$$\mathbf{X} = \frac{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{x_0}^{Z} dz . px}{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . p} \,, \qquad \mathbf{Y} = \frac{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . py}{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . p} \,,$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . pz}{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . p}$$

als Werthe der drei Coordinaten dieses Punktes.

In den vorhergehenden Ausdrücken sowie in den Gleichungen (12) kann man aber auch wieder P durch Mg, p durch gq ersetzen, wo dann M wieder die Masse des ganzen Körpers und q die veränderliche Dichte in Function der Coordinaten vorstellt, und findet dadurch die Lage des Schwerpunktes unabhängig von der Constanten g; denn man hat dann einerseits für ein System ohne stetigen Zusammenhang:

$$16^a.)\left\{\begin{array}{c} M = \Sigma . m \,, \\ M\mathbf{X} = \Sigma . mx \,, \quad M\mathbf{Y} = \Sigma . my \,, \quad M\mathbf{Z} = \Sigma . mz \,; \end{array}\right.$$

und auf der andern Seite für ein stetig zusammenhängendes System:

$$\left.\begin{array}{c}
M = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . q \, , \\
M\mathbf{X} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . qx \, , \quad M\mathbf{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . qy \, , \\
M\mathbf{Z} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{z_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . qz \, .
\end{array}\right\} (16^{b}.$$

Die Lage des Schwerpunktes in einem Körper oder überhaupt in einem festen System von materiellen Punkten ist demnach gänzlich unabhängig von der Intensität der Schwere; sie ist dieselbe, ob sich das System am Pol oder am Aequator, in der Nähe der Erde oder in sehr großer Entfernung von ihr befindet, und hängt blos von der Vertheilung der Masse in demselben ab, weßhalb der Schwerpunkt im Allgemeinen richtiger: Mittelpunkt der Masse eines Körpers oder festen Systems genannt wird.

Für stetig zusammenhängende Systeme von durchaus gleicher Dichte (homogene Körper) ist p und q constant, und man findet für diesen Fall:

$$\mathbf{X} = \frac{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . x}{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . 1} \, , \qquad \mathbf{Y} = \frac{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . y}{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . 1} \, ,$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . z}{\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . 1} \, ;$$

der durch diese Gleichungen bestimmte Punkt wird gewöhnlich Schwerpunkt des Volumens genannt, obgleich dieses als rein geometrische Abgrenzung des Raumes keine Masse und kein Gewicht hat. Denn da

$$\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . 1 = V$$

ist, so nehmen die vorhergehenden Gleichungen auch die Formen:

$$17.)\quad \left\{\begin{aligned} &V\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . x \,, \quad V\mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . y \,, \\ &\qquad\qquad V\mathfrak{Z} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . z \end{aligned}\right.$$

an, welche die obige Benennung rechtfertigen mögen.

§. 23.

Man geht selbst noch weiter und bestimmt den Schwerpunkt einer Fläche, worunter man sich zwar eine materielle Fläche vorstellen kann, d. h. einen Körper, dessen zur Oberfläche normale Ausdehnung oder Dicke in allen Punkten dieselbe und im Verhältnisse zu den andern Ausdehnungen sehr klein, und dessen Dichte constant ist, worunter man sich aber auch eine geometrische Fläche denken kann, wenn man annimmt, daß an den Schwerpunkten ihrer beliebig kleinen Theile parallele Kräfte angreifen, deren Intensitäten den Oberflächen dieser Theile proportional sind. Bezeichnet man nun für eine solche Fläche mit O den Flächeninhalt eines Theiles derselben, welcher von zwei, den Coordinaten-Ebenen der xz und yz parallelen und von diesen um y und x entfernten Ebenen begrenzt wird, mit P die proportionale Kraft oder das Gewicht dieses Theiles und mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Coordinaten seines Schwerpunktes, alle diese Größen als Functionen der Veränderlichen x und y genommen, so hat man zuerst die Ausdrücke:

$$\varDelta O = \int dx . \int dy . \frac{d^2 O}{dx\, dy} \,, \quad \varDelta P = p \varDelta O = p \int dx . \int dy . \frac{d^2 O}{dx\, dy} \,,$$

in deren letzteren das Aenderungsgesetz p auch das Gewicht der Flächeneinheit vorstellt. Läßt man dann einmal x wachsen, während y unverändert bleibt, und darauf y, während x seinen Werth behält, und bestimmt die Coordinaten $\mathfrak{X} + \varDelta\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y} + \varDelta\mathfrak{Y}$ des Schwerpunktes der vergrößerten Fläche, so findet man, wie oben, die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d . P\mathfrak{X}}{dx} = x \frac{dP}{dx} \,, \qquad \frac{d . P\mathfrak{Y}}{dy} = y \frac{dP}{dy} \,,$$

und da auch aus dem Vorhergehenden

$$\frac{dP}{dx} = p\int dy.\frac{d^2O}{dxdy} \quad , \quad \frac{dP}{dy} = p\int dx.\frac{d^2O}{dxdy}$$

gezogen wird, so folgt

$$\Delta.P\mathfrak{X} = p\int dx.\int dy.x\frac{d^2O}{dxdy} \quad , \quad \Delta.P\mathfrak{Y} = p\int dx.\int dy.y\frac{d^2O}{dxdy}.$$

Die Ordinate $\mathfrak{Z}$ ist aber nun eine Function von x und y, gegeben durch die Gleichung der Fläche: $F(x, y, z) = 0$ oder $z = f(x, y)$.

Wächst daher x um Δx, so wird nicht nur die Fläche O um $\Delta_x O$, ihr Gewicht um $\Delta_x P$, sondern auch z um $\Delta_x z$ zunehmen, und die Ordinate des Schwerpunktes der vergrößerten Fläche $O + \Delta_x O$ wird $\mathfrak{Z} + \Delta_x \mathfrak{Z}$ werden; der Schwerpunkt der Fläche $\Delta_x O$ liegt aber nicht mehr zwischen z und $z + \Delta_x z$, und es läßt sich aus dieser Aenderung das Aenderungsgesetz für die Lage des Schwerpunktes in Bezug auf die Ebene der xy nicht mehr ableiten; man weiß nur, daß wenn z' den unbekannten Abstand des Schwerpunktes der Fläche $\Delta_x O$ von der Ebene der xy vorstellt, die dritte der Gleichungen (12) wird

$$(P + \Delta_x P)(\mathfrak{Z} + \Delta_x \mathfrak{Z}) = P\mathfrak{Z} + z'\Delta_x P \ .$$

Ebenso findet man, wenn y allein um Δy wächst, und z'' die Entfernung des Schwerpunktes der dadurch hinzukommenden Fläche $\Delta_y O$ von der Ebene der xy bezeichnet, den Ausdruck:

$$(P + \Delta_y P)(\mathfrak{Z} + \Delta_y \mathfrak{Z}) = P\mathfrak{Z} + z''\Delta_y P \ .$$

Läßt man nun die Veränderlichen x und y gleichzeitig wachsen, die eine um Δx, die andere um Δy, so erhält die Ordinate z drei Vergrößerungen: $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, $\Delta_y \Delta_x z$, und die Ordinate des Schwerpunktes der vergrößerten Fläche: $O + \Delta_x O + \Delta_y O + \Delta_x \Delta_y O$ wird ebenso $\mathfrak{Z} + \Delta_x \mathfrak{Z} + \Delta_y \mathfrak{Z} + \Delta_x \Delta_y \mathfrak{Z}$. Man wird ferner einsehen, daß die Ordinate des Schwerpunktes des dritten neuen Theiles $\Delta_x \Delta_y O$ der Fläche, welcher durch die gleichzeitige Vermehrung von x und y hinzukommt, wieder zwischen z und $z + \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta_x \Delta_y z$ liegt, seine Ordinate also

$$z + \gamma(\Delta_x z + \Delta_y z + \Delta_x \Delta_y z)$$

sein wird, wenn γ einen Zahlenwerth zwischen 0 und 1 vorstellt. Die dritte der Gleichungen (12) gibt demnach für die neue vergrößerte Fläche

$$(P+\Delta_x P+\Delta_y P+\Delta_x\Delta_y P)(\mathfrak{z}+\Delta_x\mathfrak{z}+\Delta_y\mathfrak{z}+\Delta_x\Delta_y\mathfrak{z})$$
$$=P\mathfrak{z}+z'\Delta_x P+z''\Delta_y P+\Delta_x\Delta_y P(z+\gamma\Delta_x z+\gamma\Delta_y z+\gamma\Delta_x\Delta_y z),$$

und wenn man diesen Ausdruck entwickelt und die beiden vorhergehenden Gleichungen davon abzieht, so bleibt noch die Gleichung:

$$P\Delta_x\Delta_y\mathfrak{z}+\Delta_x P.\Delta_y\mathfrak{z}+\Delta_y P.\Delta_x\mathfrak{z}+\mathfrak{z}\Delta_x\Delta_y P+\Delta_x\Delta_y P(\Delta_x\mathfrak{z}+\Delta_y\mathfrak{z})$$
$$+\Delta_x\Delta_y\mathfrak{z}(\Delta_x P+\Delta_y P)+\Delta_x\Delta_y P.\Delta_x\Delta_y\mathfrak{z}$$
$$=\Delta_x\Delta_y P(z+\gamma\Delta_x z+\gamma\Delta_y z+\gamma\Delta_x\Delta_y z).$$

Nimmt man nun die Verhältnisse aller Glieder zu dem Producte $\Delta x\,\Delta y$ der beiden unabhängigen Vergrößerungen und läßt zuerst wieder Δy Null werden, so erhält man

$$P\frac{d.\frac{\Delta_x\mathfrak{z}}{\Delta x}}{dy}+\frac{\Delta_x P}{\Delta x}\frac{d\mathfrak{z}}{dy}+\frac{\Delta_x\mathfrak{z}}{\Delta x}\frac{dP}{dy}+\mathfrak{z}\frac{d.\frac{\Delta_x P}{\Delta x}}{dy}+\frac{\Delta_x\mathfrak{z}}{\Delta x}\frac{d.\Delta_x P}{dy}$$
$$+\frac{d.\frac{\Delta_x\mathfrak{z}}{\Delta x}}{dy}\Delta_x P=\frac{d.\frac{\Delta_x P}{\Delta x}}{dy}(z+\gamma\Delta_x z),$$

oder in anderer Form:

$$\frac{d.P\frac{\Delta_x\mathfrak{z}}{\Delta x}}{dy}+\frac{d.\mathfrak{z}\frac{\Delta_x P}{\Delta x}}{dy}+\frac{d.\Delta_x P\frac{\Delta_x\mathfrak{z}}{\Delta x}}{dy}=\frac{d.\frac{\Delta_x P}{\Delta x}}{dy}(z+\gamma\Delta_x z).$$

Wird dann auch Δx Null, so kommt dieser Ausdruck auf:

$$\frac{d.P\frac{d\mathfrak{z}}{dx}}{dy}+\frac{d.\mathfrak{z}\frac{dP}{dx}}{dy}=z\frac{d.\frac{dP}{dx}}{dy}\quad\text{oder}\quad\frac{d^2.P\mathfrak{z}}{dx\,dy}=z\frac{d^2P}{dx\,dy}$$

zurück, und man findet dadurch und mit dem Aenderungsgesetze

$$\frac{d^2P}{dx\,dy}=p\frac{d^2O}{dx\,dy},$$

welches sich aus dem obigen Werthe von ΔP ergibt, das unbestimmte Integral:

$$\Delta.P\mathfrak{z}=p\int dx.\int dy.z\frac{d^2O}{dx\,dy}.$$

Werden endlich die vorhergehenden Integralien in Bezug auf x und y

zwischen den entsprechenden Grenzen genommen, so dienen die so bestimmten Integrale:

$$P = p\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \frac{d^2O}{dx\,dy},$$

$$P\mathfrak{X} = p\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x\frac{d^2O}{dx\,dy}, \quad P\mathfrak{Y} = p\int_{y_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . y\frac{d^2O}{dx\,dy},$$

$$P\mathfrak{Z} = p\int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . z\frac{d^2O}{dx\,dy},$$

oder die einfacheren:

$$\left.\begin{array}{c} O = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{x_0}^{Y} dy . \frac{d^2O}{dx\,dy}, \\ O\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x\frac{d^2O}{dx\,dy}, \quad O\mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . y\frac{d^2O}{dx\,dy}, \\ O\mathfrak{Z} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . z\frac{d^2O}{dx\,dy} \end{array}\right\} (18.$$

zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des Schwerpunktes der gegebenen Fläche, dessen Lage, wie man sieht, von dem constanten Factor p unabhängig ist.

§. 24.

Endlich kann man diese Betrachtungen auch auf Linien ausdehnen und entweder den Schwerpunkt einer materiellen Linie bestimmen, d. h. eines Körpers, an welchem zwei Ausdehnungen durchaus gleich und im Verhältniß zur dritten sehr klein sind, oder den Mittelpunkt paralleler Kräfte, deren Angriffspunkte alle in einer geometrischen Linie liegen, und deren Intensitäten den anliegenden Theilen dieser Linie proportional sind. Im ersten Falle seien s die Länge eines Theiles dieser Linie, welcher von einer zur Achse der x senkrechten Ebene in der Entfernung x vom Anfangspunkte begrenzt wird, P dessen Gewicht und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Coordinaten seines Schwerpunktes, alle diese Größen als Functionen der Veränderlichen x genommen, da die Veränderlichen y und z durch die Gleichungen der betreffenden Curve:

$$y = f_1(x) \quad , \quad z = f_2(x)$$

selbst von x abhängen. Erleidet daher x eine Aenderung Δx, so ändern sich auch y und z um Δy und Δz, und man findet auf demselben Wege wie in den vorhergehenden Fällen für die Coordinaten: $\mathfrak{X} + \Delta\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y} + \Delta\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z} + \Delta\mathfrak{Z}$ der verlängerten Linie die Ausdrücke:

$$\mathfrak{X} + \Delta\mathfrak{X} = \frac{P\mathfrak{X} + \Delta P(x + \alpha\Delta_x x)}{P + \Delta P},$$

$$\mathfrak{Y} + \Delta\mathfrak{Y} = \frac{P\mathfrak{Y} + \Delta P(y + \beta\Delta_x y)}{P + \Delta P},$$

$$\mathfrak{Z} + \Delta\mathfrak{Z} = \frac{P\mathfrak{Z} + \Delta P(+ z\gamma\Delta_x z)}{P + \Delta P},$$

worin α, β, γ wieder Zahlenwerthe zwischen 0 und 1 bedeuten. Werden diese wieder vereinfacht, mit Δx dividirt, und die Anfangswerthe der sich ergebenden Verhältnisse genommen, so findet man wie früher die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d.P\mathfrak{X}}{dx} = x\frac{dP}{dx}, \quad \frac{d.P\mathfrak{Y}}{dx} = y\frac{dP}{dx}, \quad \frac{d.P\mathfrak{Z}}{dx} = z\frac{dP}{dx}.$$

Es ist ferner, indem man die Dichte unveränderlich voraussetzt und das Gewicht der Längeneinheit mit p bezeichnet:

$$\Delta P = p\Delta s, \quad \frac{dP}{dx} = p\frac{ds}{dx},$$

und zwischen den Grenzen X und x_0 von x hat man:

$$P\mathfrak{X} = p\int_{x_0}^{X} dx.x\frac{ds}{dx}, \quad P\mathfrak{Y} = p\int_{x_0}^{X} dx.y\frac{ds}{dx}, \quad P\mathfrak{Z} = p\int_{x_0}^{X} dx.z\frac{ds}{dx},$$

woraus die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gefunden werden. Diese Größen sind aber wieder unabhängig von p, und man hat deßhalb auch einfacher, indem man

$$\int_{x_0}^{X} dx.\frac{ds}{dx} = L$$

setzt, die Gleichungen:

$$19.)\quad L\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx.x\frac{ds}{dx}, \quad L\mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{X} dx.y\frac{ds}{dx}, \quad L\mathfrak{Z} = \int_{x_0}^{X} dx.z\frac{ds}{dx},$$

welche den Mittelpunkt der parallelen Kräfte an der geometrischen Linie bestimmen. *)

§. 25.

Die Anwendung der in den vorhergehenden §. §. abgeleiteten Formeln zur Bestimmung des Schwerpunktes auf besondere Fälle soll dem folgenden Kapitel vorbehalten bleiben und dann ausführlich besprochen werden; gegenwärtig sollen uns die Gleichungen (11) noch dazu dienen, einige bemerkenswerthe Eigenschaften des Schwerpunktes eines Körpers oder eines Systems von Körpern kennen zu lernen.

Denkt man sich nämlich durch den Schwerpunkt eines festen Systems von Körpern oder materiellen Punkten, deren Gewichte mit p, p', p'', etc. bezeichnet seien, drei rechtwinklige Achsen gelegt und darauf die Coordinaten $x\,y\,z$, $x'\,y'\,z'$, $x''\,y''\,z''$, etc. der Schwerpunkte der einzelnen Körper oder Punkte bezogen, so werden die genannten Gleichungen:

$$\Sigma . px = 0 \quad , \quad \Sigma . py = 0 \quad , \quad \Sigma . pz = 0$$

oder in entwickelter Form:

$$px + p'x' + p''x'' + \text{etc.} = 0 \,,$$
$$py + p'y' + p''y'' + \text{etc.} = 0 \,,$$
$$pz + p'z' + p''z'' + \text{etc.} = 0 \,.$$

Erhebt man nun diese Gleichungen zum Quadrat, nimmt ihre Summe und bezeichnet die Summe: $x^2 + y^2 + z^2$, welche das Quadrat der Entfernung des Schwerpunktes des ersten Körpers von dem Anfang der Coordinaten oder dem Schwerpunkte des ganzen Systems ausdrückt, mit r^2, ebenso $x'^2 + y'^2 + z'^2$ mit r'^2, u. s. f.; ferner die Summe: $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, welche das Quadrat der gegenseitigen Entfernung der Schwerpunkte der beiden ersten Körper des Systems vorstellt, mit ϱ^2, in gleicher Weise die Summen: $(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2$, $(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$ mit ϱ'^2 und ϱ''^2, u. s. f. und beachtet, daß man hat:

---

*) Es ist übrigens in diesem wie in dem vorhergehenden Falle leicht zu sehen, daß wenn p nach einem gewissen Gesetze längs der Fläche oder Curve veränderlich und demnach dort eine Function von x und y, in diesem von x allein sein soll, die Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten **X**, **Y**, **Z** auf demselben Wege gefunden werden und sich von den obigen nur darin unterscheiden, daß das Aenderungsgesetz p als veränderliche Größe unter das Integralzeichen kommt.

$$2(xx'+yy'+zz') = (x^2+y^2+z^2)+(x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$-[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]$$
$$= r^2+r'^2-\varrho^2 ,$$
$$2(xx''+yy''+zz'') = r^2+r''^2-\varrho'^2 ,$$
$$2(x'x''+y'y''+z'z'') = r'^2+r''^2-\varrho''^2 ,$$

u. s. w.,

so findet man

$$p^2r^2+p'^2r'^2+p''^2r''^2+\text{etc.}+pp'(r^2+r'^2-\varrho^2)$$
$$+pp''(r^2+r''^2-\varrho'^2)+p'p''(r'^2+r''^2-\varrho''^2)$$
$$+\text{etc.}=0$$

und demnach in abgekürzter Form:

$$\Sigma.p^2r^2+\Sigma.pp'(r^2+r'^2-\varrho^2)=0 .$$

Der vorhergehende Ausdruck kann aber auch unter die Form:

$$pr^2(p+p'+p''+\text{etc.})+p'r'^2(p+p'+p''+\text{etc.})$$
$$+p''r''^2(p+p'+p''+\text{etc.})$$
$$-(pp'\varrho^2+pp''\varrho'^2+p'p''\varrho''^2+\text{etc.})=0$$

gebracht werden und wird, wenn man

$$p+p'+p''+\text{etc.}=\Sigma.p=P$$

setzt, einfacher

20.) $$P\Sigma.pr^2=\Sigma.pp'\varrho^2 ,$$

unter welcher Form die erste der erwähnten Eigenschaften des Schwerpunktes analytisch ausgesprochen ist.

Wenn alle Körper des Systems an Gewicht gleich sind, so wird $P=np$, und demnach

$$np^2\Sigma.r^2=p^2\Sigma.\varrho^2 \quad \text{oder} \quad \Sigma.\varrho^2=n\Sigma.r^2 ,$$

worin n die Anzahl der Körper des Systems bezeichnet.

Die vorhergehende Eigenschaft ist indessen nur ein besonderer Fall einer allgemeineren Beziehung zwischen den Abständen des Schwerpunktes des ganzen Systems und der Schwerpunkte der einzelnen Körper von einem beliebig gewählten Coordinaten-Anfang und den gegenseitigen Abständen dieser letztern unter sich. Denn behält man die vorhergehenden Bezeichnungen auch für das neue Coordinatensystem bei und nennt die Coordinaten des Schwerpunktes vom ganzen System in Bezug auf dasselbe **X**, **Y**, **Z**, so werden die Gleichungen (10):

$$PX = \Sigma . px \quad , \quad PY = \Sigma . py \quad , \quad PZ = \Sigma . pz ;$$

werden diese dann wieder zur zweiten Potenz erhoben, die Ergebnisse addirt und dieselben Bezeichnungen für die Ausdrücke $x^2 + y^2 + z^2$, etc., $(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$, etc. angewendet, indem man den Ausdruck: $X^2 + Y^2 + Z^2$ in ähnlicher Weise durch R^2 ersetzt, so ergibt sich mit derselben Beachtung wie vorher:

$$P^2 R^2 = P\Sigma . pr^2 - \Sigma . pp'\varrho^2 .$$

Dieser Gleichung läßt sich dann auch die Form geben:

$$P^2 R^2 + \Sigma . pp'\varrho^2 = P\Sigma . pr^2 , \qquad (21.$$

unter welcher sie zeigt, daß wenn der Schwerpunkt eines Systems von unveränderlicher Form immer in gleicher Entfernung von einem festen Punkte bleibt, die Summe der Producte aus dem Gewichte eines jeden Körpers in das Quadrat der Entfernung seines Schwerpunktes von dem festen Punkte immer denselben Werth behält, wie auch das System seine Lage um den festen Punkt ändern mag. Denn man sieht leicht, daß unter der gemachten Voraussetzung sowohl R als alle ϱ constant sind.

Aus derselben Gleichung geht ferner hervor, daß die genannte Summe den kleinsten Werth erhält, wenn $R = 0$ ist, also wenn der Schwerpunkt des ganzen Systems selbst als Anfangspunkt angenommen wird. Dieser Schwerpunkt besitzt demnach auch die Eigenschaft, daß die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes einzelnen Theiles des Systems in das Quadrat der Entfernung seines Schwerpunktes von jenem Punkte ein Kleinstes ist.

Endlich überzeugt man sich leicht dadurch, daß man alle Glieder der Gleichungen (20) und (21) durch die constante Größe g^2 dividirt, wodurch sie die Formen:

$$M\Sigma . mr^2 = \Sigma . mm'\varrho^2 \qquad (22.$$

und

$$M\Sigma . mr^2 = M^2 R^2 + \Sigma . mm'\varrho^2 \qquad (23.$$

annehmen, daß dieselben Beziehungen auch für den Mittelpunkt der Masse des Systems und die Massen seiner einzelnen Theile gelten, daß also namentlich die Summe: $\Sigma . mr^2$ für jeden Punkt, um welchen sich das System drehen läßt, unveränderlich und für den Schwerpunkt oder Massemittelpunkt des Systems selbst ein Kleinstes ist.

Viertes Kapitel.

Analytische Bestimmung des Schwerpunktes. Anwendung desselben zur Berechnung des Flächen- und Raum-Inhaltes.

I. Schwerpunkt homogener Linien.

§. 26.

Die Coordinaten des Schwerpunktes einer gegebenen Curve werden, wie in §. 24 gezeigt worden ist, durch die Gleichungen:

$$LX = \int_{x_0}^{X} dx \, . \, x \frac{ds}{dx} \quad , \quad LY = \int_{x_0}^{X} dx \, . \, y \frac{ds}{dx} \quad , \quad LZ = \int_{x_0}^{X} dx \, . \, z \frac{ds}{dx}$$

gefunden, nachdem die Länge derselben durch das Integral:

$$L = \int_{x_0}^{X} dx \, . \frac{ds}{dx}$$

bestimmt worden ist. Alle diese Ausdrücke hängen von einfachen Integrationen ab; es soll deßhalb mit der Anwendung dieser Gleichungen begonnen werden, und zwar wollen wir zuerst einige einfache Fälle betrachten, in denen der Bogen s selbst als unabhängige Veränderliche und die Coordinaten x, y, z als Functionen derselben eingeführt werden können.

Ist nämlich in einem solchen Falle s die Länge des Bogens der gegebenen Curve von einem festen Punkte C derselben an gerechnet bis zu einem Punkte M, Fig. 29, dessen Coordinaten x, y, z sind, und bezeichnen S und s_0 die Werthe von s für die Punkte D und B, von denen das Stück BD der Curve, dessen Schwerpunkt man suchen soll, begrenzt wird, so daß man hat:

$$CD = S \quad , \quad CB = s_0 \quad , \quad BD = S - s_0 = L \, ,$$

so werden die Gleichungen (19) durch die Vertauschung der Veränderlichen x und s die einfachere Form annehmen:

$$LX = \int_{s_0}^{S} ds \cdot x \quad , \quad LY = \int_{s_0}^{S} ds \cdot y \quad , \quad LZ = \int_{s_0}^{S} ds \cdot z \, , \quad (24.$$

worin nun x, y und z Functionen von s vorstellen.

Ist z. B. der Schwerpunkt einer Geraden BD, Fig. 30, zu suchen, deren Länge L gegeben ist, welche in einem Punkte B anfängt, dessen Coordinaten a, b, c sind, und die mit den drei Coordinaten-Achsen die Winkel α, β, γ einschließt, so hat man

$$x = a + s\cos\alpha \quad , \quad y = b + s\cos\beta \quad , \quad z = c + s\cos\gamma \, ,$$
$$s_0 = 0 \quad , \quad S = L \, ,$$

und damit folgen die Ausdrücke:

$$LX = \int_0^L ds \cdot (a + s\cos\alpha) \quad , \quad LY = \int_0^L ds \cdot (b + s\cos\beta) \, ,$$
$$LZ = \int_0^L ds \cdot (c + s\cos\gamma) \; ;$$

die Integration gibt daher

$$LX = aL + \frac{1}{2}L^2\cos\alpha \, , \quad LY = bL + \frac{1}{2}L^2\cos\beta \, , \quad LZ = cL + \frac{1}{2}L^2\cos\gamma$$

und damit die Coordinaten:

$$X = a + \frac{1}{2}L\cos\alpha \quad , \quad Y = b + \frac{1}{2}L\cos\beta \quad , \quad Z = c + \frac{1}{2}L\cos\gamma .$$

Diese Werthe zeigen, was ohnehin auf der Hand liegt, daß der Schwerpunkt einer Geraden in ihrer Mitte liegt.

Bezeichnet man daher die Coordinaten des Anfangspunktes einer Geraden mit x_0, y_0, z_0, die des Endpunktes mit x_1, y_1, z_1, so hat man auch

$$X = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \, , \quad Y = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \, , \quad Z = \frac{1}{2}(z_0 + z_1) \, ,$$

und diese Ausdrücke können dazu dienen, den Schwerpunkt von dem Umfange eines beliebigen Vielecks zu bestimmen, welches durch die Coordinaten seiner Eckpunkte gegeben ist. — Werden diese der Reihe nach durch: $x_0\, y_0\, z_0$, $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, etc. bezeichnet, und die Seiten:

$\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, etc.
durch l_1, l_2, etc. ausgedrückt, so hat man einmal für die Coordinaten der Schwerpunkte der einzelnen Seiten die Werthe:

$$\frac{1}{2}(x_0+x_1)\ ,\quad \frac{1}{2}(y_0+y_1)\ ,\quad \frac{1}{2}(z_0+z_1)\ ,$$
$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)\ ,\quad \frac{1}{2}(y_1+y_2)\ ,\quad \frac{1}{2}(z_1+z_2)\ ,$$
$$\frac{1}{2}(x_2+x_3)\ ,\quad \frac{1}{2}(y_2+y_3)\ ,\quad \frac{1}{2}(z_2+z_3)\ ,$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$

und damit folgen für die Coordinaten X, Y, Z des Schwerpunktes vom ganzen Umfange, dessen Länge:

$$l_1+l_2+l_3+\text{etc.}=L$$

sei, die Gleichungen:

$$\begin{cases} 2LX=l_1(x_0+x_1)+l_2(x_1+x_2)+l_3(x_2+x_3)+\text{etc.}\ , \\ 2LY=l_1(y_0+y_1)+l_2(y_1+y_2)+l_3(y_2+y_3)+\text{etc.}\ , \\ 2LZ=l_1(z_0+z_1)+l_2(z_1+z_2)+l_3(z_2+z_3)+\text{etc.}\ . \end{cases}$$

Für ein Dreieck, dessen Ebene die der xy ist, und dessen Seiten mit a, b, c bezeichnet sind, hat man demnach

$$\begin{cases} 2LX=a(x_0+x_1)+b(x_1+x_2)+c(x_2+x_0)\ , \\ 2LY=a(y_0+y_1)+b(y_1+y_2)+c(y_2+y_0)\ , \end{cases}$$

und wenn man einen Eckpunkt desselben als Coordinaten-Anfang und eine der in demselben zusammentreffenden Seiten als Achse der x annimmt, z. B. die Seite c, so wird $x_0=y_0=y_2=0$, $x_2=c$, $y_1=h$, und die vorstehenden Gleichungen werden

$$2LX=(a+b)x_1+c(b+c)\ ,$$
$$2LY=(a+b)h\ ,$$

woraus man zieht:

$$X=\frac{1}{2}x_1\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{1}{2}c\frac{b+c}{a+b+c}\ ,$$

$$Y=\frac{1}{2}h\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{1}{2}h-\frac{\frac{1}{2}ch}{a+b+c}\ .$$

Dieser letztere Werth zeigt, daß der gesuchte Schwerpunkt der Mittelpunkt O des in das Dreieck abc, Fig. 31, beschriebenen Kreises ist, wenn die Seiten dieses Dreiecks die Mittelpunkte der Seiten des gegebenen verbinden und demnach $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ sind; denn die Oberfläche f dieses Dreiecks ist $\frac{1}{8}ch$, für den Halbmesser Od des genannten Kreises hat man demnach

$$Od = \frac{2f}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c} = \frac{\frac{1}{2}ch}{a+b+c} = \frac{1}{2}h - Y \;,$$

und für den Abstand seines Mittelpunktes O von der Grundlinie des gegebenen Dreieckes folgt $\frac{1}{2}h - Od = Y$.

Dasselbe wird sich aber auch ergeben, wenn eine der beiden andern Seiten als Grundlinie angenommen wird, folglich ist der Punkt O der gesuchte Schwerpunkt.

Für das gleichseitige Dreieck wird $a = b = c$, und daher einfach $Y = \frac{1}{3}h$; hier fällt der Mittelpunkt des Dreieckes abc mit dem des hineinbeschriebenen Kreises und dem des gegebenen Dreieckes zusammen.

§. 27.

Wenn die Curve, deren Schwerpunkt bestimmt werden soll, eine ebene Curve ist, so kann man ihre Ebene als die der xy nehmen, wodurch für alle Punkte derselben z und demnach auch Z Null wird. Daraus schließt man, was von selbst einleuchtet, daß der Schwerpunkt in der Ebene der Curve liegt, daß also die Gleichungen:

$$LX = \int_{s_0}^{S} ds\,.\,x \qquad , \qquad LY \int_{s_0}^{S} ds\,.\,y$$

zur Bestimmung desselben hinreichen.

Diese Gleichungen lassen sich in der vorstehenden Form noch auf einen Kreisbogen anwenden, da man bei diesem x und y leicht in Function von s ausdrücken kann. Legt man nämlich den Anfang A der Coordinaten in den Mittelpunkt des Bogens BC, Fig. 32, und die Achse der x durch den einen Endpunkt B desselben, so hat man für einen Punkt M, dessen Coordinaten x und y sind, und wenn r der Halbmesser des Bogens ist,

$$x = r\cos\frac{s}{r} \qquad , \qquad y = r\sin\frac{s}{r} \;,$$

und damit wird einmal

$$LX = \int_{s_0}^{S} ds \,.\, r \cos\frac{s}{r} = r^2 \sin\frac{S}{r} - r^2 \sin\frac{s_0}{r}$$

oder, da $s_0 = 0$, $S = L$ ist

$$LX = r^2 \sin\frac{L}{r} \,.$$

Ferner ergibt sich

$$LY = \int_{0}^{L} ds \,.\, r \sin\frac{s}{r} = r^2 \left(1 - \cos\frac{L}{r}\right)$$

oder auch

$$LY = 2r^2 \sin^2\frac{L}{2r} \,.$$

In vielen Fällen wird die gegebene Curve, wie in dem vorliegenden, aus zwei congruenten Hälften bestehen; es ist dann einfacher, die Achse der x durch die Mitte des Bogens zu legen, weil dann der Schwerpunkt desselben in diese Achse fällt, also nur der Werth von x zu finden ist, und die Gleichung:

$$LX = \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} ds \,.\, x$$

allein für diesen Zweck hinreicht.

Für den Kreisbogen CBC′, Fig. 32, hat man in dieser Weise, da x noch den vorhergehenden Werth behält,

$$LX = \int_{-\frac{1}{2}L}^{+\frac{1}{2}L} ds \,.\, r \cos\frac{s}{r} = r^2 \left(\sin\frac{\frac{1}{2}L}{r} - \sin\frac{-\frac{1}{2}L}{r}\right)$$

oder

$$LX = 2r^2 \sin\frac{L}{2r} \,.$$

Man weiß aber, daß $2r \sin\frac{L}{2r}$ die Länge der Sehne $CC' = a$ des Bogens CBC′ vorstellt, und findet damit durch die vorhergehende Gleichung die Beziehung:

$$LX = ar \,.$$

Der Abstand X des Schwerpunktes eines Kreisbogens von dessen Mittelpunkt steht demnach zu dem Halbmesser in demselben Verhältnisse, wie die Sehne zu dem Bogen.

Zu demselben Ergebniß kann man indessen auch ohne Integralrechnung durch folgende Betrachtung gelangen.

Wie bereits bemerkt wurde, liegt der Schwerpunkt des Bogens **BCD**, Fig. 33, jedenfalls auf dem Halbmesser AC, welcher den Krümmungsmittelpunkt A mit der Mitte C verbindet; seine Entfernung X von A ist aber nothwendig eine Function des Halbmessers r und der Länge des Bogens oder richtiger ausgedrückt der Länge und der Krümmung desselben und demnach, wie die Länge selbst wieder, eine Function des Halbmessers und des halben entsprechenden Winkels α am Mittelpunkt, also

$$X = f(r, \alpha) ,$$

und wegen der Homogeneität

$$X = r f(\alpha) .$$

Es ist aber einleuchtend, daß dieser Schwerpunkt auch auf der Geraden liegen muß, welche die Schwerpunkte der beiden Hälften BC und CD des gegebenen Bogens verbindet, und daß für die Abstände $x_,$ von A dieser letztern auf den Halbmessern AE und AE′ dieselbe Form gilt, die wir für X erhalten haben, wenn man darin $\frac{1}{2}\alpha$ statt α setzt, daß man also auch hat

$$x_, = r f(\frac{1}{2}\alpha) .$$

Ferner geht aus der Figur hervor, daß die Halbmesser AE und AC den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ einschließen, daß also auch

$$X = x_, \cos\frac{1}{2}\alpha = r f(\frac{1}{2}\alpha)\cos\frac{1}{2}\alpha$$

sein wird, woraus sich durch Vergleichung mit dem obigen Werthe von X ergibt:

$$f(\alpha) = f(\frac{1}{2}\alpha)\cos\frac{1}{2}\alpha .$$

Ersetzt man dann in dieser Gleichung nach und nach α durch $\frac{1}{2}\alpha$, dieses durch $\frac{1}{4}\alpha$, u. s. f., so findet man ebenso:

$$f(\frac{1}{2}\alpha) = f.\frac{1}{4}\alpha.\cos\frac{1}{4}\alpha ,$$

$$f(\frac{1}{4}\alpha) = f.\frac{1}{8}\alpha.\cos\frac{1}{8}\alpha ,$$

u. s. f.

und damit

$$f(\alpha) = \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{4}\alpha \cos\frac{1}{8}\alpha \ldots\ldots\ldots \cos\frac{1}{2^n}\alpha\, f(\frac{1}{2^n}\alpha).$$

Die rechte Seite dieses Ausdrucks nähert sich für ein unbegrenzt wachsendes n einem bestimmten Grenzwerthe, da sich die beiden Factoren $\cos\frac{1}{2^n}\alpha$ und $f(\frac{1}{2^n}\alpha)$ immer mehr der Einheit nähern, je größer n wird, je näher also $\frac{1}{2^n}\alpha$ dem Werthe Null kommt; denn wenn sich der Bogen BD auf seinen Mittelpunkt C zusammenzieht, so hat man offenbar $X = r$, $\alpha = 0$, also $f(0) = 1$; es wird demnach

$$f(\alpha) = \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{4}\alpha \cos\frac{1}{8}\alpha \cos\frac{1}{16}\alpha \ldots\ldots = \frac{\sin\alpha}{\alpha},\ ^{*)}$$

also auch

$$X = r\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

was mit dem vorigen Werthe übereinkommt, wenn man Zähler und Nenner mit 2r multiplicirt.

Für den Viertelkreis wird $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$$X = r\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9003\ldots r;$$

für den Halbkreis hat man $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\sin\alpha = 1$ und demnach

$$X = r\frac{2}{\pi} = 0{,}6366\ldots r.$$

---

*) Von dieser Gleichung überzeugt man sich leicht mittels der Beziehung:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = 2^2\sin\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = 2^3\sin\frac{1}{8}\alpha\cos\frac{1}{8}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = \text{etc.},$$

indem man sie durch α dividirt und unter die Form bringt:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2^n}\alpha}{\frac{1}{2^n}\alpha}\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{8}\alpha\ldots\ldots\cos\frac{1}{2^n}\alpha.$$

§. 28.

In den meisten Fällen ist es einfacher den Bogen in Function der Coordinaten auszudrücken; man hat dann allgemein, wenn

$$y = f_1(x) \quad , \quad z = f_2(x)$$

die Gleichungen der gegebenen Curve sind:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

und es werden darnach:

$$\left.\begin{aligned}
L &= \int_{x_0}^{X} dx \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \\
LX &= \int_{x_0}^{X} dx \,.\, x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \\
LY &= \int_{x_0}^{X} dx \,.\, f_1(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \\
LZ &= \int_{x_0}^{X} dx \,.\, f_2(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}
\end{aligned}\right\} \quad (25.$$

die Gleichungen, welche zur Berechnung der Länge der gegebenen Curve und der Coordinaten ihres Schwerpunktes dienen.

Um sich von der Richtigkeit des ersten dieser Ausdrücke, aus welchem die drei folgenden vermöge der Gleichungen (19) hervorgehen, Rechenschaft zu geben, darf man nur beachten, daß sich die Veränderlichen y und z wegen ihrer Abhängigkeit von x für eine Aenderung Δx der letztern ebenfalls und zwar beziehungsweise um Δy und Δz, und der Bogen s um eine entsprechende Größe Δs ändern werden, und es ist leicht zu sehen, daß diese letztere Aenderung oder der Bogen Δs größer sein muß als seine Sehne, aber kleiner als die gebrochene Linie, welche ihn umschließt und die gebildet ist aus dem Stücke der Tangente, dessen Endpunkte denselben Abscissen x und $x + \Delta x$ entsprechen, wie die Endpunkte des Bogens, und aus der Geraden, welche den zweiten Endpunkt dieses Stückes der Tangente mit dem des Bogens Δs verbindet.

Die Tangente an der gegebenen Curve in dem Punkte xyz bildet nun mit der Achse der x einen Winkel l, für welchen man in der Einleitung (§. 26) gefunden hat:

$$\cos l = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

die Länge des betreffenden Stückes der Tangente, dessen Projection in der Achse der x der Aenderung $\varDelta x$ gleich ist, wird daher durch:

$$\frac{\varDelta x}{\cos l} = \varDelta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

ausgedrückt, und die Coordinaten seines zweiten Endpunktes sind:

$$x+\varDelta x \quad , \quad y+\varDelta x\frac{dy}{dx} \quad , \quad z+\varDelta x\frac{dz}{dx}\,.$$

Die Coordinaten des entsprechenden Endpunktes von $\varDelta s$ sind natürlich

$$x+\varDelta x \quad , \quad y+\varDelta y \quad , \quad z+\varDelta z\,,$$

und daraus folgt

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{\left(\varDelta x\frac{dy}{dx}-\varDelta y\right)^2+\left(\varDelta x\frac{dz}{dx}-\varDelta z\right)^2} \\ &=\varDelta x\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}-\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right)^2} \end{aligned}\right.$$

als Länge der Geraden, welche den zweiten Endpunkt des Tangentenstückes mit dem des Bogens verbindet.

Man hat sonach

$$\varDelta s > \sqrt{\varDelta x^2+\varDelta y^2+\varDelta z^2}$$

und

$$\varDelta s < \varDelta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}+\varDelta x\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}-\frac{\varDelta z}{\varDelta x}\right)^2},$$

und wenn man das Verhältniß der Aenderung des Bogens zu der von x nimmt, ebenso

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\,;$$

man kann daher

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}+\beta\sqrt{\left(\frac{dy}{dy}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}-\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

$$+\gamma\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\right]$$

setzen, indem man mit β und γ Zahlengrößen zwischen 0 und 1 bezeichnet. Geht man dann wieder in den Punkt xyz zurück, für welchen die Verhältnisse: $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ ihre Anfangswerthe: $\frac{ds}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ erhalten, so findet man den Ausdruck:

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

für das Aenderungsgesetz der Bogenlänge in Bezug auf x.

Für eine ebene Curve, deren Ebene als die der xy angenommen wird, deren Gleichungen also

$$y = f(x) \quad , \qquad z = 0$$

sind, kommen die Gleichungen (25) auf folgende zurück:

$$\left.\begin{array}{c} L=\int_{x_0}^{X} dx.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,, \\ LX=\int_{x_0}^{X} dx.x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,,\ LY=\int_{x_0}^{X} dx.f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,, \end{array}\right\} (26.$$

von denen nun mehrere Anwendungen folgen sollen.

§. 29.

Als erstes Beispiel diene noch einmal der **Kreis**, dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ist, und für den man hat:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} .$$

Damit ergibt sich zuerst der Ausdruck:

$$L = r\int_{x_0}^{X} dx . \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} ,$$

welcher nur durch Auflösung in eine Reihe integrirt werden kann, dessen Werth aber unter der Form:

$$L = r\varDelta . \text{arc sin} \frac{x}{r}$$

aus den bereits berechneten Sinustabellen und der bekannten Größe des Kreisumfanges gefunden wird. Ferner hat man

$$L\mathfrak{X} = r\int_{x_0}^{X} dx . \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\left(\sqrt{r^2 - x_0^2} - \sqrt{r^2 - X^2}\right) ,$$

also wenn $x_0 = 0$, $X = x$ genommen wird, in welchem Falle der Bogen an der Achse der y anfängt,

$$L\mathfrak{X} = r^2 - r\sqrt{r^2 - x^2} = r(r - y) .$$

Wird dagegen $X = r$, $x_0 = x$ gesetzt, damit der Bogen an der Achse der x endigt, so erhält man

$$L\mathfrak{X} = r\sqrt{r^2 - x^2} = ry .$$

Zur Bestimmung der zweiten Ordinate $\mathfrak{Y}$ hat man nach der letzten der Gleichungen (26) einfach

$$L\mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . r = r(X - x_0)$$

und für dieselben Grenzen wie oben, entweder

$$LY = rx$$

oder

$$LY = r(r-x) .$$

Für den Quadranten werden diese Ausdrücke

$$LX = r^2 = LY ,$$

da für die ersten Grenzen $x=r$, für die zweiten $x=0$ gesetzt werden muß.

§. 30.

Die Gleichung der Parabel auf Achse und Scheitel bezogen:

$$y^2 = 2px$$

gibt die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}, \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2},$$

wenn man y als unabhängige Veränderliche nimmt, wodurch die Ausdrücke für LX und LY sich leichter integriren lassen. Man zieht daraus zuerst:

$$\Delta s = \int dy . \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$$

$$= \frac{1}{2p}\Delta . y\sqrt{p^2+y^2} + \frac{1}{2}p\Delta . \text{logn} . \left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)$$

und erhält damit für ein beliebiges Bogenstück zwischen den Ordinaten Y und y_0 die Länge:

$$L = \frac{1}{2p}\left(Y\sqrt{p^2+Y^2} - y_0\sqrt{p^2+y_0^2}\right) + \frac{1}{2}p\,\text{logn} . \frac{Y+\sqrt{p^2+Y^2}}{y_0+\sqrt{p^2+y_0^2}};$$

für einen Bogen dagegen, der im Scheitel anfängt und mit der Ordinate y endigt, einfacher

$$L = \frac{1}{2}y\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p} + \frac{1}{2}p\,\text{logn} . \frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p} .$$

Zwischen denselben Grenzen: y und 0 hat man ferner

$$L\mathfrak{Y} = \frac{1}{p}\int_0^y dy \, . \, y\sqrt{p^2+y^2} = \frac{1}{3p}[(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3]$$

und

$$L\mathfrak{X} = \frac{1}{p}\int_0^y dy \, . \, x\sqrt{p^2+y^2} = \frac{1}{2p^2}\int_0^y dy \, . \, y^2\sqrt{p^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{2p^2}\left[\frac{1}{4}y(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}p^2\int_0^y dy \, . \sqrt{p^2+y^2}\right],$$

oder da nach dem Werthe von L sich

$$\int_0^y dy \, . \sqrt{p^2+y^2} = pL$$

ergibt,

$$L\mathfrak{X} = \frac{1}{8} \cdot \frac{p^2+y^2}{p^2} y\sqrt{p^2+y^2} - \frac{1}{8}pL \, .$$

Diese Ausdrücke geben die Werthe von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, wenn der von L zuvor berechnet worden ist.

Man kann den vorhergehenden Werthen eine elegantere und zugleich für die Berechnung zweckmäßigere Form geben, wenn man darin für

$$\frac{y}{p} = \frac{dx}{dy} \text{ die Function } \tang \tau$$

einführt, wo dann τ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Endpunkt des betreffenden Bogens mit der Achse der y, oder mit der Tangente im Scheitel einschließt. Man bringt dazu den Werth von L zuerst unter die Form:

$$L = \frac{1}{2}p\left[\frac{y}{p}\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}} + \operatorname{logn}\left(\frac{y}{p}+\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\right)\right]$$

und findet dann

$$L = \frac{1}{2}p[\tang\tau\sec\tau + \operatorname{logn}(\tang\tau + \sec\tau)]$$

$$= \frac{1}{2}p[\tang\tau\sec\tau + \operatorname{logn}\tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau)] \, .$$

Ebenso ergeben sich die Ausdrücke:

$$LX = \frac{1}{8} p^2 \tang \tau \sec^3 \tau - \frac{1}{8} pL \ ,$$

$$LY = \frac{1}{3} p^2 (\sec^3 \tau - 1) \ ,$$

aus welchen wieder X und Y mittels des Werthes von L berechnet werden können.

§. 31.

Aus der Gleichung der Ellipse in Bezug auf Mittelpunkt und Achsen:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

zieht man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \ , \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} \ .$$

Man hat also für einen Bogen, welcher mit x wächst

$$L = \int_{x_0}^{X} dx . \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}} = a \int_{x_0'}^{X'} dx' . \sqrt{\frac{1 - e^2 x'^2}{1 - x'^2}} = a \int_{U}^{u_0} du . \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \ ,$$

indem man, wie in den §.§. 86 und 87 des I. Buches setzt:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2 \ , \quad \frac{x}{a} = x' = \cos u \ .$$

Diese Ausdrücke können nur annäherungsweise durch Entwickelung der Wurzelgröße in eine Reihe integrirt werden, wobei aber darauf zu sehen ist, daß diese möglichst schnell convergirt. Entwickelt man nun den Zähler $\sqrt{1 - e^2 x'^2}$ nach der Binomial-Formel, so erhält man zwischen den Grenzen $X' = x'$, $x_0' = 0$, also für einen Bogen, welcher an dem Scheitel der kleinen Achse anfängt, den Ausdruck:

$$L = a \int_0^{x'} dx' . \frac{1}{\sqrt{1 - x'^2}} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 x'^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x'^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 x'^6 - \text{etc.} \right) ,$$

welcher, wenn die Integration mittels der Reductionsformel:

$$\int_0^{x'} dx' . \frac{x'^{2n}}{\sqrt{1 - x'^2}} = -\frac{1}{2n} x'^{2n-1} \sqrt{1 - x'^2} + \frac{2n-1}{2n} \int_0^{x'} dx' . \frac{x'^{2n-2}}{\sqrt{1 - x'^2}}$$

ausgeführt ist, unter die Form gebracht werden kann:

$$L = a \arcsin x' \left\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 - \text{etc.}\right\}$$
$$+ a\sqrt{1-x'^2}\Big[x'\left\{\left(\frac{1}{2}e\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{2}{3}x'^3\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{2.4}{3.5}x'^5\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \text{etc.}\Big],$$

um das Gesetz für die Bildung der Glieder augenfällig zu machen. Man sieht leicht, daß diese Reihe ziemlich schnell convergirt, wenn e^2 kleiner als $\frac{1}{2}$ oder wenigstens kleiner als $\frac{3}{4}$ ist, daß sie aber für größere Werthe von e, namentlich wenn dieses sehr wenig von 1 verschieden ist, der betreffende Bogen also einer sehr excentrischen Ellipse angehört, nur sehr langsam convergirt und deßhalb nicht mehr zur Berechnung von L dienen kann.

Um daher auch für diesen Fall eine schneller convergirende Reihe zu erhalten, setze man in dem unentwickelten Integral

$$ex' = e\cos u = w\ ,$$

wodurch sich dasselbe unter die Formen:

$$L = a\int_0^w dw.\sqrt{\frac{1-w^2}{e^2-w^2}} = a\int_0^w dw.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-e^2}{1-w^2}}}$$

bringen läßt und entwickele den Nenner in eine Reihe; man erhält so, indem man $1-e^2=\frac{b^2}{a^2}$ durch β^2 ersetzt, den Ausdruck:

$$L = a\int_0^w dw.\left(1+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{1-w^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\beta^4}{(1-w^2)^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\beta^6}{(1-w^2)^3}+\text{etc.}\right)$$

und nach Ausführung der Integration mittels der Formel:

$$\int_0^w dw.\frac{1}{(1-w^2)^n} = \frac{w}{(2n-2)(1-w^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^w dw.\frac{1}{(1-w^2)^{n-1}}$$

ergibt sich der Werth von L unter der Form:

$$L = a\beta^2 \operatorname{logn} \sqrt{\frac{1+ex'}{1-ex'}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\beta^2\right)^2 + \text{etc.} \right\}$$
$$+ aex'\Big[1 + \frac{\beta^2}{1-e^2x'^2}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\beta\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\beta^2\right)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{2}{3}\frac{\beta^2}{(1-e^2x'^2)^2}\left\{\frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\beta^2\right)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \text{etc.}\Big],$$

welche zeigt, daß dieser Ausdruck um so schneller convergirt, je kleiner β, je excentrischer also die Ellipse ist. *)

Zur Bestimmung von Y erhält man ferner mit den obigen Werthen und indem man $a^2 - b^2$ durch c^2 ersetzt, allgemein

$$LY = \int_{x_0}^{X} dx.y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{x_0}^{X} dx.\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2},$$

und zwischen den Grenzen $x_0 = 0$ und $X = x$ wird

$$LY = \frac{bx}{2a^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2} + \frac{a^2b}{2c}\arcsin\frac{cx}{a^2}.$$

Der Werth von LX dagegen läßt sich wieder leichter finden, wenn man y als unabhängige Veränderliche nimmt, wodurch derselbe mit der Beachtung, daß y kleiner wird, wenn der Bogen s wächst, die Form annimmt:

$$LX = \int_{y_0}^{Y} dy.-\frac{a}{b^2}\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2} = \frac{a}{b^2}\int_{Y}^{y_0} dy.\sqrt{b^4 + c^2y^2};$$

für die vorher angenommenen Grenzen $X = x$, $x_0 = 0$ wird $Y = y$ und $y_0 = b$, und man findet dann

$$LX = \frac{a}{b^2}\int_{y}^{b} dy.\sqrt{b^4 + c^2y^2} = \frac{a}{b^2}\left(\frac{1}{2}b^2\sqrt{b^2+c^2} - \frac{1}{2}y\sqrt{b^4+c^2y^2}\right)$$
$$+ \frac{ab^2}{2c}\operatorname{logn}.\frac{bc + b\sqrt{b^2+c^2}}{cy + \sqrt{b^4+c^2y^2}},$$

oder da $b^2 + c^2 = a^2$ ist, einfacher

*) Für $e = 1$, $\beta = 0$ geht der elliptische Bogen in eine Gerade über, und man findet durch den obigen Ausdruck $L = ax' = x$, wie es sein muß.

$$LX = \frac{1}{2} a \left[a - y \frac{\sqrt{b^4 + c^2 y^2}}{b^2} - \frac{b^2}{c} \operatorname{logn} . \frac{cy + \sqrt{b^4 + c^2 y^2}}{b(a+c)} \right].$$

Für den elliptischen Quadranten hat man

$$x = a \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x' = \frac{x}{a} = 1 \,,$$

wodurch sich zuerst

$$\operatorname{arc} \sin 1 = \frac{1}{2} \pi \quad , \quad \sqrt{a^2 - c^2 x^2} = ab$$

ergibt, und dann die Werthe folgen:

$$L = \frac{1}{2} \pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - \text{etc.} \right\}$$

wenn e^2 kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, und

$$\begin{aligned} L = a \beta^2 \operatorname{logn} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} & \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \beta\right)^2 + \frac{5}{6} \left(\frac{1.3}{2.4} \beta^2\right)^2 + \text{etc.} \right\} \\ & + ae \left[1 + \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \beta\right)^2 + \frac{5}{6} \left(\frac{1.3}{2.4} \beta^2\right)^2 + \text{etc.} \right\} \right. \\ & \qquad + \frac{2}{3} \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{5}{6} \left(\frac{1.3}{2.4} \beta^2\right)^2 + \text{etc.} \right\} \\ & \qquad \left. + \text{etc.} \right] \end{aligned}$$

für Werthe von e^2, welche zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegen. Ferner hat man noch

$$LX = \frac{1}{2} a \left(a - \frac{b^2}{c} \operatorname{logn} . \frac{b}{a+c} \right) ,$$

$$LY = \frac{1}{2} b \left(b + \frac{a^2}{c} \operatorname{arc} \sin \frac{c}{a} \right) ,$$

womit die Lösung der Aufgabe erreicht ist.

§. 32.

Eine der beachtungswerthesten Curven für die Mechanik ist, wie das erste Buch schon gezeigt hat, die Cycloide. Sie kann dadurch erzeugt gedacht werden, daß ein Kreis, dessen Halbmesser unveränderlich ist, auf einer Geraden AB, Fig. 34, ohne zu gleiten, fortrollt; bei dieser Bewegung wird ein beliebiger Punkt M der Kreislinie die genannte Curve beschreiben.

Um darnach die Gleichung dieser Linie zu erhalten, nehmen wir die Gerade AB als Achse der x und den Punkt A, in welchem die

Kreislinie mit ihrem Punkte M die Gerade AB berührt hat, als Anfangspunkt, so daß $AP = x$, $PM = y$ ist, und bezeichnen den Winkel MOD mit t; es ist dann

$$x = AP = AD - PD = MD - MN$$
$$= a(t - \sin t)\,,$$
$$y = PM = DN = OD - ON$$
$$= a(1 - \cos t)\,,$$

und man kann demnach die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\}$$

zusammen als Gleichungen der Cycloide betrachten. Will man nur eine Gleichung zwischen x und y erhalten, so muß man t aus denselben eliminiren, wodurch sich der wenig einfache Ausdruck:

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

ergibt. Das Aenderungsgesetz der Coordinaten ist dagegen sehr einfach; denn man hat aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{y} = \pm \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \pm \sqrt{\frac{2a - y}{y}}\,. \qquad \text{(a.}$$

In vielen Fällen ist es aber, wie wir schon im dritten Abschnitte des vorhergehenden Buches gesehen haben, wichtiger und außerdem für die Bestimmung der Länge und der Coordinaten des Schwerpunktes eines Bogenstückes einfacher, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel E verlegt und die Normale EC als Achse der x annimmt; man hat dann $2a - x$ für y und $\pi a + y$ für x und demnach $-\frac{dx}{dy}$ für $\frac{dy}{dx}$ zu setzen und erhält damit das neue Aenderungsgesetz:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2a - x}{x}} = \pm \frac{2a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}\,. \qquad \text{(b.}$$

Daraus folgt dann für einen Bogen, der mit x wächst,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{x}}$$

und

$$L = \int_{x_0}^{X} dx . \sqrt{\frac{2a}{x}} = 2\left(\sqrt{2aX} - \sqrt{2ax_0}\right) ,$$

also für einen Bogen, der im Scheitel E anfängt und mit der Abscisse x endigt, einfach

$$L = 2\sqrt{2ax} .$$

Ferner erhält man zur Bestimmung des Schwerpunktes allgemein

$$L\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx . x\sqrt{\frac{2a}{x}} = \int_{x_0}^{X} dx . \sqrt{2ax} = \frac{2}{3}a\left(X^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

und für die vorigen Grenzen: $X = x$, $x_0 = 0$

$$L\mathfrak{X} = \frac{2}{3}x\sqrt{2ax} = \frac{1}{3}Lx \quad , \qquad \mathfrak{X} = \frac{1}{3}x ;$$

man sieht daraus, daß der Schwerpunkt eines Bogens der Cycloide, welcher den Scheitel der Curve zur Mitte hat, auf der Normalen in diesem Punkte um ein Drittheil seines Pfeiles vom Scheitel entfernt liegt.

Endlich hat man durch theilweise Integration:

$$L\mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . y\sqrt{\frac{2a}{x}} = L(Y - y_0) - 2\int_{x_0}^{X} dx . \sqrt{2ax} . \frac{dy}{dx} ,$$

oder wenn für $\frac{dy}{dx}$ dessen obiger Werth (b) gesetzt und zwischen denselben Grenzen wie vorher integrirt wird, für welche man $Y = y$, $y_0 = 0$ zu setzen hat,

$$L\mathfrak{Y} = Ly - 2\int_{0}^{x} dx . \sqrt{2a(2a-x)} = Ly + \frac{4}{3}\sqrt{2a}\left[(2a-x)^{\frac{3}{2}} - (2a)^{\frac{3}{2}}\right] ,$$

und demnach ergibt sich

$$\mathfrak{Y} = y - \frac{2}{3}\left(2a\sqrt{\frac{2a}{x}} - (2a-x)\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\right) .$$

Für die halbe Cycloide ist $x=2a$, $y=\pi a$, und man findet mit diesen Werthen

$$L=4a\quad,\qquad \mathfrak{X}=\frac{2}{3}a\quad,\qquad \mathfrak{Y}=\frac{1}{3}a(3\pi-4)=1{,}80826\ldots a\,.$$

§. 33.

Als letzte Anwendung der Gleichungen (26) soll noch die Lage des Schwerpunktes von einem Bogen der Kettenlinie untersucht werden. Die Gleichung dieser Curve hat, wie im folgenden Buche gezeigt wird, die Form:

$$y=\frac{1}{2}p\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right),$$

worin e die Basis der natürlichen Logarithmen und p den Parameter der Kettenlinie, d. i. den Abstand ihres Scheitels C, Fig. 35, von der Achse der x bedeutet. Außerdem hat man, wie auch leicht aus dieser Gleichung abzuleiten ist,

$$s=p\frac{dy}{dx}\quad,\qquad L=\frac{1}{2}p\left(e^{\frac{x}{p}}-e^{-\frac{x}{p}}\right),$$

wenn der Bogen vom Scheitel anfängt, also $X=x$, $x_0=0$ ist. Es ergibt sich daraus

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right),$$

und damit erhält man zwischen denselben Grenzen,

$$L\mathfrak{X}=\frac{1}{2}px\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right)-\frac{1}{2}p^2\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right)+p^2$$

oder mit den Werthen von L und y einfacher:

$$L\mathfrak{X}=Lx-py+p^2\quad,\qquad \mathfrak{X}=x-\frac{p}{L}(y-p)\,.$$

Ferner hat man

$$L\mathfrak{Y}=\frac{1}{2}\int_0^x dx.y\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right)=\frac{1}{4}p\int_0^x dx.\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right)^2,$$

woraus nach und nach folgt:

$$LY = \frac{1}{4}p\left[\frac{1}{2}p\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right)\left(e^{\frac{x}{p}}-e^{-\frac{x}{p}}\right)+2x\right],$$

$$LY = \frac{1}{2}Ly+\frac{1}{2}px \quad , \quad Y = \frac{1}{2}y+\frac{p}{2L}x\,.$$

Diese Werthe von X und Y können sehr leicht construirt werden, wenn man die obige Eigenschaft der Kettenlinie: $s = p\frac{dy}{dx}$ und eine andere, wonach auch $y^2 = L^2 + p^2$ ist, zu Hülfe nimmt. Soll nämlich der Schwerpunkt des Bogens BC bestimmt werden, so fällt man die Senkrechte $BP = y$ auf die Achse AX, beschreibt über derselben als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck BPG, dessen eine Kathete $GP = p$ ist, während nach der vorhergehenden Gleichung die andere $BG = L$ sein wird. Durch den Scheitel C zieht man sodann eine Parallele CK zur Achse der x und durch den Durchschnitt K dieser letztern mit der Seite BG zur Achse der y eine Parallele KO; diese Gerade wird durch den Schwerpunkt gehen. Denn wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke BJK und BPG hat man:

$$JK : PG = BJ : BG\,,$$

oder

$$JK = PG\frac{BJ}{BG} = p\frac{y-p}{L}\,,$$

und folglich auch

$$CK = x - p\frac{y-p}{L} = X\,.$$

Um dann Y zu erhalten, zieht man durch die Mitte E von BP eine Senkrechte auf BG und errichtet in der Mitte L von AP eine zweite Senkrechte, welche die erstere in einem Punkte N schneidet, so daß man $LN = Y$ hat, und der Durchschnittspunkt O der Geraden KO und NO der gesuchte Schwerpunkt sein wird. Denn zieht man durch E zu AX die Parallele EF, so ergibt sich aus der letztern Construction vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke EFN und BPG die Proportion:

$$FN : EF = PG : BG$$

und daraus der Werth von FN:

$$FN = EF\frac{PG}{BG} = \frac{1}{2}x\frac{p}{L}\,,$$

woraus weiter folgt:

$$LN = EF + FN = PE + FN = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x\frac{p}{L} = Y\,.$$

Man schließt daraus, daß der Schwerpunkt des Bogens BCD in M auf der Achse der y liegen wird.

§. 34.

Um hier sogleich ein Beispiel für die Berechnung zu geben, sei der Schwerpunkt eines elliptischen Quadranten zu bestimmen, dessen Halbachsen $a = 2^m$, $b = 1^m,60$ sind.

Zuerst hat man

$$c = \sqrt{4 - 2,56} = \sqrt{1,44} = 1^m,20$$

$$e = \frac{1,2}{2} = 0,6 \ , \quad e^2 = 0,36 \ , \quad \frac{1}{4} e^2 = 0,09$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} \cdot e^4 = \frac{3}{16} \cdot 0,09 \cdot 0,36 \qquad = 0,00608$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{15}{36} e^6 = \frac{15}{36} \cdot 0,00608 \cdot 0,36 \qquad = 0,000912$$

$$\frac{5}{256} \cdot \frac{35}{64} e^8 = \frac{35}{64} \cdot 0,000912 \cdot 0,36 \qquad = 0,00018$$

u. s. f.

Damit ergibt sich dann nach dem ersten Werthe von L in §. 31

$$1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \text{etc.} = 1 - (0,09 + 0,0061 + 0,0009 + 0,0002)$$
$$= 1 - 0,0972 = 0,9028 \ ,$$

und

$$L = \pi \cdot 0,9028 \cdot 1^m \ .$$

Ferner ist $a + c = 3,2$, und man hat

$$LX = 1 \left(2 - \frac{(1,6)^2}{1,2} \operatorname{logn} \frac{1,6}{3,2}\right) \ ,$$

$$LY = 0,8 \left(1,6 + \frac{4}{1,2} \arcsin \frac{1,2}{2}\right) \ .$$

Die weitere Rechnung wird dann mit der Beachtung, daß $\operatorname{logn} a = M \log a = 2,30258 \log a$ ist, folgende:

$\log \pi = 0{,}49715$
$\log 0{,}9028 = 9{,}95559$

$\log L = 0{,}45274$
$L = 2^m{,}8362$

d. E. $\log L = 9{,}54726$
$\log L x = 0{,}54141$

$\log x = 0{,}08867$
$x = 1^m{,}2265$

d. E. $\log L = 9{,}54726$
$\log L y = 0{,}47655$

$\log y = 0{,}02381$
$y = 1^m{,}0564$

$\log \frac{1{,}6}{3{,}2} = 9{,}69897 - 10$
$= -0{,}30103$

$\log (0{,}30103) = 9{,}47861$
$\log M = 0{,}36222$
$\log 1{,}6 = 0{,}20412$
$\log 1{,}6 = 0{,}20412$
d. E. $\log 1{,}2 = 9{,}92082$

$\log (1{,}4787) = 0{,}16989$
$L x = 2 + 1{,}4787$
$L x = 3{,}4787$

$\log \frac{1{,}2}{2} = 9{,}77815$
$= \log \sin 36^\circ 52',2$
$= \log \sin 2212',2$

$\log 2212',2 = 3{,}34483$
d. E. $\log 3437{,}7 = 6{,}46373$
$\log 4 = 0{,}60206$
d. E. $\log 1{,}2 = 9{,}92082$

$\log 2{,}1451 = 0{,}33144$
$L y = 0{,}8(1{,}6 + 2{,}1451)$
$L y = 2{,}9961$

Die Ergebnisse sind demnach:

$$L = 2^m{,}8362 \quad , \quad X = 1^m{,}2265 \quad , \quad Y = 1^m{,}0564 \; .$$

II. Schwerpunkt homogener Flächen.

§. 35.

Um die in §. 23 erhaltenen Ausdrücke (18) zur Bestimmung des Schwerpunktes anwenden zu können, muß das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d^2 O}{dx\,dy}$$

der Oberfläche O in Bezug auf die beiden unabhängigen Veränderlichen x und y in Function dieser letztern ausgedrückt werden.

Bleiben wir nun zuerst bei den ebenen Flächen stehen und nehmen deren Ebene als Coordinatenebene der xy an, so haben wir einmal für jeden Werth von x und y

$$z = 0 \quad , \quad \text{also auch} \quad Z = 0 \; ;$$

der Schwerpunkt liegt in der Fläche selbst, und es reichen die drei ersten der Gleichungen (18) zur Bestimmung dieses Punktes hin. Ferner ist leicht zu sehen, daß das obengenannte Aenderungsgesetz in diesem Falle der Einheit gleich ist. Denn die von der Curve MN, Fig. 36, und

den zu den Coordinaten-Achsen parallelen Geraden MG und NG begrenzte Fläche, deren Flächeninhalt O sei, wird um das Flächenstück MGmk wachsen, wenn die Abscisse AP $= x$ um Pp $= \Delta x$ zunimmt, während die Grenze QG unverändert bleibt, und man wird haben:

$$MGmk = \Delta_x O \ ,$$

indem man mit $\Delta_x O$ wieder die durch die alleinige Vergrößerung von x bewirkte Aenderung von O bezeichnet.

Läßt man nun auch AQ $= y$ sich um Qq $= \Delta y$ ändern, so wird die Fläche O auch um das Flächenstück NGnh größer werden oder eine Aenderung $\Delta_y O$ erhalten; es wird aber auch der erste Zuwachs MGmk $= \Delta_x O$ um ein neues Stück Ghkl vermehrt werden, welches mit $\Delta_y . \Delta_x O$ bezeichnet werden muß, und dessen Oberfläche offenbar durch das Product $\Delta x \Delta y$ gemessen wird. Man zieht daraus das Verhältniß:

$$\frac{\Delta_y . \Delta_x O}{\Delta x \Delta y} = \frac{\Delta_y . \dfrac{\Delta_x O}{\Delta x}}{\Delta y} = 1 \ ,$$

dessen Anfangswerth natürlich denselben Werth behält, und wonach man hat:

$$\frac{d . \dfrac{dO}{dx}}{dy} = \frac{d . \dfrac{dO}{dy}}{dx} = \frac{d^2 O}{dx\, dy} = 1 \ ,$$

da man offenbar zu demselben Ergebniß gelangt, wenn man zuerst y und dann x wachsen läßt. Damit haben wir also zur Bestimmung des Schwerpunktes einer ebenen Fläche die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} O &= \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . 1 \ , \\ O\mathfrak{X} &= \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x \quad , \qquad O\mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . y \ . \end{aligned}\right\} \quad (27.$$

Wenn die gegebene Fläche von zwei verschiedenen Curven begrenzt wird, deren Gleichungen:

$$y = f_0(x) \qquad , \qquad y' = F(x')$$

sind, und von zwei zur Achse der y parallelen Geraden, wie in Fig. 37,

so werden die Grenzen Y und y_0 von x abhängig und sind die Werthe von y und y' für denselben Werth von x, also

$$Y = F(x) \quad , \qquad y_0 = f_0(x) \; ;$$

wenn man daher die Gleichungen (27) in Bezug auf y integrirt, so nehmen sie die Form an:

$$28.) \left\{ \begin{array}{c} O = \int_{x_0}^{X} dx.[F(x) - f_0(x)] \; , \quad O\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx.x[F(x) - f_0(x)] \; , \\ O\mathfrak{Y} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} dx.[F^2(x) - f_0^2(x)] \; . \end{array} \right.$$

Dieselbe Form behalten diese Ausdrücke, wenn die beiden begrenzenden Bogen derselben Curve angehören, wie in Fig. 38; die beiden Grenzwerthe Y und y_0 ergeben sich dann gleichzeitig für denselben Werth von x aus der Gleichung dieser Curve unter der Form: $F(x, y) = 0$.

Die Gleichungen (28) werden dagegen viel einfacher, wenn eine der begrenzenden Linien eine Gerade und zugleich die Achse der x ist; man hat dann als Gleichung dieser letztern

$$y_0 = f_0(x) = 0 \; ,$$

und damit ergibt sich

$$O = \int_{x_0}^{X} dx.F(x) \quad , \qquad O\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx.F(x) \; , \quad O\mathfrak{Y} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} dx \, . \, F^2(x)$$

oder, wenn man $F(x)$ nun durch y ersetzt noch einfacher:

$$29.) \quad O = \int_{x_0}^{X} dx.y \quad , \qquad O\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx.xy \; , \qquad O\mathfrak{Y} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} dx.y^2 \; ,$$

unter welcher Form diese Gleichungen gewöhnlich angewendet werden.

§. 36.

Die Formeln (27) können dazu angewendet werden, den Schwerpunkt eines Dreiecks ABC, Fig. 39, zu bestimmen.

Durch die Spitze A dieses Dreiecks, welche als Coordinaten-Anfang genommen wird, ziehe man die Achse AX senkrecht auf die gegenüberliegende Seite BC, deren Länge mit a bezeichnet sei, und setze die

Entfernung AD derselben von der Achse der y gleich h. Die Gleichungen der begrenzenden Geraden AB und AC werden dann die Form haben:

$$y = tx \quad , \quad y' = t'x' \ ,$$

und man hat in die Gleichungen (27) die Werthe einzuführen:

$$F(x) = t'x \quad , \quad f_0(x) = tx \quad , \quad X = h \quad , \quad x_0 = 0 \ .$$

Dadurch ergibt sich zuerst:

$$O = \int_0^h dx.(t'-t)x = \frac{1}{2}(t'-t)h^2 ,$$

oder da $(t'-t)h = BD - CD = a$ ist,

$$O = \frac{1}{2}ah \ .$$

Ferner findet man

$$OX = \int_0^h dx.(t'-t)x^2 = \frac{1}{3}(t'-t)h^3 = \frac{1}{3}ah^2$$

und daraus mit dem Werthe von O

$$X = \frac{2}{3}h \ .$$

Zuletzt wird

$$OY = \int_0^h dx.\frac{1}{2}(t'^2-t^2)x^2 = \frac{1}{6}(t'^2-t^2)h^3 = \frac{1}{3}ah.\frac{1}{2}(t'+t)h ,$$

$$Y = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(t'+t)h = \frac{2}{3}DE \quad \text{oder} \quad Y = \frac{1}{2}(t'+t)X \ .$$

Aus diesen Werthen folgt, daß der **Schwerpunkt O eines Dreiecks auf der Geraden AE liegt, welche die Mitte E der Grundlinie BC mit der Spitze A verbindet und zwar um zwei Drittheile ihrer Länge von A entfernt**; denn es ist offenbar $\frac{1}{2}h(t'+t)$ die Ordinate DE des Mittelpunktes E von BC, also $y = \frac{1}{2}(t'+t)x$ die Gleichung der Geraden AE.

Es dürfte wohl wünschenswerth sein, dieses Ergebniß auch auf einem andern, einfachen Wege, ohne Anwendung der Integralrechnung, aber auch ohne Anwendung der Methode der Theilung in's Unendlich-kleine zu erhalten, und dieser streng richtige Weg ist der folgende.

Sei ABC, Fig. 40, das gegebene Dreieck, dessen Seite AB als Achse der x genommen, dessen Oberfläche mit O und dessen Höhe CD

mit h bezeichnet werden soll. Theilt man dieses Dreieck durch die Geraden ab, ac, bc, welche je zwei der Mittelpunkte a, b, c seiner drei Seiten verbinden, in 4 congruente und dem ganzen ähnliche Dreiecke, so wird jedes von diesen die Oberfläche $\frac{1}{4}$O und die Höhe $\frac{1}{2}$h erhalten; nennt man dann den Abstand des Schwerpunktes eines solchen Dreiecks von der zu AB parallelen Seite y, so hat man gemäß der Gleichung: $PY = \Sigma . py$ den Ausdruck:

$$OY = \Sigma . \frac{1}{4} Oy = \frac{1}{4} Oy + \frac{1}{4} Oy + \frac{1}{4} O\left(\frac{1}{2}h - y\right) + \frac{1}{4} O\left(\frac{1}{2}h + y\right)$$

und zieht daraus

$$Y = \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}y .$$

Es ist aber an und für sich einleuchtend und überdies durch das Gesetz der Homogeneität leicht zu beweisen, daß bei ähnlichen Flächen die Schwerpunkte ähnlich liegen, daß also in unserm Falle $y = \frac{1}{2}Y$ sein muß *); dadurch ergibt sich sogleich aus der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{3}{4}Y = \frac{1}{4}h \quad , \quad Y = \frac{1}{3}h .$$

Was nun für die Seite AB als Grundlinie gilt, ist auch für jede andere richtig; zieht man also in dem Dreieck ABC, Fig. 41, zwei

*) Der Abstand Y ist nothwendig eine Function der drei Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks, und y eine gleiche Function von den Seiten $\frac{1}{2}$a, $\frac{1}{2}$b, $\frac{1}{2}$c eines der kleinen Dreiecke, also

$$Y = f(a, b, c) \quad , \quad y = f\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right) ;$$

daraus kann aber nach §. 46 der Einleitung gezogen werden:

$$Y = a . \varphi(a, b, c) \quad , \quad y = \frac{1}{2}a . \varphi\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right) ,$$

wo dann φ nur eine solche Function sein kann, deren Werth von der Einheit der Länge unabhängig ist und folglich derselbe bleibt, wenn man na, nb, nc statt a, b, c hineinsetzt; man hat also

$$\varphi(a, b, c) = \varphi\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c\right) ,$$

und dadurch

$$y = \frac{1}{2}Y .$$

Gerade ab und cd parallel zu den Seiten AB und BC und so, daß ihre Abstände von denselben einem Drittheil der entsprechenden Höhen gleich sind, so werden sich dieselben im Schwerpunkte O schneiden und, wie leicht zu sehen ist, sich gegenseitig halbiren, woraus sofort folgt, daß dieser Punkt auf der Geraden CD liegt, welche die Mitte D von AB mit der gegenüberliegenden Spitze C verbindet.

§. 37.

Die Lage des Schwerpunktes eines Dreiecks kann auch sehr einfach durch die Coordinaten seiner Eckpunkte ausgedrückt werden. Bezeichnet man diese nämlich mit $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, so findet man für die Coordinaten der Mitte D von BE, Fig. 42, die Werthe:

$$\frac{1}{2}(x_0+x_1) \quad , \quad \frac{1}{2}(y_0+y_1)$$

und damit für die des Punktes O, welcher die Gerade CD so theilt, daß $DO = \frac{1}{2} CO = \frac{1}{3} CD$ wird:

$$X = \frac{1}{2}(x_0+x_1)+\frac{1}{3}[x_2-\frac{1}{2}(x_0+x_1)] = \frac{1}{3}(x_0+x_1+x_2) \; ,$$

$$Y = \frac{1}{2}(y_0+y_1)+\frac{1}{3}[y_2-\frac{1}{2}(y_0+y_1)] = \frac{1}{3}(y_0+y_1+y_2) \; ;$$

man schließt daraus, daß die Coordinaten des Schwerpunktes von einem Dreiecke die arithmetischen Mittel aus den entsprechenden Coordinaten der drei Eckpunkte sind. Wenn ein Eckpunkt der Anfang der Coordinaten ist, z. B. der, dessen Coordinaten $x_0 y_0$ sind, so wird einfacher

$$X = \frac{1}{3}(x_1+x_2) \quad , \quad Y = \frac{1}{3}(y_1+y_2) \; .$$

Mittels dieser Werthe läßt sich nun der Schwerpunkt eines beliebigen ebenen Vieleckes durch die Coordinaten seiner Eckpunkte berechnen, indem man dasselbe vom Anfang der Coordinaten aus, welcher der einfacheren Rechnung wegen am besten in einen jener Eckpunkte verlegt wird, in Dreiecke zerlegt und auf diese die Gleichungen (12) anwendet. Dazu ist aber nothwendig, daß man auch den Flächeninhalt dieser Dreiecke durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte berechnen kann, und dieses geschieht mittels des Ausdrucks:

$$O = \frac{1}{2}[x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)] ,$$

wenn keiner der Eckpunkte im Anfangspunkte liegt; im andern Falle wird z. B. $x_0 = y_0 = 0$, und dann einfacher:

$$O = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) .$$

Diese Ausdrücke lassen sich leicht aus Fig. 42 dadurch ableiten, daß man die Oberfläche des Dreiecks BCE durch die der drei Trapeze EBJH, BCGF und CEHG ausdrückt, den so erhaltenen Ausdruck entwickelt und reduzirt.

Wendet man diese Bemerkungen auf das Fünfeck ABCDE, Fig. 43, an, so erhält man daraus zuerst die Dreiecke ABC, ACD, ADE, und für deren Oberflächen und Schwerpunkte hat man

$$O_1 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2), \quad x' = \frac{1}{3}(x_1 + x_2), \quad y' = \frac{1}{3}(y_1 + y_2),$$

$$O_2 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - y_2 x_3), \quad x'' = \frac{1}{3}(x_2 + x_3), \quad y'' = \frac{1}{3}(y_2 + y_3),$$

$$O_3 = \frac{1}{2}(x_3 y_4 - y_3 x_4), \quad x''' = \frac{1}{3}(x_4 + x_3), \quad y''' = \frac{1}{3}(y_3 + y_4),$$

und für die Coordinaten des Schwerpunktes vom ganzen Fünfeck findet man damit

$$X = \frac{O_1 x' + O_2 x'' + O_3 x'''}{O_1 + O_2 + O_3} , \quad Y = \frac{O_1 y' + O_2 y'' + O_3 y'''}{O_1 + O_2 + O_3} .$$

Man könnte auch den Coordinaten-Anfang in das Innere des Vielecks verlegen; man erhält dann nur eine um zwei größere Anzahl von Dreiecken, die Ausdrücke für den Flächeninhalt und die Coordinaten der Schwerpunkte dieser Dreiecke, so wie für das Vieleck selbst behalten übrigens dieselben Formen, wie in dem vorhergehenden Falle. Ferner ist es nicht schwer, die entsprechenden Ausdrücke für ein Dreieck und darnach für ein ebenes oder nicht ebenes Vieleck in Bezug auf drei Coordinaten-Ebenen abzuleiten; wir werden später darauf zurückkommen, und es mag diese Ableitung einstweilen dem Leser überlassen bleiben.

§. 38.

Der Schwerpunkt von einem Trapez kann mittels des Vorhergehenden auf verschiedene Weise gefunden werden.

Nach den Ergebnissen für das Dreieck liegt er jedenfalls auf der Geraden, welche die Mittelpunkte der beiden parallelen Seiten a und b verbindet. Zerlegt man dann das Trapez ABCD, Fig. 44, dessen Höhe h sei, durch eine Diagonale CD in zwei Dreiecke ABC und BCD, so erhält man für die Oberflächen derselben und für die Abstände y' und y'' ihrer Schwerpunkte von der Seite $AB = a$ die Werthe:

$$O_1 = \frac{1}{2} a h \quad , \quad y' = \frac{1}{3} h \quad , \quad O_2 = \frac{1}{2} b h \quad , \quad y'' = \frac{2}{3} h \, ,$$

und mit diesen wird

$$O Y = O_1 y' + O_2 y'' \, ,$$

$$\frac{1}{2}(a+b) h Y = \frac{1}{6} a h^2 + \frac{2}{6} b h^2 = \frac{1}{6} h^2 (a+2b) \, ,$$

also auch

$$Y = \frac{1}{3} h \frac{a+2b}{a+b} \, ,$$

mit welcher Gleichung die Lage des Schwerpunktes bestimmt ist. Durch Construction kann man diesen Punkt entweder dadurch finden, daß man die Schwerpunkte der beiden Dreiecke durch eine Gerade verbindet, oder nach dem vorhergehenden Werthe von Y dadurch, daß man die Seite a um ein Stück $= b$ und die Seite b nach entgegengesetzter Richtung um ein Stück $= a$ verlängert und die Endpunkte G und H dieser Verlängerungen durch eine Gerade GH verbindet; in beiden Fällen wird die genannte Verbindungslinie die Gerade EF im Schwerpunkte O schneiden. Im ersten Falle ist dies von selbst einleuchtend; im zweiten hat man

$$OF : OE = EG : FH = a + \frac{1}{2} b : \frac{1}{2} a + b \, ,$$

also auch

$$OE : EF = \frac{1}{2} a + b : \frac{3}{2}(a+b) \, ,$$

und daraus ergibt sich wieder

$$OE = \frac{1}{3} EF \frac{a+2b}{a+b} \, ,$$

oder da noch die Proportion:

$$OE : Y = EF : h$$

stattfindet, für Y derselbe Werth wie oben.

Für ein Parallelogramm ist $b = a$, also $Y = \frac{1}{2}h$, wie dies ohnehin einleuchtet, da der Schwerpunkt desselben offenbar im Durchschnitt der beiden Diagonalen liegt.

§. 39.

In den meisten Fällen dienen die Gleichungen (29) zur Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen, die von stetigen Curven begrenzt werden oder von einer solchen Curve und einer oder zwei parallelen Geraden.

So findet man für den Kreis, dessen Mittelpunktsgleichung

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

gibt, und zwar für ein Segment, das von der Achse der x und einer oder zwei zur Achse der y parallelen Geraden begrenzt wird,

$$O = \int_{x_0}^{X} dx . \sqrt{r^2 - x^2} = \overset{X}{\underset{x_0}{\Delta}}, \left(\frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{x}{r}\right)$$

und darnach für die Grenzen: $X = x$, $x_0 = 0$

$$O = \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{x}{r} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{x}{r}\ ;$$

für die Grenzen: $X = r$, $x_0 = x$ dagegen hat man

$$O = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{1}{2}\pi - \arcsin\frac{x}{r}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \arccos\frac{x}{r} - \frac{1}{2}xy\ ,$$

oder wenn man die in §. 27 beim Kreisbogen gebrauchte Bezeichnung einführt, nämlich $r \arccos\frac{x}{r} = L$, $y = a$ und noch $x = h$ setzt,

$$O = \frac{1}{2}(rL - ah)\ .$$

Es ist ferner:

$$OX = \int_{x_0}^{X} dx . x\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(r^2 - x_0^2)^3} - \sqrt{(r^2 - X^2)^3}\right]$$

und dann zwischen denselben Grenzen wie vorher, entweder dem Segment ACDF, Fig. 45, entsprechend ($X = x$, $x_0 = 0$)

$$OX = \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{3}\sqrt{(r^2 - x^2)^3} = \frac{1}{3}(r^3 - y^3),$$

oder dem Segmente BEG ($X = r$, $x_0 = x$)

$$OX = \frac{1}{3}\sqrt{(r^2 - x^2)^3} = \frac{1}{3}y^3,$$

aus welchem letztern Werthe man zieht:

$$X = \frac{y^3}{3O}.$$

Dieser Abstand X gilt offenbar auch noch für das Segment EBE′, dessen Bogen $EBE' = L$ von der Achse der x halbirt wird. Man wird dann $EE' = 2y' = a$ setzen und noch

$$O = \frac{1}{2}(rL - ah)$$

haben; der Werth von X wird dadurch die Form:

$$X = \frac{y^3}{3.\frac{1}{2}O} = \frac{(2y)^3}{12O} = a\frac{a^2}{6(rL - ah)}$$

annehmen, und diese zeigt, daß der Abstand des Schwerpunktes eines Kreisabschnittes vom Mittelpunkte des Kreises sich zur Sehne verhält, wie das Quadrat der Sehne zur zwölffachen Oberfläche des Abschnittes.

Um die Ordinate Y zu berechnen, hat man

$$OY = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{X} dx.(r^2 - x^2) = \frac{1}{2}r^2(X - x_0) - \frac{1}{6}(X^3 - x_0^3)$$

und darnach entweder zwischen den Grenzen $X = x$, $x_0 = 0$ für das Segment ACDF:

$$OY = \frac{1}{6}x(3r^2 - x^2) = \frac{1}{6}x(2r^2 + y^2)$$

oder für das Segment BEG zwischen den Grenzen $X = r$, $x_0 = 0$:

$$OY = \frac{1}{2}r^2(r - x) - \frac{1}{6}(r^3 - x^3) = \frac{1}{6}(r - x)(r^2 - rx + y^2).$$

Im letztern Falle kann man auch $r - x = r - h = h'$, $y = a$ setzen, wodurch sich die Form ergibt:

$$OY = \frac{1}{6}h'(rh' + a^2) \; .$$

Für den Viertelkreis ergibt sich aus diesen Ausdrücken

$$X = Y = \frac{4}{3\pi} . r = 0{,}42441..r \; ,$$

und dieser Werth von X gilt dann auch für den auf der positiven Seite der x liegenden Halbkreis, für welchen $Y = 0$ wird.

§. 40.

Sehr einfach sind die Ergebnisse für ein **Parabelsegment**, welches vom Scheitel anfängt und von der Achse der Curve und einer dazu senkrechten Geraden begrenzt wird. Man hat nämlich:

$$O = \frac{2}{3}xy \quad , \qquad X = \frac{3}{5}x \quad , \qquad Y = \frac{3}{8}y \; ,$$

und es mag genügen, diese Werthe angedeutet zu haben.

Die Gleichung der **Ellipse** auf Achse und Scheitel bezogen, ist:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \; ,$$

und damit werden die Ausdrücke zur Bestimmung des Schwerpunktes von einem elliptischen Segmente, das von der großen Achse und einer Parallelen zur kleinen Achse begrenzt wird, nach und nach:

$$O = \int_0^x dx . \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} = \frac{b}{2a}\left[(x - a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2 \arccos \frac{a - x}{a}\right]$$

oder

$$O = \frac{1}{2}ab \arccos \frac{a - x}{a} - \frac{1}{2}(a - x)y \; ;$$

$$OX = \int_0^x dx . \frac{b}{a}x\sqrt{2ax - x^2} = b\int_0^x dx . \sqrt{2ax - x^2} - \frac{b}{3a}\sqrt{(2ax - x^2)^3}$$

$$= aO - \frac{a^2}{3b^2}y^3$$

$$= \frac{1}{2}a^2 b \arccos \frac{a - x}{a} - \frac{1}{6}y(3a^2 + ax - 2x^2) \; ;$$

$$OY = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^x dx.(2ax - x^2) = \frac{b^2}{6a^2}(3a - x)x^2 .$$

Ist das Segment ein Quadrant, also $x = a$, $y = b$, so hat man durch diese Ausdrücke

$$O = \frac{1}{4}\pi ab \quad , \quad OX = \frac{1}{12}a^2b(3\pi - 4) \quad , \quad OY = \frac{1}{3}ab^2,$$

$$X = a - \frac{4a}{3\pi} \quad , \quad Y = \frac{4b}{3\pi} .$$

Für die halbe Ellipse wird $x = 2a$, $y = 0$, und demnach

$$O = \frac{1}{2}\pi ab \quad , \quad OX = \frac{1}{2}\pi a^2 b \quad , \quad OY = \frac{2}{3}ab^2 ,$$

$$X = a \quad , \quad Y = \frac{4b}{3\pi} .$$

Setzt man in den vorhergehenden Ausdrücken $a = b = r$, so kommt man auf die für den Kreisabschnitt erhaltenen Werthe zurück, wobei man aber zu beachten hat, daß der Anfangspunkt nicht, wie früher, im Mittelpunkt des Kreises, sondern auf der Kreislinie liegt, daß also X hier den Abstand vom Scheitel des Bogens vorstellt.

§. 41.

Beschließen wir diese Anwendungen mit dem Segment der Cycloide, welches von der Normalen im Scheitel der Curve und einer dazu senkrechten Geraden begrenzt wird. Für dieses hat man

$$O = \int_0^x dx.y = xy - \int_0^x dx.x\frac{dy}{dx} = xy - \int_0^x dx.\sqrt{2ax - x^2} ,$$

wenn für $\frac{dy}{dx}$ dessen entsprechender Werth (b) in §. 32 eingeführt wird. Bezeichnet man dann den Werth des Integrals:

$$\int_0^x dx.\sqrt{2ax - x^2} = \frac{1}{2}a^2 \arccos\frac{a-x}{a} - \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax - x^2} ,$$

welches nach dem vorhergehenden §. offenbar die Oberfläche eines Kreissegmentes vorstellt, dessen Halbmesser $= a$ ist, also die Oberfläche von

einem Segmente des erzeugenden Kreises zwischen denselben Grenzen mit O', so wird

$$O = xy - O',$$

d. h. die Oberfläche des cycloidischen Segmentes APM, Fig. 46, ist dem Unterschied der Flächeninhalte des Rechtecks APMN und des Kreissegmentes APR gleich, woraus folgt, daß auch das Segment AMN dem letztern gleich sein muß.

Für die halbe Cycloide wird $x = 2a$, $y = \pi a$, und damit findet man $O' = \frac{1}{2}\pi a^2 =$ Oberfläche des Halbkreises ARB und

$$O = 2\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}\pi a^2;$$

diese Fläche ist mithin genau dreimal so groß, als die der Hälfte des erzeugenden Kreises.

Ferner ist:

$$OX = \int_0^x dx \cdot xy = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}\int_0^x dx \cdot x^2 \frac{dy}{dx};$$

das letzte Integral nimmt mit dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ die Form:

$$\int_0^x dx \cdot x\sqrt{2ax - x^2}$$

an, und wenn man darin $2ax - x^2 = z^2$ setzt, so hat man wie im vorhergehenden §.

$$\int_0^x dx \cdot x\sqrt{2ax - x^2} = a\int_0^x dx \cdot \sqrt{2ax - x^2} - \frac{1}{3}z^3$$

$$= aO' - \frac{1}{3}\sqrt{(2ax - x^2)^3}$$

und damit

$$OX = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{1}{2}aO' + \frac{1}{6}\sqrt{(2ax - x^2)^3}.$$

Dieser Ausdruck gibt für die halbe Cycloide den Werth:

$$OX = 2\pi a^3 - \frac{1}{4}\pi a^3 = \frac{7}{4}\pi a^3,$$

und mit dem von O folgt daraus

$$X = \frac{7}{6}a.$$

Endlich ist:

$$O\mathfrak{Y} = \frac{1}{2}\int_0^x dx \,.\, y^2 = \frac{1}{2} x y^2 - \int_0^x dx \,.\, xy \frac{dy}{dx},$$

und wenn für $\frac{dy}{dx}$ sein Werth (b) und für y der sich daraus ergebende:

$$y = \int_0^x dx. \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}} + a\int_0^x dx. \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sqrt{2ax-x^2} + a.\arccos\frac{a-x}{a}$$

eingeführt wird, so ergibt sich zuerst

$$\int_0^x dx \,.\, xy\frac{dy}{dx} = \int_0^x dx \,.\, (2ax - x^2) + a\int_0^x dx \,.\, z\sqrt{2ax-x^2}$$

$$= ax^2 - \frac{1}{3}x^3 + azO' - a\int_0^x dx \,.\, O'\frac{dz}{dx},$$

indem man $\arccos\frac{a-x}{a}$ durch z ersetzt. Mit dem Werthe von O'

$$O' = \frac{1}{2}a^2 z - \frac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax-x^2},$$

mit dem Ausdruck für das Aenderungsgesetz $\frac{dz}{dx}$, nämlich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

und mit der Beachtung, daß für $x=0$ auch $z=0$ wird, erhält man

$$a\int_0^x dx \,.\, O'\frac{dz}{dx} = \frac{1}{4}a^3 z^2 - \frac{1}{2}a^2 x + \frac{1}{4}ax^2$$

und dadurch

$$O\mathfrak{Y} = \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}a^2 x - \frac{3}{4}ax^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}a^3 z^2 - azO'\,;$$

für die halbe Cycloide folgt daraus

$$O\mathfrak{Y} = a^3\left(\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4}\pi^2 a^3\left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right),$$

und durch den Werth von O hat man

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{2}\pi a\left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right) = 1{,}2878\ldots a\,,$$

womit die Aufgabe gelöset ist.

§. 42.

Durch die Gleichungen (29) kann der Schwerpunkt einer Fläche nicht mehr unmittelbar bestimmt werden, wenn diese von zwei geneigten Geraden begrenzt wird, wie dies bei allen Sectoren der Fall ist. In einem solchen Falle kann man die gegebene Fläche in Segmente und Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte bestimmen und den Schwerpunkt der ganzen Fläche mittels der Gleichungen (12) berechnen.

Man kann aber auch den Durchschnittspunkt der beiden begrenzenden Geraden als den Pol eines Winkelcoordinatensystems annehmen, die Begrenzungen der Fläche mittels der Veränderlichen r und ω bestimmen und diese statt der Veränderlichen x und y in die Gleichungen (18) einführen. Dazu zieht man aus den Gleichungen:

$$\frac{d.O\mathfrak{X}}{dx} = x\frac{dO}{dx}\quad,\qquad \frac{d.O\mathfrak{Y}}{dy} = y\frac{dO}{dy}$$

die neuen Aenderungsgesetze:

$$\frac{d^2.O\mathfrak{X}}{dx\,dy} = x\frac{d^2O}{dx\,dy}\quad,\qquad \frac{d^2.O\mathfrak{Y}}{dy\,dx} = y\frac{d^2O}{dy\,dx}\,;$$

man erhält dann durch Vertauschung der Veränderlichen x und y mit r und ω, indem man beachtet, daß man hat

$$\frac{d^2O}{dx\,dy} = \frac{d.\frac{dO}{dx}}{dy} = \frac{d.\frac{dO}{dx}}{dr}\cdot\frac{dr}{dy}$$

$$= \frac{d.\frac{dO}{dr}}{dx}\cdot\frac{dr}{dy} = \frac{d.\frac{dO}{dr}}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dr}{dy}$$

$$= \frac{d^2O}{d\omega\,dr}\cdot\frac{d\omega\,dr}{dx\,dy}\,,$$

ebenso

$$\frac{d^2.O\mathfrak{X}}{dx\,dy} = \frac{d^2.O\mathfrak{X}}{d\omega\,dr}\cdot\frac{d\omega\,dr}{dx\,dy}\,,\ \text{u. s. f.}$$

die Ausdrücke:

$$\frac{d^2 . OX}{d\omega\, dr} = x \frac{d^2 O}{d\omega\, dr} \quad , \quad \frac{d^2 . OY}{d\omega\, dr} = y \frac{d^2 O}{d\omega\, dr} ,$$

worin nun x, y und O als Functionen von r und ω zu betrachten, beziehungsweise einzuführen sind. In dieser Hinsicht weiß man, daß

$$x = r \cos \omega \quad , \quad y = r \sin \omega$$

ist, und es handelt sich nur noch darum, auch O oder vielmehr $\frac{d^2 O}{d\omega\, dr}$ zu finden, und dies kann auf ähnliche Weise geschehen, wie für die Veränderlichen x und y in §. 35.

Begrenzt man nämlich ein Flächenstück AFG, Fig. 47, durch einen Kreisbogen FG und die beiden Halbmesser AF und AG, welche den Winkel ω einschließen und deren Länge gleich r ist, und läßt dann den Winkel ω um $\Delta\omega$ zunehmen, während r unverändert bleibt, so wird auch die Oberfläche O des Sectors AFG um einen kleinen Sector AGg $= \Delta_\omega O$ wachsen, dessen Flächeninhalt durch das Product $\frac{1}{2} r^2 \Delta\omega$ gemessen wird und die Gleichung:

$$\frac{\Delta_\omega O}{\Delta\omega} = \frac{1}{2} r^2$$

gibt. Der Anfangswerth dieses Verhältnisses bleibt derselbe; man erhält also dadurch als Aenderungsgesetz von O in Bezug auf ω:

$$\frac{dO}{d\omega} = \frac{1}{2} r^2$$

und als das gesuchte zweite Aenderungsgesetz in Bezug auf r

$$\frac{d . \frac{dO}{d\omega}}{dr} = \frac{d^2 O}{d\omega\, dr} = r ,$$

was sich übrigens auch einfach dadurch ergibt, daß man auch r um Δr wachsen läßt; denn dadurch erhält der kleine Sector AGg einen neuen Zuwachs Gghk $= \Delta_r . \Delta_\omega O$, dessen Oberfläche durch den Ausdruck:

$$\Delta_r . \Delta_\omega O = \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta\omega - \frac{1}{2} r^2 \Delta\omega$$

gemessen wird und auf das Verhältniß:

$$\frac{\Delta_r . \frac{\Delta_\omega O}{\Delta\omega}}{\Delta r} = r + \frac{1}{2} \Delta r$$

führt, welches in seinem Anfangswerth das obige Aenderungsgesetz darstellt.

Damit haben wir also

$$\frac{d^2 . OX}{d\omega\, dr} = r^2 \cos\omega \quad , \quad \frac{d^2 . OY}{d\omega\, dr} = r^2 \sin\omega$$

und demnach zur Bestimmung des Schwerpunktes die drei bestimmten Integrale:

$$30.) \begin{cases} O = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . \int_{r_0}^{R} dr . r \,, \\ OX = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . \int_{r_0}^{R} dr . r^2 \cos\omega \quad , \quad OY = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . \int_{r_0}^{R} dr . r^2 \sin\omega \,. \end{cases}$$

Für einen Sector, der von zwei Curven oder Curvenzweigen eingeschlossen wird, zieht man daraus die Ausdrücke:

$$31.) \begin{cases} O = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . [F^2(\omega) - f_0^2(\omega)] \,, \\ OX = \frac{1}{3}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . [F^3(\omega) - f_0^3(\omega)] \cos\omega \,, \\ OY = \frac{1}{3}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . [F^3(\omega) - f_0^3(\omega)] \sin\omega \,, \end{cases}$$

worin $F(\omega)$ und $f_0(\omega)$ die Werthe von R und r_0 in Function von ω darstellen, die jenen Curven oder Curvenzweigen entsprechen. Wenn der Sector am Pole spitz ausläuft, also nur von einer Curve:

$$r = f(\omega)$$

begrenzt wird, so hat man die einfachern Gleichungen:

$$32.) \begin{cases} O = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . r^2 \,, \\ OX = \frac{1}{3}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . r^3 \cos\omega \quad , \quad OY = \frac{1}{3}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . r^3 \sin\omega \,, \end{cases}$$

in denen r statt $f(\omega)$ beibehalten wurde.

§. 43.

Die Gleichung des Kreises in Bezug auf Polarcoordinaten, die ihren Pol im Mittelpunkt desselben haben, ist

$$r = R\ ;$$

es ist also hier r constant und unabhängig von ω, und die Gleichungen (32) geben zur Bestimmung des Schwerpunktes von einem Kreis-Ausschnitt die Ausdrücke:

$$O = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \alpha_0)\,,$$

$$OX = \frac{1}{3}R^3(\sin\alpha - \sin\alpha_0)\ ,\quad OY = \frac{1}{3}R^3(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\,,$$

also wenn $\alpha_0 = 0$ gesetzt wird:

$$O = \frac{1}{2}R^2\alpha\quad,\quad X = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad,\quad Y = \frac{2}{3}R\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,,$$

nimmt man dagegen $\alpha_0 = -\alpha$, so ergibt sich:

$$O = R^2\alpha\quad,\quad X = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad,\quad Y = 0\,.$$

Diese Werthe zeigen, daß der Schwerpunkt eines solchen Sectors nach §. 27 zugleich der Schwerpunkt eines concentrischen Kreisbogens ist, der durch dieselben Halbmesser wie jener begrenzt wird und dessen Halbmesser $= \frac{2}{3}R$ ist; man kann sich demnach die Masse des Kreissectors in diesem Kreisbogen vereinigt und gleichförmig vertheilt denken.

Wenn der Sector von zwei concentrischen Kreisbogen begrenzt, also der Ausschnitt einer Ringfläche ist, wie BCDE, Fig. 48, so wird man die Gleichungen (31) anwenden; man hat dann

$$F(\omega) = R\quad,\qquad f_0(\omega) = r_0\,,$$

und damit wird zwischen den Grenzen α und $-\alpha$

$$O = (R^2 - r_0^2)\alpha\,,$$

$$OX = \frac{2}{3}(R^3 - r_0^3)\sin\alpha\quad,\qquad OY = 0\,,$$

woraus man sofort

$$X = \frac{2}{3}\cdot\frac{R^2 + Rr_0 + r_0^2}{R + r_0}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

als Ausdruck für den Abstand des Schwerpunktes von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte der begrenzenden Bogen ziehen wird.

Wie schon bemerkt, kann man zu diesen Ergebnissen auch dadurch gelangen, daß man den Sector als Summe des Segmentes und Sehnendreieckes betrachtet und deren Schwerpunkte als bekannt voraussetzt; der Ringsector dagegen wird als Differenz der beiden concentrischen Sectoren berechnet, und während im ersten Falle das Moment des Sectors in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gelegte, zur Sehne parallele Achse der Summe der Momente des Segmentes und des Sehnendreieckes in Bezug auf dieselbe Achse gleich ist, erhält man im letztern Falle das Moment des Ringsectors in Bezug auf dieselbe Achse als Differenz der Momente des größern und kleinern Sectors.

Diese Andeutungen werden den Leser in den Stand setzen, jene Ableitungen selbstständig ausführen zu können, was ihm zur Uebung empfohlen werden soll.

§. 44.

Betrachten wir noch als Anwendung für die Formeln (32) die Sectoren der Parabel und Ellipse, welche durch zwei vom Brennpunkte ausgehende Fahrstrahlen begrenzt werden.

Die Polargleichung der **Parabel**, auf Achse und Brennpunkt bezogen, hat die Form:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\omega},$$

und damit wird zuerst

$$O = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega \,.\, r^2 = \frac{1}{2} p^2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega \,.\, \frac{1}{(1+\cos\omega)^2}\ ;$$

setzt man dann $\frac{1}{2}\omega = \omega'$ und beachtet, daß

$$(1+\cos\omega)^2 = 4\cos^4\frac{1}{2}\omega\ ,\qquad \frac{1}{\cos^2\omega'} = \frac{d\,.\,\mathrm{tang}\,\omega'}{d\omega'} = 1 + \mathrm{tang}^2\,\omega',$$

daß also auch das vorstehende Integral unbestimmt genommen in

$$\frac{1}{4} p^2 \int d\,\mathrm{tang}\,\omega' \,.\, (1 + \mathrm{tang}^2\,\omega') = \varDelta \,.\, (\mathrm{tang}\,\omega' + \frac{1}{3}\mathrm{tang}^3\,\omega')$$

übergeht, so findet man zwischen den Grenzen $\alpha_0 = 0$ und $\alpha = \omega$

$$O = \frac{1}{4} p^2 (\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\,\mathrm{tang}^3\,\frac{1}{2}\omega)\ .$$

Ferner ergibt sich zwischen denselben Grenzen

$$O\mathfrak{X}=\frac{1}{3}p^3\int_0^\omega d\omega.\frac{\cos\omega}{(1+\cos\omega)^3}=\frac{1}{3}p^3\int_0^{\omega'} d\omega'.\left(\frac{1}{2\cos^4\omega'}-\frac{1}{4\cos^6\omega'}\right),$$

und wenn wieder für $\frac{1}{\cos^2\omega'}$ einmal $\frac{dz}{d\omega'}$ und dann $1+z^2$ substituirt wird, nach vorgenommener Reduction:

$$O\mathfrak{X}=\frac{1}{12}p^3\int_0^{\text{tang}\,\omega'} dz.(1-z^4)=\frac{1}{12}p^3(\text{tang}\,\omega'-\frac{1}{5}\text{tang}^5\omega')$$

oder auch

$$O\mathfrak{X}=\frac{1}{12}p^3(\text{tang}\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{5}\text{tang}^5\frac{1}{2}\omega).$$

Zuletzt erhält man noch sehr einfach

$$O\mathfrak{Y}=\frac{1}{3}p^3\int_0^\omega d\omega.\frac{\sin\omega}{(1+\cos\omega)^3}=\frac{1}{6}p^3\left(\frac{1}{(1+\cos\omega)^2}-\frac{1}{4}\right).$$

Für $\omega=\frac{1}{2}\pi$ werden diese Ausdrücke übereinstimmend mit den frühern für ein Segment angegebenen

$$O=\frac{1}{3}p^2\ ,\quad O\mathfrak{X}=\frac{1}{15}p^3\ ,\quad O\mathfrak{Y}=\frac{1}{8}p^3$$

$$\mathfrak{X}=\frac{1}{5}p\ ,\quad \mathfrak{Y}=\frac{3}{8}p\ .$$

§. 45.

Die Polargleichung der Ellipse auf Brennpunkt und große Achse bezogen, hat die Formen:

$$r=a\frac{1-e^2}{1+e\cos\omega}=p\frac{1}{1+e\cos\omega},$$

worin p wie bei der Parabel den Parameter oder die im Brennpunkte errichtete Ordinate, a die halbe große Achse und e die relative Excentricität der gegebenen Ellipse bedeutet; man erhält damit für die Bestimmung des Schwerpunktes eines elliptischen Sectors die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}O&=\frac{1}{2}p^2\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega.\frac{1}{(1+e\cos\omega)^2},\\ O\mathfrak{X}&=\frac{1}{3}p^3\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega.\frac{\cos\omega}{(1+e\cos\omega)^3},\ O\mathfrak{Y}=\frac{1}{3}p^3\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega.\frac{\sin\omega}{(1+e\cos\omega)^3}.\end{aligned}\right\}\text{(a.}$$

Das letzte dieser Integrale wird unmittelbar erhalten, wenn man z für $1 + e\cos\omega$ und demnach $-\frac{1}{e}\frac{dz}{d\omega}$ für $\sin\omega$ einführt; man findet dadurch zwischen den Grenzen $\alpha = \omega$, $\alpha_0 = 0$, denen die Werthe: $z = 1 + e\cos\omega$ und $z_0 = 1 + e$ entsprechen, den Werth:

$$OY = \frac{p^3}{6e}\left(\frac{1}{(1 + e\cos\omega)^2} - \frac{1}{(1+e)^2}\right),$$

welchem durch einige Umwandlungen auch die Form gegeben werden kann:

$$OY = \frac{2}{3}p^3\frac{\sin^2\frac{1}{2}\omega\,(1 + e\cos^2\frac{1}{2}\omega)}{(1+e)^2(1 + e\cos\omega)^2}.$$

Um nun die beiden ersten Integrale zu entwickeln, setze man wieder $\tang\frac{1}{2}\omega = z$; dadurch ergibt sich nach und nach

$$\cos\omega = \frac{1 - \tang^2\frac{1}{2}\omega}{1 + \tang^2\frac{1}{2}\omega} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},\quad 1 + e\cos\omega = \frac{1 + e + (1 - e)z^2}{1 + z^2},$$

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{2}{1 + z^2},$$

und man erhält zwischen den obigen Grenzen, wenn zur Abkürzung noch a′ für $1 + e$, b′ für $1 - e$ eingeführt wird,

$$O = p^2\int_0^{\tang\frac{1}{2}\omega} dz\,.\,\frac{1 + z^2}{(a' + b'z^2)^2}$$

$$= p^2\int_0^{\tang\frac{1}{2}\omega} dz\,.\left(\frac{1}{(a' + b'z^2)^2} + \frac{z^2}{(a' + b'z^2)^2}\right),$$

$$OX = \frac{2}{3}p^3\int_0^{\tang\frac{1}{2}\omega} dz\,.\,\frac{1 - z^4}{(a' + b'z^2)^3}$$

$$= \frac{2}{3}p^3\int_0^{\tang\frac{1}{2}\omega} dz\,.\left(\frac{1}{(a' + b'z^2)^3} - \frac{z^4}{(a' + b'z^2)^3}\right),$$

so daß nun beide Integrale auf rationale algebraische Formen zurückgeführt sind. Man hat aber

$$\int dz \cdot \frac{1}{(a' + b'z^2)^2} = \frac{1}{2a'} \Delta \cdot \frac{z}{a' + b'z^2} + \frac{1}{2a'} \int dz \cdot \frac{1}{a' + b'z^2},$$

$$\int dz \cdot \frac{z^2}{(a' + b'z^2)^2} = -\frac{1}{2b'} \Delta \cdot \frac{z}{a' + b'z^2} + \frac{1}{2b'} \int dz \cdot \frac{1}{a' + b'z^2},$$

und es wird damit zuerst

$$0 = p^2 \left[\left(\frac{1}{2a'} - \frac{1}{2b'} \right) \frac{z}{(a' + b'z^2)} + \left(\frac{1}{2a'} + \frac{1}{2b'} \right) \int_0^z dz \cdot \frac{1}{a' + b'z^2} \right]$$

$$= \frac{p^2}{1 - e^2} \left[-\frac{ez}{a' + b'z^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc\,tang} z \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \right].$$

Führt man nun für z seinen Werth wieder ein, so wird

$$\frac{ez}{a' + b'z^2} = \frac{e \sin \omega}{2(1 + e \cos \omega)},$$

und der Werth von O kann die Form erhalten:

$$O = \frac{p^2}{2(1 - e^2)} \left[\frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc\,tang} : \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega - \frac{e \sin \omega}{1 + e \cos \omega} \right],$$

welche noch einfacher wird, wenn man beachtet, daß

$$2 \operatorname{arc\,tang} t = \operatorname{arc\,tang} \frac{2t}{1 + t^2} = \operatorname{arc\,cos} \frac{1 + t^2}{\sqrt{(1 + t^2)^2 + 4t^2}};$$

denn sie läßt sich dadurch zurückführen auf

$$O = \frac{p^2}{2(1 - e^2)} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{e + \cos \omega}{1 + e \cos \omega} - \frac{e \sin \omega}{1 + e \cos \omega} \right]$$

oder, da $p = a(1 - e^2)$, $a\sqrt{1 - e^2} = b$ ist, in den Ausdruck umwandeln:

$$O = \frac{1}{2} ab \left(\operatorname{arc\,cos} \frac{e + \cos \omega}{1 + e \cos \omega} - e\sqrt{1 - e^2} \frac{\sin \omega}{1 + e \cos \omega} \right).$$

Für das letzte der obigen Integrale hat man

$$\int dz \cdot \frac{1}{(a' + b'z^2)^3} = \frac{1}{4a'} \Delta \cdot \left(\frac{1}{a' + b'z^2} + \frac{3}{2a'} \right) \frac{z}{a' + b'z^2} + \frac{3}{8a'^2} \int dz \cdot \frac{1}{a' + b'z^2},$$

$$\int dz \cdot \frac{z^4}{(a' + b'z^2)^3} = -\frac{1}{4b'} \Delta \cdot \left(\frac{z^2}{a' + b'z^2} + \frac{3}{2b'} \right) \frac{z}{a' + b'z^2} + \frac{3}{8b'^2} \int dz \cdot \frac{1}{a' + b'z^2};$$

damit erhält man:

$$Ox=\frac{2}{3}p^3\left[\frac{z}{8(a'+b'z^2)^2}\left(\frac{5a'+3b'z^2}{a'^2}+\frac{3a'+5b'z^2}{b'^2}\right)+\frac{3(b'^2-a'^2)}{8a'^2b'^2}\int_0^z dz.\frac{1}{a'+b'z^2}\right],$$

und mit den Werthen von p, z und $\int dz.\frac{1}{a'+b'z^2}$ wird nach einigen Reductionen

$$Ox=\frac{1}{6}ab^2\left[\frac{2(1+e^2)\sin\omega}{1+e\cos\omega}-\frac{e\sin\omega(e+\cos\omega)}{(1+e\cos\omega)^2}-\frac{3e}{\sqrt{1-e^2}}\arccos\frac{e+\cos\omega}{1+e\cos\omega}\right].$$

Endlich nehmen die Werthe von O, OX und OY noch einfachere Formen an, wenn man (vergl. §. 86 des I. Buches)

$$\tan\frac{1}{2}u=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{1}{2}\omega \quad \text{oder} \quad \cos\omega=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}$$

setzt; sie werden dadurch

$$O=\frac{1}{2}ab(u-e\sin u),$$

$$OX=\frac{1}{6}a^2b[(2+2e^2-e\cos u)\sin u-3eu],$$

$$OY=\frac{1}{6}ab^2(2-2\cos u-e\sin^2 u),$$

und es mag dem Leser überlassen bleiben, diese Ausdrücke mittels der obigen Substitution unmittelbar aus den drei Integralen (a) abzuleiten.

Für $\omega=\frac{1}{2}\pi$, also für das durch die Ordinate des Brennpunktes begrenzte Segment wird $\cos u=e$, und die vorhergehenden Gleichungen geben

$$O=\frac{1}{2}ab(\arccos e-e\sqrt{1-e^2}),$$

$$OX=\frac{1}{6}a^2b[(2+e^2)\sqrt{1-e^2}-3e\arccos e],$$

$$OY=\frac{1}{6}ab^2(1-e)^2(2+e),$$

übereinstimmend mit den frühern Ausdrücken für ein elliptisches Segment, wenn man dort $x=a(1-e)$, $y=p=a(1-e^2)$ setzt und beachtet, daß bei jenen Werthen X im Scheitel, bei den zuletzt erhaltenen dagegen im Brennpunkt seinen Anfang hat. Wird $\omega=\pi$,

so breitet sich der Sector zur halben Ellipse aus; man hat auch $u = \pi$ und demnach einfach:

$$O = \frac{1}{2}\pi ab = \frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{1-e^2},$$

$$O\mathfrak{X} = -\frac{1}{2}\pi a^2be = -\frac{1}{2}\pi a^3e\sqrt{1-e^2}, \quad \mathfrak{X} = -ae,$$

$$O\mathfrak{Y} = \frac{2}{3}ab^2 = \frac{2}{3}a^3(1-e^2), \quad \mathfrak{Y} = \frac{4b}{3\pi},$$

wie sich dieses nach dem frühern ebenfalls ergeben muß.

§. 46.

Von den krummen Flächen sind diejenigen die einfachsten, welche von einer ebenen Curve beschrieben werden, wenn sich dieselbe um eine feste Gerade dreht, und welche deßhalb Umdrehungsflächen genannt werden. Die Bestimmung des Schwerpunktes solcher Flächen erfordert blos die Berechnung einer einzigen Ordinate, da er offenbar auf jener Geraden, der Achse der Fläche, liegt und demnach vollständig bestimmt ist, wenn man seine Entfernung von einem festen Punkte dieser Achse kennt.

Nehmen wir also diese Achse als Achse der x und die erzeugte Fläche durch eine zu dieser Achse senkrechte Ebene begrenzt an, so wird man leicht einsehen, daß wenn diese Ebene um Δx weiter von der Ebene der yz entfernt, der Bogen s der erzeugenden Curve also um Δs größer wird, die Fläche selbst um eine Zone wachsen wird, deren Flächeninhalt ΔO größer ist, als die von der Sehne des kleinen Bogens Δs beschriebene Kegelfläche, und kleiner, als die Summe aus der Oberfläche des entsprechenden Gürtels der von der Tangente im Anfangspunkte des Bogens Δs beschriebenen Kegelfläche und aus der zwischen der gegebenen Fläche und dieser Kegelfläche liegenden Ringfläche; man hat aber für die Sehnen-Kegelfläche, deren Oberfläche mit $\Delta' O$ bezeichnet sei,

$$\Delta' O = \pi(2y+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$= 2\pi y\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} + \pi\Delta x\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2};$$

als Flächeninhalt des Gürtels der Tangenten-Kegelfläche und der genannten Ringfläche dagegen findet man

$$\Delta''O = \pi\left(2y+\Delta x\frac{dy}{dx}\right)\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\pi\left[\left(y+\Delta x\frac{dy}{dx}\right)^2-(y+\Delta y)^2\right]$$

$$=2\pi y\,\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\pi\,\Delta x^2\frac{dy}{dx}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$+2\pi y\,\Delta x\left(\frac{dy}{dx}-\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)-\pi\,\Delta x^2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right],$$

und daraus zieht man mit der Beachtung, daß man

$$\Delta O = \Delta' O + \alpha(\Delta'' O - \Delta' O)$$

hat, wenn α einen ächten Bruch vorstellt, das Verhältniß:

$$\frac{\Delta O}{\Delta x}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}+\pi\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}+\alpha\left(\frac{\Delta'' O}{\Delta x}-\frac{\Delta' O}{\Delta x}\right).$$

Der Anfangswerth dieses Verhältnisses gibt, wie leicht zu sehen ist, das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dO}{dx}=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=2\pi y\frac{ds}{dx},$$

und die Gleichungen zur Berechnung der Lage des Schwerpunktes sind demnach zufolge der Gleichungen (18):

$$33.)\quad\left\{\begin{aligned} O &= 2\pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,y\frac{ds}{dx} = 2\pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\\ O\mathfrak{X} &= 2\pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,xy\frac{ds}{dx} = 2\pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,xy\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.\end{aligned}\right.$$

Nimmt man nun einen Augenblick s als unabhängige Veränderliche und betrachtet x und y als Functionen derselben, so nimmt der Ausdruck für das Moment der Fläche O in Bezug auf die Achse der y die Form an:

$$2\pi\int_{s_0}^{S} ds\,.\,xy$$

und bleibt derselbe, wenn man x und y tauscht; er ist demnach auch der Ausdruck des Momentes der Umdrehungsfläche O′, welche durch

denselben Bogen erzeugt wird, wenn er sich um die Achse der y dreht, in Bezug auf die Achse der x; man hat also

$$O' = 2\pi \int_{s_0}^{S} ds \,.\, x = 2\pi \int_{x_0}^{X} dx \,.\, x \frac{ds}{dx}$$

und

$$O'Y = 2\pi \int_{s_0}^{S} ds \,.\, xy = OX$$

und schließt daraus, daß die Abstände X und Y der Schwerpunkte dieser Umdrehungsflächen O und O' vom Anfang der Coordinaten sich umgekehrt verhalten wie ihre Oberflächen.

§. 47.

Als erstes Beispiel zur Anwendung der zuletzt erhaltenen Formeln diene die Mantelfläche eines senkrecht zur Umdrehungsachse geschnittenen Kegels, dessen erzeugende Gerade durch die Gleichung:

$$y = ax + b$$

vorgestellt wird; diese gibt

$$\frac{dy}{dx} = a \quad , \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + a^2} \, ,$$

und es folgt daraus, wenn h die Höhe des Kegels bezeichnet,

$$O = 2\pi \int_0^h dx \,.\, (ax + b) \sqrt{1 + a^2} = \pi h \sqrt{1 + a^2} (ah + 2b) \, ,$$

$$OX = 2\pi \sqrt{1 + a^2} \int_0^h dx \,.\, (ax + b) x = \frac{1}{3} \pi h^2 \sqrt{1 + a^2} (2ah + 3b) \, ,$$

und damit ergibt sich

$$X = \frac{1}{3} h \frac{2ah + 3b}{ah + 2b} \, .$$

Bezeichnet man sodann die Halbmesser der beiden Grundflächen mit R und r, so ist

$$b = r \quad , \quad R = ah + b \quad , \quad a = \frac{R - r}{h} \, ,$$

und man erhält sofort

$$X = \frac{1}{3} h \frac{2R + r}{R + r}$$

als Abstand des Schwerpunktes von der kleinen Grundfläche; seine Lage ist demnach dieselbe, wie bei dem Trapez, das durch den Durchschnitt des Kegels mittels einer durch die Achse gelegten Ebene entsteht, dessen parallele Seiten R und r sind, und dessen Höhe h ist.

Für einen spitzen Kegel hat man $r = 0$, für einen Cylinder $R = r$; im ersten Falle wird daher

$$X = \frac{2}{3} h ,$$

im zweiten dagegen

$$X = \frac{1}{2} h ,$$

wie zu erwarten war.

§. 48.

Die Oberfläche eines parabolischen Conoids, dessen Erzeugende durch die Gleichung:

$$y^2 = 2px$$

vorgestellt wird, und dessen Höhe h ist, wird durch das Integral:

$$O = 2\pi \int_0^h dx . \sqrt{p^2 + 2px}$$

ausgedrückt, aus welchem man unmittelbar zieht:

$$O = \frac{2}{3} \pi \left[\sqrt{p(p+2h)^3} - p^2 \right] .$$

Für das Moment dieser Fläche in Bezug auf die Achse der y erhält man

$$OX = 2\pi \int_0^h dx . x \sqrt{p^2 + 2px} ,$$

und nach einigen Reductionen wird

$$OX = \frac{2}{15} \pi [(6h^2 + ph - p^2) \sqrt{p(p+2h)} + p^3] ,$$

woraus X gefunden werden kann, wenn p und h in Zahlen gegeben sind.

§. 49.

Wenn eine Ellipse sich um ihre kleine Achse dreht, erzeugt sie eine Umdrehungsfläche, deren Schwerpunkt durch folgende Rechnung gefunden wird.

Nimmt man die Umdrehungsachse für die der y, so daß wie gewöhnlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

die Gleichung der erzeugenden Ellipse ist, so wird

$$O = 2\pi \int_0^y dy \, . \, x \frac{ds}{dy} = 2\pi \frac{a}{b^2} \int_0^y dy \, . \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2) y^2}$$

$$= 2\pi \frac{a}{b^2} \left(\frac{1}{2} y \sqrt{b^4 + c^2 y^2} + \frac{b^4}{2c} \operatorname{logn} . \frac{cy + \sqrt{b^4 + c^2 y^2}}{b^2} \right),$$

worin c^2 für $a^2 - b^2$ gesetzt ist. Ferner hat man

$$O\mathfrak{Y} = 2\pi \int_0^y dy \, . \, xy \frac{ds}{dy} = 2\pi \frac{a}{b^2} \int_0^y dy \, . \, y \sqrt{b^4 + c^2 y^2}$$

$$= \frac{2}{3} \pi \frac{a \left[\sqrt{(b^4 + c^2 y^2)^3} - b^6 \right]}{b^2 c^2}.$$

Für ein halbes Ellipsoid wird $y = b$, $\sqrt{b^2 + c^2} = a$, und demnach

$$O = \pi a^2 + \pi \frac{ab^2}{c} \operatorname{logn} \frac{a + c}{b},$$

$$O\mathfrak{Y} = \frac{2}{3} \pi ab \frac{a^3 - b^3}{c^2} = \frac{2}{3} \pi ab \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

Entsteht dagegen das Ellipsoid durch Umdrehung einer Ellipse um ihre große Achse, so findet man

$$O' = 2\pi \int_0^x dx \, . \, y \frac{ds}{dx} = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_0^x dx \, . \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) x^2},$$

oder wenn dieses Integral nach bekannten Formeln ausgeführt wird,

$$O' = 2\pi \frac{b}{a^2} \left(\frac{1}{2} x \sqrt{a^4 - c^2 x^2} + \frac{a^4}{2c} \arcsin \frac{cx}{a^2} \right),$$

und weiter ist

$$O'\mathfrak{X} = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_0^x dx \, . \, x \sqrt{a^4 - c^2 x^2} = \frac{2}{3} \pi \frac{b \left[a^6 - \sqrt{(a^4 - c^2 x^2)^3} \right]}{a^2 c^2},$$

so daß für $x = a$ der Schwerpunkt für das halbe Ellipsoid durch die Ausdrücke:

$$O' = \pi b^2 + \pi \frac{a^2 b}{c} \arcsin \frac{c}{a} ,$$

$$O'\mathfrak{X} = \frac{2}{3}\pi a b \frac{a^3 - b^3}{c^2} = \frac{2}{3}\pi a b \frac{a^2 + a b + b^2}{a + b}$$

bestimmt wird, von denen der letzte mit dem obigen Werthe von $O\mathfrak{Y}$ gleichlautend ist.

Für $b = a = r$ geht in beiden Fällen das Ellipsoid in eine Kugel über; die vorangehenden Werthe von O und O' zeigen sich dann aber unter der unbestimmten Form: $\frac{0}{0}$; denn man hat im ersten Falle

$$O = \pi a y + \pi a^3 \frac{\log n . 1}{0}$$

und im zweiten

$$O' = \pi b x + \pi a^3 \frac{\arcsin 0}{0} .$$

Nimmt man daher die Aenderungsgesetze vom Zähler und Nenner der zweiten Glieder dieser Werthe in Bezug auf b als unabhängige Veränderliche, indem man beachtet, daß $\frac{dc}{db} = -\frac{c}{b}$ wird, und setzt dann $b = a = r$, $c = 0$, so ergibt sich

$$O = 2\pi r y \quad , \quad O' = 2\pi r x ;$$

ferner ist

$$O\mathfrak{Y} = \pi r y^2 \quad , \quad O'\mathfrak{X} = \pi r x^2 ,$$

und daraus schließt man

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{2} y \quad , \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} x .$$

Für eine Zone, deren begrenzende Kreise zur Achse der y senkrecht und vom Anfangspunkt um Y und y_0 Längeneinheiten entfernt sind, wird daher

$$O = 2\pi r (Y - y_0) = 2\pi r h ,$$

$$O\mathfrak{Y} = \pi r (Y^2 - y_0^2) = 2\pi r h . \frac{1}{2}(Y + y_0) ,$$

und damit folgt

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{2}(Y + y_0) = y_0 + \frac{1}{2} h ;$$

endlich ist für die Halbkugel

$$Y = \frac{1}{2} r .$$

Alle diese Werthe sind übrigens für sich einleuchtend, da die Oberfläche einer Kugelzone ihrer Höhe proportional ist und deßhalb durch die Gerade vorgestellt werden kann, welche die Mittelpunkte der begrenzenden Parallelkreise verbindet.

§. 50.

Die Cycloide bietet zwei fernere Beispiele zur Anwendung der Gleichungen (33) dar.

Betrachten wir zuerst den Fall, wo sich der Bogen AM, Fig. 49, um die Achse der y dreht. Man hat dann das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}$$

in Function der Veränderlichen y und damit für den Flächeninhalt der erzeugten Fläche den Ausdruck:

$$O = 2\pi \int_0^y dy \, . \, x \frac{ds}{dy} = 2\pi \int_0^y dy \, . \, x \sqrt{\frac{2a}{2a - y}}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \sqrt{2a} \left(2y\sqrt{y} - 3x\sqrt{2a - y} \right)$$

und demnach für die von der halben Cycloide erzeugte Fläche

$$O = \frac{32}{3} \pi a^2 = 33{,}511 \, .. \, a^2 .$$

Dreht sich derselbe Bogen der Cycloide um die Achse der x, so erzeugt er eine Fläche, für welche man findet

$$O' = 2\pi \int_0^y dy \, . \, y \frac{ds}{dy} = 2\pi \int_0^y dy \, . \, y \sqrt{\frac{2a}{2a - y}}$$

$$= \frac{32}{3} \pi a^2 - \frac{4}{3} \pi (4a + y) \sqrt{2a(2a - y)} ;$$

daraus ergibt sich aber für $y = 2a$ wie vorher

$$O' = \frac{32}{3} \pi a^2 = O ;$$

die beiden Umdrehungsflächen sind also in diesem Falle an Flächeninhalt gleich; ihre Schwerpunkte liegen demnach auch gleichweit vom Anfangspunkt entfernt. Dieser Abstand ergibt sich durch die Gleichung:

$$O\mathfrak{Y} = O'\mathfrak{X} = 2\pi\int_0^y dy \,.\, xy\sqrt{\frac{2a}{2a-y}}$$
$$= \frac{8}{45}\pi y\sqrt{2ay}(20a+3y) - \frac{4}{3}\pi x(4a+y)\sqrt{2a(2a-y)},$$

wenn man darin wieder $y = 2a$ setzt; man erhält dadurch

$$O\mathfrak{Y} = O'\mathfrak{X} = \frac{26.32}{45}\pi a^3$$

und zieht daraus

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} = \frac{26}{15}a = 1{,}733\ldots a\,.$$

Untersuchen wir ebenso die Fläche, welche von dem Bogen AM, Fig. 50, erzeugt wird dadurch, daß er sich um die Normale oder um die Tangente im Punkte A dreht, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

das entsprechende Aenderungsgesetz der Coordinaten, und wenn die Achse der x (die Normale) die Umdrehungsachse ist, so folgt daraus für den Flächeninhalt O der Werth:

$$O = 2\pi\int_0^x dx \,.\, y\frac{ds}{dx} = 2\pi\int_0^x dx \,.\, y\sqrt{\frac{2a}{x}}$$
$$= \frac{4}{3}\pi\left[3y\sqrt{2ax} + 2\sqrt{2a}(2a-x) - 8a^2\right],$$

so daß sich für die von der halben Cycloide erzeugte Fläche, für die man $x = 2a$, $y = \pi a$ hat,

$$O = \frac{8}{3}\pi a^2(3\pi - 4) = 45{,}447\ldots a^2$$

ergibt. Dreht sich die Curve dagegen um die Tangente in A oder um die Achse der y, so ist einfach:

$$O' = 2\pi\int_0^x dx \,.\, \sqrt{2ax} = \frac{4}{3}\pi x\sqrt{2ax}$$

und für das von der halben Curve erzeugte Conoid

$$O' = \frac{16}{3}\pi a^2 = 16,755\ldots a^2 \;;$$

diese Fläche ist also gerade halb so groß, als die der beiden ersten cycloidischen Umdrehungsflächen. In beiden Fällen ist wieder

$$OX = O'Y = 2\pi\int_0^x dx\,.\,y\sqrt{2ax}$$

$$= \frac{4}{3}\pi xy\sqrt{2ax} + \frac{8}{45}\pi(8a^2+2ax-3x^2)\sqrt{2a(2a-x)} - \frac{128}{45}\pi a^3 \;;$$

für $x = 2a$, $y = \pi a$ wird daher

$$OX = O'Y = \frac{16}{3}\pi a^3(\pi - \frac{8}{15}),$$

und damit folgt

$$X = \frac{2}{15}a\frac{15\pi - 8}{3\pi - 4} = 0,9616\ldots a\,,$$

$$Y = a(\pi - \frac{8}{15}) = 2,6083\ldots a\,.$$

§. 51.

Die Berechnung des Schwerpunktes von der Oberfläche eines Kettenconoids, welches durch die Umdrehung der in §. 33 in Betrachtung gezogenen Kettenlinie um ihre Achse, die Achse der y, entsteht, zeigt keine Schwierigkeit. Man hat zuerst

$$O = 2\pi\int_0^x dx\,.\,\frac{ds}{dx}x = \pi\int_0^x dx\,.\,x\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right)$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}px\left(e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}\right) - \frac{1}{2}p^2\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right) + p^2\right]$$

$$= 2\pi(Lx - py + p^2)\,.$$

Ebenso wird dann

$$OY = 2\pi\int_0^x dx\,.\,xy\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\pi p\int_0^x dx\,.\,x\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right)^2,$$

und wenn man darin die angezeigte zweite Potenz entwickelt und Glied für Glied integrirt, so erhält man

$$OY = \pi\left[\frac{1}{4}p^2x\left(e^{\frac{2x}{p}} - e^{-\frac{2x}{p}}\right) - \frac{1}{8}p^3\left(e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}\right)^2 + \frac{1}{2}px^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi[Lxy - p(L^2 - x^2)] ,$$

wodurch der Werth von Y berechnet werden kann, wenn man zuvor die Länge des erzeugenden Bogens gefunden hat.

§. 52.

Untersuchen wir nun die Umhüllungsflächen beliebiger Körper, sei es, daß sie von ebenen, oder daß sie von krummen Flächen begrenzt sind.

Wenn ein Körper von ebenen Flächen eingeschlossen ist und die Coordinaten aller Eckpunkte gegeben sind, so hat die Bestimmung des Schwerpunktes dieser Begrenzung keine Schwierigkeit, als die Länge der Rechnung. Denn es ist einmal nach §. 37 leicht zu sehen, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks, das durch die Coordinaten

$$x_1\, y_1\, z_1 \quad , \quad x_2\, y_2\, z_2 \quad , \quad x_3\, y_3\, z_3$$

seiner Eckpunkte gegeben ist, durch die Gleichungen:

$$X = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) ,$$

$$Y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) ,$$

$$Z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

bestimmt wird, während seine Oberfläche durch den Ausdruck:

$$O = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

dargestellt wird, in welchem L, M und N die Projectionen der Fläche O in den drei Coordinaten-Ebenen bezeichnen und die Ausdrücke:

$$L = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$M = \frac{1}{2}[z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)] ,$$

$$N = \frac{1}{2}[y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)] ,$$

ersetzen. Zerlegt man nun die ganze Umhüllungsfläche in Dreiecke, so wird man ihren Schwerpunkt auf dieselbe Weise wie den eines ebenen Vielecks berechnen können, und zwar mittels der Gleichungen:

$$O = O' + O'' + O''' + \text{etc.} = \Sigma . O' ,$$

$$OX = O'x' + O''x'' + O'''x''' + \text{etc.} = \Sigma . O'x' ,$$

$$OY = \Sigma . O'y' \quad , \quad OZ = \Sigma . O'z' ,$$

in welchen O', O'', etc. die Oberflächen der einzelnen Dreiecke, x', x'', etc., y', y'', etc., z', z'', etc. die Coordinaten ihrer Schwerpunkte vorstellen.

§. 53.

Der Schwerpunkt von der Mantelfläche einer Pyramide liegt offenbar in einer zur Grundfläche parallelen Ebene, welche die Schwerpunkte aller Seitenflächen enthält und demnach von jener um ein Drittheil der Höhe entfernt ist, aber im Allgemeinen nicht auf der Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt des Umfanges der Grundfläche verbindet, wie man vielleicht zu glauben geneigt wäre. Denn ist abcde, Fig. 51, der parallele Schnitt, in welchem der Schwerpunkt liegt, so kann man sich das Gewicht der Seitenfläche ABS der Pyramide in der Mitte m der Geraden ab, das der Seite BCS in der Mitte n von bc, u. s. f. vereinigt denken, und die Kräfte, welche nun in den Punkten m, n, etc. angreifen, werden nicht den Seiten ab, bc, etc. selbst, sondern den Quadraten derselben proportional sein; der Mittelpunkt dieser Kräfte, d. i. der Schwerpunkt der Umhüllungsfläche der Pyramide wird also im Allgemeinen nicht mit dem Schwerpunkte des Polygons abcde zusammenfallen.

Für eine parallel abgeschnittene Pyramide findet man ebenso mittels der für das Trapez erhaltenen Werthe, daß der Schwerpunkt in einer zur Grundfläche parallelen Ebene liegt, deren Entfernung z von ihr durch die Gleichung:

$$z = \frac{1}{3} h \frac{A + 2a}{A + a}$$

ausgedrückt wird, worin A und a zwei entsprechende Seiten der beiden Grundflächen vorstellen. Die Lage des Schwerpunktes in dieser Ebene muß dann besonders bestimmt werden, wozu der vorhergehenden Betrachtung zufolge dieselben Formeln wie bei dem ebenen Vielecke dienen können, wenn man darin statt der Seiten desselben deren Quadrate

einführt. Bezeichnet man also die Seiten des vorher bestimmten parallelen Schnittes und die Coordinaten seiner Eckpunkte in derselben Ebene genommen beziehungsweise mit

$$a\,,\ b\,,\ c\,,\ \text{etc.}\quad,\qquad x'y',\ x''y'',\ x'''y''',\ \text{etc.}\,,$$

so hat man die Gleichungen:

$$O_1 X = \frac{1}{2}a^2(x'+x'') + \frac{1}{2}b^2(x''+x''') + \frac{1}{2}c^2(x'''+x'''') + \text{etc.}\,,$$

$$O_1 Y = \frac{1}{2}a^2(y'+y'') + \frac{1}{2}b^2(y''+y''') + \frac{1}{2}c^2(y'''+y'''') + \text{etc.}\,,$$

wo dann O_1 nicht die Oberfläche der Pyramide selbst, sondern die Summe: $a^2 + b^2 + c^2 + \text{etc.}$, welcher dieselbe proportional ist, vorstellt.

Nach der bekannten Aehnlichkeit in den Verhältnissen bei der Pyramide und beim Kegel wird man nach dem Vorhergehenden auch auf die Lage des Schwerpunktes eines schiefen Kegels schließen, wenigstens die Lage der Ebene bestimmen können, welche denselben enthält; die vollständige Bestimmung des Schwerpunktes erfordert aber immer die Anwendung der allgemeinen Gleichungen, welche dazu dienen, die Lage des Schwerpunktes für eine beliebige krumme Fläche zu berechnen, und die wir nun ableiten wollen.

§. 54.

Sei BCDE, Fig. 52, ein Flächenstück, das durch die beiden Coordinatenebenen der yz und xz und zwei dazu parallele Ebenen PDEe und OCEe, deren Entfernungen von jenen beziehungsweise x und y sind, von einer krummen Fläche abgeschnitten wird, welche durch eine Gleichung gegeben sei von der Form:

$$z = f(x, y)\ .$$

Der Anblick der Figur zeigt dann, daß wenn die Entfernung x um $Pp = \Delta x$ wächst, das genannte Flächenstück um die krumme Fläche DEGd zunimmt, deren Oberfläche mit $\Delta_x O$ bezeichnet werden kann, wenn O die Oberfläche von BCDE ausdrückt. Auf gleiche Weise wird die letztere um die Fläche CEFc wachsen, wenn die Entfernung y der zu der xz parallelen begrenzenden Ebene um $Qq = \Delta y$ größer wird und x unverändert bleibt. Läßt man aber die beiden Veränderlichen x und y zugleich wachsen, die eine um $\Delta x = Pp$, die andere um $\Delta y = Qq$, so wird die Fläche O nicht nur um die beiden vorhergenannten Flächenstücke größer, sondern auch noch um die Fläche EFGH,

welche entweder als neue Vergrößerung des Zuwachses $\Delta_x O$ in Folge der Vergrößerung von y oder als neue Vergrößerung des Zuwachses CEFc $= \Delta_y O$ in Folge der Vergrößerung von x angesehen und deßhalb mit $\Delta_y . \Delta_x O$ oder mit $\Delta_x \Delta_y O$ oder einfach mit $\Delta^2 O$ bezeichnet werden kann. Die Projection dieser Aenderung zweiter Ordnung in der Ebene der xy ist offenbar ein Rechteck efgh, dessen Seiten Δx und Δy sind, und dessen Oberfläche durch das Product $\Delta x \Delta y$ gemessen wird. — Es ist nun nach den früheren ähnlichen Betrachtungen einleuchtend, daß die krumme Fläche EFGH $= \Delta^2 O$ bald größer, bald kleiner sein wird, als das durch die vier Ebenen EFfe, EGge, FHhf, GHhg von der Tangential-Ebene im Punkte E abgeschnittene Parallelogramm, welches dasselbe Rechteck efgh zur Projection hat, daß aber das Verhältniß der krummen Fläche EFGH zu ihrer Projection efgh von dem Verhältnisse jenes Parallelogramms zu demselben Rechteck nur um solche Größen verschieden sein wird, welche verschwinden, wenn man in den Punkt E zurückkehrt, daß also die Anfangswerthe beider Verhältnisse gleich sind. Das zweite dieser Verhältnisse wird nun, wie leicht zu sehen, durch die Secante des Winkels ν ausgedrückt, den die Tangential-Ebene in E mit der Ebene der xy oder den die Normale in demselben Punkte mit der Achse der z bildet; man hat daher *)

$$\text{Anf.}\ \frac{\Delta^2 O}{\Delta x \Delta y} = \frac{d^2 O}{dx\,dy} = \sec\nu\ ,$$

oder mit dem in §. 34 der Einl. gegebenen Werthe von $\cos\nu$, welcher der obigen Form für die Gleichung der Fläche entspricht,

$$\frac{d^2 O}{dx\,dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\ ,$$

*) Bezeichnet man die Oberfläche der Projection des entsprechenden Flächenstückes in der Ebene der xy mit O_1, so hat man

$$\frac{d^2 O_1}{dx\,dy} = 1$$

und demnach

$$\frac{d^2 O_1}{dx\,dy} = \frac{d^2 O}{dx\,dy} \cos\nu\ ;$$

man kann also sagen, das Aenderungsgesetz der Oberfläche O_1 in Bezug auf die Veränderlichen x und y sei die Projection des entsprechenden Aenderungsgesetzes der Oberfläche O in der Ebene der xy.

und die Gleichungen (18) nehmen damit die Form an:

$$34.)\begin{cases} O = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}, \\ OX = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}, \\ OY = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . y\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}, \\ OZ = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . f(x,y)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}. \end{cases}$$

In allen diesen Ausdrücken werden die innern Integrale in Bezug auf y genommen, als wenn x unveränderlich wäre, und zwar zwischen den Grenzen, welche jener Veränderlichen für einen bestimmten Werth der letztern zukommen, und die entweder unveränderlich oder Functionen von x sind. Man bestimmt diese Grenzen am einfachsten dadurch, daß man in einer beliebigen Entfernung x von der Ebene der yz einen zur Achse der x senkrechten Schnitt durch die gegebene Fläche führt und die Werthe von y für die Endpunkte der in dem begrenzten Flächenstücke entstandenen Schnittcurve in Function des Abstandes x ausdrückt. Auf diese Weise werden also die innern Integrale nach ihrer Entwickelung Functionen der einzigen Veränderlichen x, und es können dann die äußern Integrale nach dem gewöhnlichen Verfahren in geschlossenen Ausdrücken oder annäherungsweise erhalten werden. Daß die Ordnung der Integration auch umgekehrt werden darf, was der leichtern Behandlung wegen bisweilen nothwendig wird, braucht wohl nur bemerkt zu werden.

Auf ähnliche Weise, wie vorher geschehen, kann auch das Aenderungsgesetz der Oberfläche eines krummen Flächenstückes in Bezug auf Polar-Coordinaten ausgedrückt und damit in entsprechenden Fällen dessen Oberfläche und die Lage seines Schwerpunktes berechnet werden.

Dazu sei die Achse der z die Polar-Achse, von welcher aus der Winkel ϑ, die Ebene der xz die feste Ebene, von welcher an der Winkel ω gemessen wird, so daß man (§. 11 der Einleitung) zwischen den rechtwinkligen und diesen Polar-Coordinaten die Beziehungen hat:

$$x = r \sin\vartheta \cos\omega \quad , \quad y = r \sin\vartheta \sin\omega \quad , \quad z = r \cos\vartheta \; ,$$
$$x^2 + y^2 = r_{,}^2 = r^2 \sin^2\vartheta \; .$$

Wird nun auf einer krummen Fläche, deren Gleichung hier die Form habe:

$$r = f(\omega, \vartheta) \; ,$$

ein Stück BCM, Fig. 53, einerseits von der Ebene der xz, anderseits von der Ebene BAM des Winkels ϑ, welche mit der Ebene der xz den Winkel ω einschließt, und von einer Kegelfläche ACM begrenzt, deren Erzeugende mit der Achse der z den Winkel ϑ bildet, so erhält man als Projection dieses Flächenstückes in der Ebene der xy den Sector mAc, dessen begrenzende Curve mc durch die Gleichung:

$$r_{,} = f_{,}(\omega)$$

vorgestellt wird, da für dieselbe ϑ als constant zu betrachten ist, und wir haben nach §. 42 als Aenderungsgesetz der Oberfläche $O_{,}$ dieses Sectors in Bezug auf $r_{,}$ und ω den Ausdruck:

$$\frac{d^2 O_{,}}{dr_{,} d\omega} = r_{,} = r \sin\vartheta \; .$$

Dieses Aenderungsgesetz ist aber wie vorher die Projection des Aenderungsgesetzes der Oberfläche O des krummen Flächenstückes BCM, und man hat demnach, wenn wieder ν den Winkel zwischen der Normalen in M und der Achse der z bezeichnet, die Beziehungen:

$$\frac{d^2 O_{,}}{dr_{,} d\omega} = \frac{d^2 O}{dr_{,} d\omega} \cos\nu \quad , \quad \frac{d^2 O}{dr_{,} d\omega} = \frac{d^2 O_{,}}{dr_{,} d\omega} \sec\nu \; ,$$

und wenn man nun statt $r_{,}$ die Veränderliche ϑ als unabhängige einführt, mit der Beachtung, daß man hat

$$\frac{dr_{,}}{d\vartheta} = \frac{dr}{d\vartheta} \sin\vartheta + r \cos\vartheta \; ,$$

und mit dem vorhergehenden Werthe des Aenderungsgesetzes von $O_{,}$, so ergibt sich

$$\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta} = r \sin\vartheta \left(\frac{dr}{d\vartheta} \sin\vartheta + r \cos\vartheta \right) \sec\nu \; .$$

Es handelt sich also nur noch darum, den Ausdruck von $\sec\nu$ in Polar-Coordinaten darzustellen. Dazu hat man einmal aus $z = r \cos\vartheta$ die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dr}{dx} \cos\vartheta - r \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dx} \quad , \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dr}{dy} \cos\vartheta - r \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dy} \quad (a.$$

und dann aus den Gleichungen:

$$y = x \tang \omega \quad , \quad x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$$

die weitern Aenderungsgesetze:

b.) $\frac{d\omega}{dx} = -\frac{\sin\omega \cos\omega}{x} = -\frac{\sin\omega}{r \sin\vartheta}$, $\frac{d\omega}{dy} = \frac{\cos^2\omega}{x} = \frac{\cos\omega}{r \sin\vartheta}$,

c.) $\frac{dr}{dx} = \frac{\cos\omega}{\sin\vartheta} - \frac{r \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \frac{d\vartheta}{dx}$, $\frac{dr}{dy} = \frac{\sin\omega}{\sin\vartheta} - \frac{r \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \frac{d\vartheta}{dy}$.

Die letztern Werthe geben in die Gleichungen (a) eingeführt sofort die neuen:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\cos\omega \cos\vartheta}{\sin\vartheta} - \frac{r}{\sin\vartheta} \frac{d\vartheta}{dx} \quad , \quad \frac{dz}{dy} = \frac{\sin\omega \cos\vartheta}{\sin\vartheta} - \frac{r}{\sin\vartheta} \frac{d\vartheta}{dy} ,$$

in welchen nun noch die Aenderungsgesetze $\frac{d\vartheta}{dx}$ und $\frac{d\vartheta}{dy}$ durch $\frac{dr}{d\vartheta}$ und $\frac{dr}{d\omega}$ zu ersetzen sind. Man hat aber auch

$$\frac{dr}{dx} = \frac{dr}{d\omega} \frac{d\omega}{dx} + \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dx} \quad , \quad \frac{dr}{dy} = \frac{dr}{d\omega} \frac{d\omega}{dy} + \frac{dr}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dy} ,$$

und wenn diese Beziehungen mit den Gleichungen (b) und (c) verbunden werden, so erhält man leicht die Werthe für $\frac{d\vartheta}{dx}$ und $\frac{d\vartheta}{dy}$ und findet damit sofort

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\cos\vartheta \cos\omega}{\sin\vartheta} - \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{r \cos\omega + \frac{dr}{d\omega} \sin\omega}{r \frac{dr}{d\vartheta} \sin\vartheta + r^2 \cos\vartheta} ,$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\cos\vartheta \sin\omega}{\sin\vartheta} - \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{r \sin\omega - \frac{dr}{d\omega} \cos\omega}{r \frac{dr}{d\vartheta} \sin\vartheta + r^2 \cos\vartheta} .$$

Führt man endlich diese letztern Werthe in den obenbemerkten Ausdruck für $\cos\nu$ ein, so ergibt sich damit nach mehrfachen Reductionen das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d^2 O}{d\omega\, d\vartheta} = r\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}\sin^2\vartheta + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2};$$

die Ausdrücke zur Berechnung der Oberfläche O und der Momente $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$ und $O\mathfrak{Z}$ werden darnach folgende:

$$\left.\begin{aligned}
O &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega \,.\int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta \,.\, r\sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}\sin^2\vartheta + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\\
O\mathfrak{X} &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega. \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . r^2 \sin\vartheta \cos\omega \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}\sin^2\vartheta + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\\
O\mathfrak{Y} &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega. \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . r^2 \sin\vartheta \sin\omega \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}\sin^2\vartheta + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}\\
O\mathfrak{Z} &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega. \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . r^2 \cos\vartheta \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right\}\sin^2\vartheta + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}
\end{aligned}\right\} . (34^a.$$

Für diese doppelten Integrale sind in Betreff der Grenzen der Veränderlichen dieselben Rücksichten zu beachten, wie vorher. In unserm jetzigen Falle wird man entweder die gegebene Fläche durch eine Ebene schneiden, welche durch die Achse der z geht und einen beliebigen Winkel ω mit der Ebene der xz einschließt, und die Werthe von ϑ für die Endpunkte der Schnittcurve, in Function von ω ausgedrückt, als die Grenzen γ und γ_0 in das innere Integral einführen, oder man wird die Grenzen von ω in einem Schnitte mit einer Kegelfläche, deren Erzeugende mit der Achse der z einen beliebigen Winkel ϑ einschließt, in Function dieser letztern Veränderlichen ausdrücken, also ω von ϑ abhängig machen und demnach zuerst in Bezug auf ω integriren.

Der einfachste Fall ist derjenige, wo die gegebene Fläche eine Umdrehungsfläche und das zu berechnende Stück ein Sector ist, der von zwei durch die geometrische Achse gelegten Ebenen begrenzt wird. Man hat dann als Gleichung der Fläche in Bezug auf diese Achse

$$r = f(\vartheta)$$

und daher $\frac{dr}{d\omega} = 0$; und wenn die eine begrenzende Ebene als Ebene

der xz genommen, ihr Winkel mit der andern durch α bezeichnet wird, so nehmen die vorhergehenden Ausdrücke die Form an:

$$
34^b.)\quad \left\{
\begin{aligned}
O &= \alpha \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta \,.\, r \sin\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,, \\
OX &= \sin\alpha \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta \,.\, r^2 \sin^2\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,, \\
OY &= (1 - \cos\alpha) \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta \,.\, r^2 \sin^2\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,, \\
OZ &= \alpha \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta \,.\, r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Für einen ganzen Ring der Umdrehungsfläche hat man $\omega = 2\pi$; es werden daher OX und OY Null, und die Werthe von O und OZ kommen, wie man leicht sehen wird, auf die Gleichungen (33) zurück, wenn die Coordinaten-Achsen entsprechend geändert werden; denn man hat bekanntlich (vergl. Gl. (83) §. 73 des I. Buches)

$$
\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2} = \frac{ds}{d\vartheta}\,, \qquad r \sin\vartheta = y\,,
$$

woraus das Uebrige von selbst folgt.

§. 55.

Als Anwendung der Gleichungen (34) sei zuerst die Aufgabe gestellt, den Schwerpunkt von der Oberfläche BCD eines **Kugelschnittes**, Fig. 54, zu bestimmen, welcher von den Ebenen der xy, der yz und einer durch die Achse der x gelegten Ebene CAD in einer Kugel gebildet wird, die ihren Mittelpunkt im Anfangspunkte hat. Die Gleichung dieser Kugelfläche:

$$
x^2 + y^2 + z^2 = r^2
$$

gibt die Aenderungsgesetze:

$$
\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}\,, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}\,,
$$

und damit findet man

$$O = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = r \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \frac{1}{\sqrt{r'^2 - y^2}} ,$$

worin $r^2 - x^2$ zur Abkürzung durch r'^2 ersetzt ist.

Die Grenzen Y und y_0 sind die Grenzwerthe von y in dem Schnitte EFG, dessen Entfernung AF von der Ebene der yz gleich x ist; diese Werthe sind daher

$$Y = FG = \sqrt{r^2 - x^2} = r' \quad , \qquad y_0 = EH = r' \cos\alpha ,$$

wenn α den Winkel BAC zwischen der Ebene CAD und der Ebene der xy bezeichnet. Die Grenzen von x dagegen sind diejenigen, welche die Entfernung des Schnittes EFG von der Ebene der yz erhalten kann, also

$$X = r \quad , \qquad x_0 = 0 .$$

Damit wird dann zuerst

$$\int_{r'\cos\alpha}^{r'} dy . \frac{1}{\sqrt{r'^2 - y^2}} = \mathop{\Delta_y}_{r'\cos\alpha}^{r'} . \arcsin \frac{y}{r'} = \frac{1}{2}\pi - \arcsin . \cos\alpha$$

$$= \arccos . \cos\alpha = \alpha$$

und folglich

$$O = r\alpha \int_0^r dx . 1 = r^2 \alpha .$$

Ferner findet man

$$O\mathfrak{X} = r \int_0^r dx . \int_{r'\cos\alpha}^{r'} dy . \frac{x}{\sqrt{r'^2 - y^2}} = \alpha r \int_0^r dx . x = \frac{1}{2} \alpha r^3 ,$$

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{2} r ,$$

$$O\mathfrak{Y} = r \int_0^r dx . \int_{r'\cos\alpha}^{r'} dy . \frac{y}{\sqrt{r'^2 - y^2}} = r \int_0^r dx . r' \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$= r \sin\alpha \int_0^r dx . \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{4} \pi r^3 \sin\alpha ,$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{4} \pi r \frac{\sin\alpha}{\alpha} ,$$

und zuletzt hat man

$$O\mathfrak{Z} = r\int_0^r dx . \int_{r'\cos\alpha}^{r} dy \, . \, 1 = r\int_0^r dx . r'(1-\cos\alpha)$$

$$= r(1-\cos\alpha)\int_0^r dx . \sqrt{r^2-x^2} = \frac{1}{4}\pi r^3(1-\cos\alpha) ,$$

woraus als dritte Ordinate

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{4}\pi r \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \frac{1}{4}\pi r \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha}$$

folgt. Dieselben Werthe ergeben sich sehr einfach mit der entsprechenden Rücksicht auf die Lage der Coordinatenachsen aus den Gleichungen 34^b, worin im jetzigen Falle r constant, $\frac{dr}{d\vartheta} = 0$ wird, und ϑ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist. Die weitere Ausführung soll daher dem Leser überlassen bleiben.

Für den von den drei Coordinaten-Ebenen begrenzten Theil, einen Achttheil der Kugelfläche, hat man $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, und die vorhergehenden Ausdrücke geben

$$O = \frac{1}{2}\pi r^2 \quad , \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{2} r \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{1}{2} r \quad , \quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{2} r .$$

Man schließt ferner aus denselben Ausdrücken, daß der Schwerpunkt eines von zwei größten Kreisen begrenzten Theiles der Kugelfläche durch die Gleichungen:

$$O = 4\alpha r^2 \quad , \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{4}\pi r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

bestimmt wird, wenn man den Winkel zwischen den Ebenen dieser größten Kreise mit 2α bezeichnet, ihre Durchschnittslinie als Achse der y annimmt und die Ebene der xy jenen Winkel halbiren läßt.

§. 56.

Durch einfache Ergebnisse sind noch folgende Untersuchungen bemerkenswerth, welche als Uebungen für die Bestimmung der Grenzen bei den doppelten Integralen hier einen Platz finden mögen.

Eine Kugel- und eine Cylinder-Fläche, deren Gleichungen die Formen haben:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,$$
$$z^2 = rx - x^2 ,$$

von denen also die erstere ihren Mittelpunkt im Anfangspunkte hat, während die letztere, deren Durchmesser dem Halbmesser der erstern gleich ist, auf der Ebene der xz senkrecht steht und die Ebene der yz längs der Achse der y berührt, durchschneiden sich gegenseitig; es sollen die Schwerpunkte der abgeschnittenen Flächentheile gesucht werden.

Betrachten wir zuerst die Cylinderfläche ACBFD, Fig. 55, die von der Kugelfläche und den Ebenen der xy und xz begrenzt wird. Die Gleichung derselben:

$$z^2 = rx - x^2$$

gibt die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{r - 2x}{2z}, \quad \frac{dz}{dy} = 0, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{rx - x^2}},$$

wodurch man hat

$$O = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{rx - x^2}} = \int_{x_0}^{X} dx . \frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{rx - x^2}} \int_{y_0}^{Y} dy . 1,$$

da der Ausdruck $\frac{\frac{1}{2}r}{\sqrt{rx - x^2}}$ in Bezug auf y als unveränderlich zu betrachten ist. Die Grenzen y_0 und Y entsprechen offenbar dem Anfangspunkte J und dem Endpunkte F der Erzeugenden der Cylinderfläche in einem Schnitte, der parallel zur Ebene der yz und um x von ihr entfernt ist, oder den Grenzen der zur Achse der y parallelen und der Abscisse x entsprechenden Ordinate FJ der Durchschnittscurve DFB der beiden Flächen; es ist aber FJ auch der Ordinate GK der Projection dieser Curve in der Ebene der xy gleich und demnach durch die Gleichung dieser Projection gegeben. Eliminirt man also die Veränderliche z aus den Gleichungen der beiden Flächen, so erhält man

$$y^2 = r^2 - rx$$

als Gleichung der Parabel BGD und demnach $Y = \sqrt{r^2 - rx}$, $y_0 = 0$. Die Grenzen von x dagegen sind wieder diejenigen, innerhalb denen noch ein Schnitt wie FGJK gemacht werden kann, und daher einfach $X = r$, $x_0 = 0$. Man hat also

$$O = \frac{1}{2}r \int_0^r dx . \frac{1}{\sqrt{rx - x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} dy . 1 = \frac{1}{2}r \int_0^r dx . \frac{\sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{rx - x^2}}$$

oder, wie nun leicht zu finden ist,

$$O = r^2 ;$$

die Oberfläche des ganzen von der Kugelfläche eingeschlossenen cylindrischen Flächenstückes ist demnach $4r^2$ oder gleich dem Quadrate des Durchmessers der Kugel.

Hätte man bei dieser Ausführung die Ordnung in der Integration umgekehrt und die Grenzen von x von y abhängig gemacht, so hätte man $X = GH = \frac{r^2 - y^2}{r}$, $x_0 = 0$ gefunden, da diese Grenzen von x dann den Grenzen des Bogens FEH in einem um y von der Ebene der xz entfernten Schnitte entsprechen; die Grenzen von y sind $y_0 = 0$, $Y = r$, und damit hat man

$$O = \frac{1}{2} r \int_0^r dy . \int_0^{\frac{r^2-y^2}{r}} dx . \frac{1}{\sqrt{rx - x^2}} = \frac{1}{2} r \int_0^r dy . \arccos \frac{\frac{1}{2}r - \frac{r^2 - y^2}{r}}{\frac{1}{2}r}$$

$$= \frac{1}{2} r \int_0^r dy . \arccos \frac{2y^2 - r^2}{r^2} .$$

Setzt man dann in diesem Ausdruck $\arccos \frac{2y^2 - r^2}{r^2} = \varphi$, so wird

$$y = r \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} = r \cos \frac{1}{2} \varphi \;, \quad \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{1}{2} r \sin \frac{1}{2} \varphi \;,$$

und für die Grenzen hat man $\varphi = 0$, wenn $y = r$, und $\varphi = \pi$, wenn $y = 0$ ist; mithin findet man

$$O = \frac{1}{4} r^2 \int_\pi^0 d\varphi . -\varphi \sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{4} r^2 \int_0^\pi d\varphi . \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi$$

$$= \frac{1}{4} r^2 \overset{\pi}{\underset{0}{\Delta}} . (4 \sin \frac{1}{2} \varphi - 2 \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi) = r^2 .$$

Es ergibt sich nun ferner

$$OX = \frac{1}{2} r \int_0^r dx . \frac{x}{\sqrt{rx - x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} dy . 1 = \frac{1}{2} r \int_0^r dx . \sqrt{rx} ,$$

also auch

$$O\mathfrak{X} = \frac{1}{3} r^3 \quad , \quad \mathfrak{X} = \frac{1}{3} r \; ;$$

$$O\mathfrak{Y} = \frac{1}{2} r \int_0^r dx \, . \frac{1}{\sqrt{rx - x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} dy \, . \, y = \frac{1}{4} r^2 \int_0^r dx \, . \frac{r - x}{\sqrt{rx - x^2}} \, ,$$

und da man nach früher behandelten Ausdrücken

$$\int dx \, . \frac{r - x}{\sqrt{rx - x^2}} = \Delta_x \, . \left(\sqrt{rx - x^2} + \frac{1}{2} r \arccos \frac{r - 2x}{r} \right)$$

erhält, so folgt daraus

$$O\mathfrak{Y} = \frac{1}{8} \pi r^3 \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{1}{8} \pi r \, .$$

Endlich findet man

$$O\mathfrak{Z} = \frac{1}{2} r \int_0^r dx \, . \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} dy \, . \, 1 = \frac{1}{2} r \int_0^r dx \, . \sqrt{r^2 - rx} \, ,$$

$$O\mathfrak{Z} = \frac{1}{3} r^3 \quad , \quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{3} r \, .$$

Der Schwerpunkt der ganzen in der Kugel eingeschlossenen Cylinderfläche hat sonach die Coordinaten:

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{3} r \quad , \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0 \, .$$

Um auf die gegenwärtige Aufgabe die Gleichungen (34[a]) in Polar-Coordinaten anzuwenden, wird man am besten thun, die Achse der z parallel zur Erzeugenden der Cylinderfläche zu nehmen, die Ebene der xz durch die Achse derselben zu legen, den Pol aber im Mittelpunkt der Kugel zu lassen; bezeichnet dann $\mathfrak{r}$ den veränderlichen Fahrstrahl für die Punkte der Cylinderfläche, so wird deren Gleichung die einfache Form erhalten:

$$\mathfrak{r} = r \frac{\cos \omega}{\sin \vartheta} \, ,$$

worin r noch dem Durchmesser der Cylinderfläche oder dem Halbmesser der Kugel gleich ist. Man zieht daraus

$$\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta} = - r \frac{\cos \omega \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \quad , \quad \frac{d\mathfrak{r}}{d\omega} = - r \frac{\sin \omega}{\sin \vartheta}$$

und findet damit

$$\mathfrak{r}\sqrt{\left\{\mathfrak{r}^2+\left(\frac{d\mathfrak{r}}{d\vartheta}\right)^2\right\}\sin^2\vartheta+\left(\frac{d\mathfrak{r}}{d\omega}\right)^2}=\mathfrak{r}^2\frac{\cos\omega}{\sin^2\vartheta}\;.$$

Beachtet man dann, daß die eine Grenze von ϑ in einem durch die Achse der z geführten ebenen Schnitte, welcher den Winkel ω mit der Ebene der xz einschließt, $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ ist, während die andere sich durch Verbindung der obigen Gleichung der Cylinderfläche mit der Gleichung der Kugelfläche:

$$\mathfrak{r}=r$$

ergibt, wodurch die Beziehung:

$$\sin\vartheta=\cos\omega\quad,\qquad \vartheta=\frac{1}{2}\pi-\omega$$

zum Vorschein kommt, so hat man

$$O=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}d\vartheta.-r^2\frac{\cos\omega}{\sin^2\vartheta}=r^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\cos\omega.\mathop{\Delta}_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}.\cot\vartheta$$

$$=r^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\sin\omega=r^2\;.$$

Nach diesem findet man nun leicht die weitern Beziehungen und Werthe:

$$O\mathfrak{X}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}d\vartheta.-\mathfrak{r}\sin\vartheta\cos\omega.r^2\frac{\cos\omega}{\sin^2\vartheta}=r^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}d\vartheta.-\frac{\cos^3\omega}{\sin^2\vartheta}$$

$$=r^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\sin\omega\cos^2\omega=\frac{1}{3}r^3\;,$$

$$O\mathfrak{Y}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}d\vartheta.-\mathfrak{r}\sin\vartheta\sin\omega.r^2\frac{\cos\omega}{\sin^2\vartheta}=r^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}d\vartheta.-\frac{\sin\omega\cos^2\omega}{\sin^2\vartheta}$$

$$=r^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\sin^2\omega\cos\omega=\frac{1}{3}r^3\;,$$

$$O\mathfrak{Z}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}d\vartheta.-\mathfrak{r}\cos\vartheta.r^2\frac{\cos\omega}{\sin^2\vartheta}=r^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}d\vartheta.-\frac{\cos^2\omega\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}$$

$$=r^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.\mathop{\Delta}_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi-\omega}.\frac{1}{2\sin^2\vartheta}=\frac{1}{4}r^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\omega.(1-\cos2\omega)=\frac{1}{8}\pi r^3,$$

welche mit den oben gefundenen übereinstimmen.

§. 57.

Etwas weniger einfach sind die Ausdrücke für die Coordinaten des Schwerpunktes des Kugelflächenstückes BCDE, Fig. 56, welches von der obengenannten Cylinderfläche und der Ebene der xy begrenzt wird.

Zuerst erhält man mittels der Gleichung der Kugel, wie in §. 55, aber mit Umänderung der Ordnung in der Integration

$$O = r\int_{y_0}^{Y} dy . \int_{x_0}^{X} dx . \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = r\int_{y_0}^{Y} dy . \int_{x_0}^{X} dx . \frac{1}{\sqrt{r'^2-x^2}} ,$$

indem man nun r^2-y^2 durch r'^2 ersetzt; X und x_0 sind nun die Grenzen des Bogens CE, nämlich

$$X = GC = \sqrt{r^2-y^2} = r' \quad , \quad x_0 = GF = \frac{r^2-y^2}{r} = \frac{r'^2}{r},$$

da die letztere durch dieselbe Parabel bestimmt wird, die im vorigen §. benützt wurde; die Grenzen von y dagegen sind wieder r und 0, und es wird dadurch

$$O = r\int_0^r dy . \int_{r'}^{\frac{r'^2}{r}} dx . - \frac{1}{\sqrt{r'^2-x^2}} = r\int_0^r dy . \arccos\frac{r'}{r} .$$

Macht man dann $r^2-y^2 = r^2\cos^2\varphi$, woraus

$$y = r\sin\varphi \quad , \quad \frac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi$$

und die Grenzen: $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ für $y = r$, $\varphi = 0$ für $y = 0$ folgen, so erhält man

$$O = r^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi . \varphi\cos\varphi = r^2(\frac{1}{2}\pi - 1) = \frac{1}{2}\pi r^2 - r^2$$

und schließt daraus, daß das von den Ebenen der xz und yz und von der Cylinderfläche begrenzte Stück der Kugelfläche das Quadrat des Halbmessers zur Oberfläche hat und demnach dem entsprechenden Stück der eingeschlossenen Cylinderfläche, daß also auch die von der Halbkugel übrig bleibende Fläche der darin eingeschlossenen Cylinderfläche an Flächeninhalt gleich ist.

Dieser Werth ergibt sich wieder sehr einfach mittels der ersten der Gleichungen (34ᵃ); denn man hat für die Kugel

$$\frac{d^2O}{d\omega\, d\vartheta} = r^2\sin\vartheta ,$$

und für das betreffende Stück derselben erhält ϑ dieselben Grenzen wie im vorhergehenden §. (die Erzeugende der Cylinderfläche parallel zur Achse der z vorausgesetzt); es wird daher

$$O = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \,.\, \int_{\frac{1}{2}\pi-\omega}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, r^2 \sin\vartheta = r^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \,.\, \cos\omega = r^2 \,.$$

Für das vorher betrachtete Flächenstück BCDE hat man sodann die Momente:

$$O\mathfrak{X} = r\int_0^r dy \,.\, \int_{r'}^{\frac{r'^2}{r}} dx \,.\, \frac{-x}{\sqrt{r'^2-x^2}} = \int_0^r dy \,.\, y\sqrt{r^2-y^2} = \frac{1}{3} r^3 \,,$$

$$O\mathfrak{Y} = r\int_0^r dx \,.\, \int_{\sqrt{r^2-rx}}^{r_,} dy \,.\, \frac{y}{\sqrt{r_,^2-y^2}} = r\int_0^r dx \,.\, \sqrt{rx-x^2} \,,$$

in deren letzterem $r_,$ für $\sqrt{r^2-x^2}$ steht und die Ordnung der Integration geändert ist; ferner hat man

$$\int dx \,.\, \sqrt{rx-x^2} = \Delta . \left[\frac{1}{8} r^2 \operatorname{arc\,cos} \frac{r-2x}{r} - \frac{1}{4}(r-2x)\sqrt{rx-x^2}\right],$$

also zwischen den angezeigten Grenzen

$$O\mathfrak{Y} = \frac{1}{8}\pi r^3 \,.$$

Endlich ergibt sich noch

$$O\mathfrak{Z} = r\int_0^r dy \,.\, \int_{\frac{r'^2}{r}}^{r'} dx \,.\, 1 = \int_0^r dy \,.\, r'(r-r') \,,$$

und wenn für r' dessen Werth eingeführt wird,

$$O\mathfrak{Z} = \frac{1}{4}\pi r^3 - \frac{2}{3} r^3 \,.$$

Aus diesen Werthen zieht man

$$\mathfrak{X} = \frac{2}{3(\pi-2)} r = 0{,}58397..r \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{\pi r}{4(\pi-2)} = 0{,}68797..r \,,$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{6} r \, \frac{3\pi-8}{\pi-2} = 0{,}20801..r \;;$$

für das ganze auf der positiven Seite der y gelegene, von der Cylinderfläche begrenzte Stück der Kugelfläche bleiben die Werthe von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ dieselben, $\mathfrak{Z}$ dagegen wird Null.

Zuletzt wird man auf dieselbe Weise für das übrigbleibende Stück des Achttheils der Kugelfläche, dessen Oberfläche oben schon gleich r^2 gefunden wurde, die Momente:

$$O\mathfrak{X} = \frac{1}{12} r^3 (3\pi - 4) \quad , \quad O\mathfrak{Y} = \frac{1}{8} \pi r^3 \quad , \quad O\mathfrak{Z} = \frac{2}{3} r^3$$

erhalten und daraus die Coordinaten:

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{12} r (3\pi - 4) \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{1}{8} \pi r \quad , \quad \mathfrak{Z} = \frac{2}{3} r \quad .$$

berechnen. Die Berechnung dieser Werthe mittels der Gleichungen (34^a) dürfte eine empfehlungswerthe Uebung sein.

III. Schwerpunkt homogener körperlicher Räume.

§. 58.

Die Gleichungen (17) können unmittelbar zur Bestimmung des Schwerpunktes eines körperlichen Raumes angewendet werden, wenn die Begrenzungen desselben gegeben und von der Art sind, daß sie immer durch Ebenen vorgestellt werden können, die mit den Coordinaten-Ebenen parallel bleiben, was natürlich nicht den Fall ausschließt, wo der Raum durch eine stetige krumme Fläche begrenzt wird, da hier die zu der entsprechenden Coordinatenachse senkrechte Tangential-Ebene die in dieser Richtung begrenzende Ebene ist. Die genannten Gleichungen, sowie die ihnen vorausgehenden (15) und (16) beruhen darauf, daß

$$\frac{d^3 V}{dx\,dy\,dz} = 1$$

ist, und davon kann man sich auf ähnliche Weise wie bei den Flächen leicht überzeugen. Denn ist V das Volumen eines Raumes, der nach der einen Seite hin von drei zu den Coordinaten-Ebenen parallelen Ebenen begrenzt wird, deren Entfernungen von jenen beziehungsweise x, y, z sind, so wird die Verrückung der zur yz parallelen Ebene um Δx jenen Raum um einen Zuwachs $\Delta_x V$ vergrößern, und diese

Vergrößerung wird selbst einen Zuwachs zweiter Ordnung $\Delta_y \Delta_x V$ erhalten, wenn auch die zur xz parallele Ebene um Δy weiter gerückt wird; endlich erhält dieser letztere selbst wieder einen Zuwachs dritter Ordnung: $\Delta_z \Delta_y \Delta_x V$, wenn auch die dritte zur xy parallele Ebene von dieser um Δz weiter entfernt wird, und während nun die Gestalt und das Volumen des ersten und zweiten Zuwachses noch von der anderweitigen Begrenzung des Raumes V abhängt, wie man aus der Fig. 57 ersehen wird, erscheint der dritte Zuwachs unter der Gestalt eines senkrechten Parallelepipeds, dessen Kanten Δx, Δy, Δz sind, dessen Volumen daher durch das Product $\Delta x \Delta y \Delta z$ gemessen wird. Man hat demnach mit der Beachtung, daß dieses Parallelepiped dasselbe bleibt, wenn man auch die Ordnung in der Verrückung der begrenzenden Ebenen ändert und z. B. zuerst y, dann z und zuletzt x wachsen läßt, daß man also sein Volumen einfach mit $\Delta^3 V$ bezeichnen kann, die Gleichungen:

$$\Delta^3 V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad , \quad \frac{\Delta^3 V}{\Delta x \Delta y \Delta z} = 1$$

und folglich auch für den Anfangswerth dieses Verhältnisses oder für das Aenderungsgesetz des Volumens in Bezug auf die drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z, die Formen:

$$\frac{d^3 V}{dx\,dy\,dz} = \frac{d.\dfrac{d.\dfrac{dV}{dx}}{dy}}{dz} = 1 \,,$$

aus denen man nach und nach zieht

$$\frac{d.\dfrac{dV}{dx}}{dy} = \int_{z_0}^{Z} dz.1 \quad , \quad \frac{dV}{dx} = \int_{y_0}^{Y} dy.\int_{z_0}^{Z} dz.1 \,,$$

$$V = \int_{x_0}^{X} dx.\int_{y_0}^{Y} dy.\int_{z_0}^{Z} dz.1 \,,$$

wie es in §. 22 bereits angegeben wurde.

Die Gleichungen (17) werden nun auf ähnliche Weise behandelt, wie die Gleichungen (34); die Veränderlichen x, y, z selbst sind, wie bemerkt, unabhängig von einander, ihre Grenzen aber nur in dem Falle, wo der betreffende Raum die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds hat, dessen Seiten parallel zu den Coordinaten-Ebenen sind.

Im Allgemeinen sind die Grenzen von z Functionen von x und y, und die von y Functionen von x; denn die Grenzen von z sind die Abstände der beiden Endpunkte der in dem betreffenden Raume eingeschlossenen Durchschnittslinie zweier Ebenen, die zu den Ebenen der yz und xz parallel und beziehungsweise von ihnen um x und y entfernt sind, sie ändern sich also im Allgemeinen mit der Lage oder Entfernung dieser Ebenen und sind folglich Functionen dieser Entfernungen. Die Grenzen von y sind dann die beiden äußersten Entfernungen von der Ebene der xz, welche die vorhergehende zur Achse der z parallele Gerade in dem zur yz parallelen Schnitte erhalten kann, und ändern sich demnach wieder mit der Lage dieses Schnittes oder mit dem Werthe von x; die Grenzen dieser letztern Veränderlichen endlich sind die Entfernungen der beiden äußersten Schnitte, die durch den gegebenen Raum parallel zur Ebene der yz gemacht werden können, von dieser Ebene, und sind daher unmittelbar gegeben.

Ist demnach das Volumen V von zwei krummen Flächen begrenzt, deren Gleichungen die Formen haben:

$$z = F(x, y) \quad , \quad z' = f_0(x', y') \, ,$$

und hat man zwischen den Grenzen von x und y

$$F(x, y) > f_0(x, y)$$

so kann man $Z = F(x, y)$, $z_0 = f(x, y)$ setzen, und die Gleichungen (17) nehmen die Formen an:

$$\left.\begin{aligned} V &= \int_{x_0}^{X} dx. \int_{y_0}^{Y} dy.[F(x, y) - f_0(x, y)] \\ V\mathrm{X} &= \int_{y_0}^{X} dx. \int_{y_0}^{Y} dy.x[F(x, y) - f_0(x, y)] \\ V\mathrm{Y} &= \int_{x_0}^{X} dx. \int_{y_0}^{Y} dy.y[F(x, y) - f_0(x, y)] \\ V\mathrm{Z} &= \int_{x_0}^{X} dx. \int_{y_0}^{Y} dy.\frac{1}{2}[F^2(x, y) - f_0^2(x, y)] \end{aligned}\right\} . \quad (35.$$

Dieselbe Form behalten diese Ausdrücke, wenn der gegebene Raum von zwei Theilen derselben Fläche begrenzt ist; in diesem Falle sind

dann Z und z_0 zwei Werthe von z, die sich für dieselben Werthe von x und y aus der Gleichung:

$$z = f(x, y)$$

dieser Fläche ergeben. Sie werden dagegen einfacher, wenn eine der begrenzenden Flächen die Ebene der xy ist, für welche man die Gleichung: $z = 0$ hat; es werden dann

$$36.)\ \begin{cases} V = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . f(x, y) \,, & V\mathbf{X} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x f(x, y), \\ V\mathbf{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . y f(x, y) \,, & V\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . f^2(x, y) \end{cases}$$

die Gleichungen, welche zur Berechnung des Schwerpunktes dienen.

§. 59.

In vielen Fällen lassen sich indessen diese doppelten Integrale auf einfache zurückführen. Vergleicht man nämlich den Ausdruck:

$$V = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . 1$$

und zwar die beiden innern Integrale desselben mit dem Werthe (27) von O in §. 35, so sieht man, daß das doppelte Integral:

$$\int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . 1$$

die Oberfläche des in der Entfernung x von der Ebene der yz senkrecht zur Achse der x gemachten ebenen Schnittes ausdrückt, welche bei vielen Körpern unmittelbar in Function von x erhalten werden kann; bezeichnen wir sie also mit $F_{,}(x)$, so hat man sogleich

$$V = \int_{x_0}^{X} dx . F_{,}(x) .$$

Ebenso zeigen die beiden Werthe O$\mathbf{X}$ und O$\mathbf{Y}$ daselbst, daß die doppelten Integrale:

$$\int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . y \quad \text{und} \quad \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . z$$

die Momente: $y_{,}F_{,}(x)$ und $z_{,}F_{,}(x)$ der eben genannten Schnittfläche darstellen, wenn $y_{,}$ und $z_{,}$ die Coordinaten des Schwerpunktes derselben bezeichnen, daß also die Ausdrücke:

$$V\mathbf{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . y \quad , \quad V\mathbf{Z} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . \int_{z_0}^{Z} dz . z$$

auch die Formen:

$$V\mathbf{Y} = \int_{x_0}^{X} dx . y_{,}F_{,}(x) \quad , \quad V\mathbf{Z} = \int_{x_0}^{X} dx . z_{,}F_{,}(x)$$

annehmen können. Weiß man nun, daß die Schwerpunkte aller zur Ebene der yz parallelen Schnittflächen in einer und derselben Geraden liegen, deren Gleichungen:

$$y = ax + h$$
$$z = bx + k$$

seien, so hat man auch

$$y_{,} = ax + h \quad , \quad z_{,} = bx + k ,$$

und demnach wird:

$$V\mathbf{Y} = a\int_{x_0}^{X} dx . x F_{,}(x) + h\int_{x_0}^{X} dx . F_{,}(x) ,$$

$$V\mathbf{Z} = b\int_{x_0}^{X} dx . x F_{,}(x) + k\int_{x_0}^{X} dx . F_{,}(x) ,$$

und da man nach dem Vorhergehenden offenbar auch

$$\int_{x_0}^{X} dx . x F_{,}(x) = V\mathbf{X} \quad ; \quad \int_{x_0}^{X} dx . F_{,}(x) = V$$

hat, so schließt man daraus die Gleichungen:

$$\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + h ,$$
$$\mathbf{Z} = b\mathbf{X} + k ,$$

welche zeigen, daß auch der Schwerpunkt des ganzen Körpers auf derselben Geraden liegt, welche die Schwerpunkte aller Schnittflächen

enthält, und man sieht daraus, daß in diesem Falle die beiden Gleichungen:

$$37.)\quad V = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, F_{,}(x) \quad , \quad VX = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, x F_{,}(x)$$

zur Bestimmung des Schwerpunktes genügen.

§. 60.

Unter diese Klasse von körperlichen Räumen können zuerst die Pyramide und der Kegel gereiht werden, da bei diesen alle zur Grundfläche parallelen Schnittflächen ähnlich sind und deren Schwerpunkte alle auf der Geraden liegen, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet.

Um aber zugleich mehrere Fälle zu umfassen, wollen wir den Schwerpunkt einer von parallelen Ebenen begrenzten abgekürzten Pyramide oder eines solchen Kegels zu berechnen suchen. — Sei dazu B der Flächeninhalt der größern, b der der kleinern von beiden Grundflächen und h die senkrechte Entfernung derselben oder die Höhe der genannten Körper; die Abstände dieser Ebenen von der ergänzt gedachten Spitze seien H und h_0, und das Coordinatensystem werde so gelegt, daß die kleinere Grundfläche in die Ebene der yz zu liegen kommt, daß also die Achse der x auf beiden Grundflächen senkrecht steht. Man hat dann zuerst

$$B : b = H^2 : h_0^2 \quad , \quad \sqrt{B} : \sqrt{b} = H : h_0 \, ,$$
$$\sqrt{B} - \sqrt{b} : \sqrt{B} = H - h_0 : H = h : H \, ,$$
$$\sqrt{B} - \sqrt{b} : \sqrt{b} = h : h_0 \, ,$$

und daraus

$$H = h \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \quad , \quad h_0 = h \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \, .$$

Legt man dann in der Entfernung x von der kleinen Grundfläche eine dazu parallele Ebene durch den Körper, so hat man für die Oberfläche O des gemachten Schnittes die Proportion:

$$\sqrt{B} : \sqrt{O} = H : x + h_0 = h\sqrt{B} : x(\sqrt{B} - \sqrt{b}) + h\sqrt{b}$$

und dadurch

$$O = F,(x) = \frac{1}{h^2}\left[x\left(\sqrt{B}-\sqrt{b}\right)+h\sqrt{b}\right]^2.$$

Der Ausdruck für das Volumen eines solchen Körpers wird demnach

$$V = \int_0^h dx.\frac{1}{h^2}\left[x\left(\sqrt{B}-\sqrt{b}\right)+h\sqrt{b}\right]^2$$

und gibt

$$V = \frac{1}{3}h\frac{\sqrt{B^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \frac{1}{3}h\left(B+\sqrt{Bb}+b\right).$$

Ferner hat man

$$VX = \int_0^h dx.\frac{x}{h^2}\left[x\left(\sqrt{B}-\sqrt{b}\right)+h\sqrt{b}\right]^2,$$

und wenn man nach Entwickelung des Binoms die einzelnen Glieder integrirt, so findet man mit einigen einfachen Reductionen

$$VX = \frac{1}{12}h^2\left(3B+2\sqrt{Bb}+b\right)$$

und zieht daraus mit dem vorhergehenden Werthe

$$X = \frac{1}{4}h\frac{3B+2\sqrt{Bb}+b}{B+\sqrt{Bb}+b}$$

als Entfernung des Schwerpunktes von der kleinen Grundfläche; als Entfernung X' desselben von der größern Grundfläche ergibt sich damit

$$X' = \frac{1}{4}h\frac{B+2\sqrt{Bb}+3b}{B+\sqrt{Bb}+b}.$$

Bezeichnet man dann zwei entsprechende (homologe) Linien der beiden Grundflächen einer Pyramide oder eines Kegels mit A und a, so kann man

$$B = mA^2 \quad , \quad b = ma^2$$

setzen, indem man mit m einen Coeffizienten bezeichnet, dessen Werth von der geometrischen Gestalt der Grundflächen abhängt; es wird dann einfacher

$$X = \frac{1}{4}h\frac{3A^2+2Aa+a^2}{A^2+Aa+a^2}.$$

Bei einem Kegel mit kreisförmigen Grundflächen können A und a durch die Halbmesser R und r derselben ersetzt werden, wodurch der vorstehende Werth die Form annimmt:

$$X = \frac{1}{4} h \frac{3R^2 + 2Rr + r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

Wenn B = b wird, dann geht die abgeschnittene Pyramide in ein Prisma, der Kegel in einen Cylinder über, und man erhält

$$X = \frac{1}{2} h,$$

wie vorauszusehen war.

Um dagegen die Lage des Schwerpunktes einer spitzen Pyramide oder eines solchen Kegels zu erhalten, muß man in dem obigen Werthe von X die Grundfläche b gleich Null nehmen; man findet dadurch

$$X = \frac{3}{4} h \quad , \quad X' = \frac{1}{4} h ;$$

der Schwerpunkt einer spitzen Pyramide oder eines spitzen Kegels liegt demnach auf der Geraden, welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit der Spitze verbindet, um $\frac{3}{4}$ ihrer Länge von dieser oder um $\frac{1}{4}$ von der Grundfläche entfernt, da die Theile dieser Geraden den Entfernungen X und X' proportional sind.

§. 61.

Nach dem vorhergehenden Ergebnisse kann die Lage des Schwerpunktes einer dreiseitigen Pyramide auch einfach durch die Coordinaten ihrer Eckpunkte ausgedrückt werden.

Bezeichnet man nämlich die Coordinaten der Eckpunkte: B, D, E, F des Tetraeders, Fig. 58, der Reihe nach mit

$$x_0\, y_0\, z_0 \quad , \quad x_1\, y_1\, z_1 \quad , \quad x_2\, y_2\, z_2 \quad , \quad x_3\, y_3\, z_3 \; ,$$

so findet man für die Coordinaten x', y', z' des Schwerpunktes G der Grundfläche BDE nach dem frühern (§. 52) die Werthe:

$$x' = \frac{1}{3}(x_0 + x_1 + x_2),$$

$$y' = \frac{1}{3}(y_0 + y_1 + y_2),$$

$$z' = \frac{1}{3}(z_0 + z_1 + z_2),$$

und für die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des Schwerpunktes C des Tetraeders, welcher die Gerade GF in dem Verhältnisse 1 : 3 theilt, die Ausdrücke:

$$\mathfrak{X} = x' + \frac{1}{4}(x_3 - x') = \frac{3}{4}x' + \frac{1}{4}x_3 ,$$

$$\mathfrak{Y} = y' + \frac{1}{4}(y_3 - y') = \frac{3}{4}y' + \frac{1}{4}y_3 ,$$

$$\mathfrak{Z} = z' + \frac{1}{4}(z_3 - z') = \frac{3}{4}z' + \frac{1}{4}z_3 ,$$

oder mit den vorhergehenden Werthen von x', y', z'

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{4}(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) ,$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{4}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) ,$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{4}(z_0 + z_1 + z_2 + z_3) .$$

Diese Ausdrücke können aber auch die Formen annehmen:

$$\mathfrak{X} = \frac{\frac{1}{2}(x_0 + x_1) + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)}{2} ,$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{\frac{1}{2}(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)}{2} ,$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{\frac{1}{2}(z_0 + z_1) + \frac{1}{2}(z_2 + z_3)}{2} ,$$

und zeigen dann, daß der Schwerpunkt eines Tetraeders auch in der Mitte einer Geraden liegt, welche die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Kanten verbindet. So liegt C auch in der Mitte der Geraden HK, Fig. 58, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten BE und DF verbindet.

Wird einer der Eckpunkte der dreiseitigen Pyramide selbst als Anfang der Coordinaten genommen, z. B. derjenige, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sind, so hat man

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3) , \quad \mathfrak{Y} = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3) , \quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{4}(z_1 + z_2 + z_3)$$

als Coordinaten ihres Schwerpunktes.

Alle diese Werthe zeigen auch, daß der Schwerpunkt eines Tetraeders dieselbe Lage hat, wie der Schwerpunkt von vier gleichschweren, fest

verbundenen Massen, deren einzelne Schwerpunkte die vier Eckpunkte des Tetraeders bilden.

§. 62.

Ein von ebenen Flächen begrenzter Körper kann immer in dreiseitige Pyramide zerlegt werden, welche einen Eckpunkt im Anfang der Coordinaten haben, [wobei dieser am einfachsten in das Innere des Körpers verlegt wird], und deren drei übrigen Eckpunkte mit Eckpunkten des letztern zusammenfallen. Sind demnach die Coordinaten der Eckpunkte eines solchen Polyeders gegeben, so findet man die seines Schwerpunktes mittels der Formeln des vorhergehenden §. und der Gleichungen (12), wenn auch das Volumen der einzelnen Tetraeder durch die gegebenen Coordinaten ausgedrückt worden ist.

Werden nämlich die Coordinaten der Eckpunkte des Polyeders der Reihe nach mit $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$, $x_3\, y_3\, z_3$, etc., sein Volumen mit V bezeichnet, die körperlichen Räume der einzelnen Tetraeder mit K', K'', K''', etc. und die Coordinaten ihrer Schwerpunkte mit $x'\, y'\, z'$, $x''\, y''\, z''$, $x'''\, y'''\, z'''$, etc., so hat man

$$V = K' + K'' + K''' + \text{etc.} \qquad = \Sigma . K\,,$$
$$V\mathbf{X} = K'x' + K''x'' + K'''x''' + \text{etc.} = \Sigma . Kx\,,$$
$$V\mathbf{Y} = \Sigma . Ky \quad , \qquad V\mathbf{Z} = \Sigma . Kz\,,$$

und weil die Spitze eines jeden Tetraeders im Anfangspunkte liegt, so wird nach dem vorhergehenden §.

$$x' = \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3)\,,\quad y' = \frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3)\,,\quad z' = \frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3)\,,$$
$$x'' = \frac{1}{4}(x_2+x_3+x_4)\,,\quad y'' = \frac{1}{4}(y_2+y_3+y_4)\,,\quad z'' = \frac{1}{4}(z_2+z_3+z_4)\,,$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Um dann auch das Volumen K einer dreiseitigen Pyramide $BCDE$, Fig. 59, durch die Coordinaten ihrer Ecken auszudrücken, projicire man dieselbe auf die Ebene der xy und bezeichne die Oberfläche der Projectionen der 4 Seitenflächen, nämlich

die von bcd mit O_1 , die von bce mit O_2 ,
" " bde " O_3 , " " cde " O_4 ,

und die Coordinaten von B, C, D, E wieder der Reihe nach mit

$$x_1\, y_1\, z_1 \quad , \quad x_2\, y_2\, z_2 \quad , \quad x_3\, y_3\, z_3 \quad , \quad x_4\, y_4\, z_4\,.$$

Die Figur zeigt dann, daß das Volumen des Tetraeders BCDE durch die vier schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismen:

BCDbcd , BCEbce , BDEbde , CDEcde

und zwar durch die Differenz zwischen der Summe der beiden ersten und der Summe der beiden letzten ausgedrückt wird, daß man also nach einem bekannten geometrischen Satze hat

$$K = \frac{1}{3} O_1 (z_1 + z_2 + z_3) + \frac{1}{3} O_2 (z_1 + z_2 + z_4)$$
$$- \frac{1}{3} O_3 (z_1 + z_3 + z_4) - \frac{1}{3} O_4 (z_2 + z_3 + z_4) ,$$

oder in anderer Form:

$$K = \frac{1}{3} z_1 (O_1 + O_2 - O_3) + \frac{1}{3} z_2 (O_1 + O_2 - O_4)$$
$$- \frac{1}{3} z_3 (O_3 + O_4 - O_1) - \frac{1}{3} z_4 (O_3 + O_4 - O_2) ;$$

das Viereck bcde zeigt aber, daß

$$O_1 + O_2 = O_3 + O_4 ,$$

und damit wird

$$K = \frac{1}{3} (z_1 O_4 - z_4 O_1 + z_2 O_3 - z_3 O_2) .$$

Ferner hat man nach §. 37 mit Beachtung der nämlichen Richtung in der Aufeinanderfolge der Ecken

$$O_1 = \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] ,$$

$$O_2 = \frac{1}{2} [x_1 (y_4 - y_2) + x_2 (y_1 - y_4) + x_4 (y_2 - y_1)] ,$$

$$O_3 = \frac{1}{2} [x_1 (y_4 - y_3) + x_3 (y_1 - y_4) + x_4 (y_3 - y_1)] ,$$

$$O_4 = \frac{1}{2} [x_2 (y_3 - y_4) + x_3 (y_4 - y_2) + x_4 (y_2 - y_3)] ,$$

und wenn nun diese Werthe in den letzten von K eingeführt werden, so ist die gestellte Aufgabe gelöset. Der Ausdruck für K wird aber viel einfacher, wenn, wie oben bei der Zerlegung des Polyeders in dreiseitige Pyramiden angenommen wurde, eine Spitze der Pyramide, z. B. E,

im Anfangspunkte liegt; dann ist $x_4 = y_4 = z_4 = 0$, die Werthe von O_2, O_3 und O_4 werden

$$O_2 = \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)\,, \quad O_3 = \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3)\,, \quad O_4 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2),$$

und damit ergibt sich

$$K = \frac{1}{6}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1\right].$$

Man hat dann bei der Berechnung der Werthe von K', K'', etc. nur darauf zu sehen, daß man bei der Aufeinanderfolge der Ecken immer dieselbe Richtung beibehält, und die Bestimmung des Schwerpunktes eines Polyeders hat sonach keine Schwierigkeit, als die Länge der Rechnung.

§. 63.

In besondern Fällen kann man indessen das vorhergehende allgemeine Verfahren nach den obwaltenden Verhältnissen abändern. So wird man die Lage des Schwerpunktes eines schief abgeschnittenen Prisma's einfacher dadurch bestimmen, daß man seine Entfernung von drei sich gegenseitig schneidenden Seitenflächen berechnet und den vorher genannten geometrischen Satz zu Hülfe nimmt, nach welchem ein solches Prisma in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden kann, welche sich dem Rauminhalte nach verhalten, wie die Abstände der drei obern Ecken von der Ebene der drei untern.

Ist demnach ABCDEF, Fig. 60, ein solches Prisma, und bezeichnet man die genannten Abstände der Punkte D, E, F von der untern Grundfläche ABC mit h_1, h_2, h_3, den Flächeninhalt dieser Grundfläche selbst mit O; so hat man für die drei Pyramiden: ABCE, ABDE, BDEF die Rauminhalte:

$$K' = \frac{1}{3} O h_1 \quad , \quad K'' = \frac{1}{3} O h_2 \quad , \quad K''' = \frac{1}{3} O h_3 \,.$$

Nimmt man dann die Ebene der Grundfläche ABC als Ebene der xy und bestimmt die Abstände z', z'', z''' der Schwerpunkte jener Pyramiden von dieser Ebene, so sieht man leicht, daß

$$z' = \frac{1}{4} h_1 \quad , \quad z'' = \frac{1}{4}(h_1 + h_2) \quad , \quad z''' = \frac{1}{4}(h_1 + h_2 + h_3),$$

und der Abstand z des Schwerpunktes vom ganzen Prisma von derselben Ebene ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{3}O(h_1+h_2+h_3)\,z=\frac{1}{12}Oh_1^2+\frac{1}{12}Oh_2(h_1+h_2)+\frac{1}{12}Oh_3(h_1+h_2+h_2),$$

aus welcher man zieht

$$z=\frac{1}{4}\cdot\frac{h_1^2+h_2^2+h_3^2+h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3}{h_1+h_2+h_3}.$$

Auf gleiche Weise wird man auch die Abstände Y und X des Schwerpunktes von zwei der Seitenflächen, z. B. von ABDF und ACDE bestimmen, indem man diese nach einander die erste als Ebene der xz, die zweite als Ebene der yz nimmt und die Entfernungen der Kanten CE und BF von den genannten Seitenflächen mit h' und h'' bezeichnet. Um den Werth von Y zu erhalten, theilt man das Prisma in die Pyramiden ABDFE und ABCE und hat für die erste

$$K'=\frac{1}{3}O(h_2+h_3)\quad,\qquad y'=\frac{1}{4}h',$$

für die zweite

$$K''=\frac{1}{3}Oh_1\qquad\qquad y''=\frac{1}{2}h'$$

und findet damit

$$Y=\frac{1}{4}h'\,\frac{2h_1+h_2+h_3}{h_1+h_2+h_3}.$$

Als Abstand X von der Ebene ACED findet man ebenso oder einfach durch Vertauschung der entsprechenden Größen

$$X=\frac{1}{4}h''\,\frac{h_1+h_2+2h_3}{h_1+h_2+h_3},$$

und mit diesen Werthen ist die Lage des Schwerpunktes vollkommen bestimmt.

Will man von dem schief abgeschnittenen Prisma zu dem parallel begrenzten übergehen, so hat man $h_1=h_2=h_3$ zu nehmen und erhält dadurch

$$z=\frac{1}{2}h_1\quad,\qquad Y=\frac{1}{3}h'\quad,\qquad X=\frac{1}{3}h'',$$

wie vorherzusehen war.

§. 64.

Um noch einige Beispiele für die Anwendung der Gleichungen (37) zu geben, mag der Schwerpunkt eines elliptischen Paraboloids und eines Ellipsoids bestimmt werden.

Die Gleichung des ersten, auf Achse und Scheitel bezogen, hat die Formen:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{ax}{bc} \quad , \qquad c^2y^2 + b^2z^2 = abcx$$

und zeigt, daß jeder Schnitt, dessen Ebene zur Achse der x senkrecht ist, eine Ellipse bildet, deren Gleichung unter die Form:

$$\frac{y^2}{\frac{abx}{c}} + \frac{z^2}{\frac{acx}{b}} = 1$$

gebracht werden kann. Man schließt daraus, daß die beiden Halbachsen dieser Ellipse durch

$$\sqrt{\frac{abx}{c}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{acx}{b}}$$

ausgedrückt werden und ihre Oberfläche demnach durch das Product:

$$\pi ax = F_{,}(x)$$

gemessen wird; ferner ist es einleuchtend, daß die Schwerpunkte aller dieser Schnitte in der Achse der x oder der Achse des Paraboloids liegen, und daß man demnach für das Volumen eines Raumes, welcher von dieser Fläche und einer zur Achse senkrechten Ebene, deren Abstand vom Scheitel gleich h sei, begrenzt wird, den Ausdruck erhält:

$$V = \int_0^h dx \, . \, \pi ax = \frac{1}{2} \pi ah^2 \, .$$

Der Ausdruck für das Moment VX wird ebenso einfach

$$VX = \int_0^h dx \, . \, \pi ax^2 = \frac{1}{3} \pi ah^3$$

und gibt mit dem Werthe von V

$$X = \frac{2}{3} h$$

als Abstand des Schwerpunktes vom Scheitel.

§. 65.

Die Gleichung des Ellipsoids mit drei ungleichen Achsen, auf Mittelpunkt und Achsen bezogen, ist bekanntlich

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ ;$$

man erhält daraus die Scheitelgleichung, wenn man $a-x'$ für x einführt, und es ergibt sich dann für dieselbe mit Weglassung des Accentes

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{2ax-x^2}{a^2}\ .$$

Jeder zur Achse der x senkrechte, vom Scheitel um x entfernte Schnitt ist also wieder eine Ellipse, deren Halbachsen die Werthe haben:

$$\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}\quad,\quad\frac{c}{a}\sqrt{2ax-x^2}\ ,$$

und deren Oberfläche demnach durch

$$F(x)=\pi\frac{bc}{a^2}(2ax-x^2)$$

ausgedrückt wird. Alle diese Schnitte haben ihre Schwerpunkte in der Achse der x liegen; zur Berechnung des Rauminhaltes und der Lage des Schwerpunktes von einem Segment, das von zwei zur Achse der x senkrechten Ebenen begrenzt wird, deren Entfernungen vom Anfangspunkt oder vom Scheitel des Ellipsoids mit H und h_0 bezeichnet seien, hat man demnach die Gleichungen:

$$V=\int_{h_0}^{H}dx\,.\,\frac{\pi bc}{a^2}(2ax-x^2)=\frac{\pi bc}{3a^2}[3a(H^2-h_0^2)-(H^3-h_0^3)]\ ,$$

oder wenn $H-h_0=h$ gesetzt wird,

$$V=\frac{1}{3}\pi h\frac{bc}{a^2}[3a(H+h_0)-(H^2+Hh_0+h_0^2)]$$

und

$$VX=\int_{h_0}^{H}dx\,.\,\frac{\pi bc}{a^2}x(2ax-x^2)=\frac{\pi bc}{a^2}\left[\frac{2}{3}a(H^3-h_0^3)-\frac{1}{4}(H^4-h_0^4)\right]$$

$$=\frac{1}{12}\pi h\frac{bc}{a^2}\left[8a(H^2+Hh_0+h_0^2)-3(H+h_0)(H^2+h_0^2)\right]\ .$$

Für $h_0=0$, $H=h$ wird einfacher

$$V = \frac{1}{3}\pi bc\frac{h^2}{a^2}(3a-h) \quad , \quad VX = \frac{1}{12}\pi bc\frac{h^3}{a^2}(8a-3h) \, ,$$

und damit folgt

$$X = \frac{1}{4}h\frac{8a-3h}{3a-h} \, .$$

Wird $h = a$, also das Segment zum halben Ellipsoid, so findet man

$$V = \frac{2}{3}\pi abc \quad , \quad X = \frac{5}{8}a \, .$$

Das ganze Ellipsoid hat folglich ein Volumen $V = \frac{4}{3}\pi abc$ und den Schwerpunkt im Mittelpunkt, da $h = 2a$, $X = a$ wird.

Aus den vorhergehenden Werthen gehen die entsprechenden für ein Kugelsegment hervor, wenn $a = b = c = r$ gesetzt wird; sie geben auf diese Weise für ein Segment, dessen Höhe h ist, die Werthe:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h) \quad , \quad X = \frac{1}{4}h\frac{8r-3h}{3r-h}$$

und für die Halbkugel

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad , \quad X = \frac{5}{8}r \, ,$$

worin X die Entfernung vom Scheitel des Segmentes ausdrückt. Will man die Entfernung X' vom Mittelpunkt kennen, so findet man allgemein

$$X' = r - X = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r-h)^2}{3r-h}$$

und daher für die Halbkugel $X' = \frac{3}{8}r$.

§. 66.

Zu den Körpern, auf welche sich die Gleichungen (37) anwenden lassen, gehören namentlich die von Umbrehungsflächen begrenzten Räume. Denn nimmt man die Umbrehungsachse als Achse der x, so ist jeder senkrecht zu derselben geführte Schnitt ein Kreis oder eine Ringfläche, je nachdem die Umbrehungsfläche von einem oder von zwei Curvenzweigen erzeugt wurde, oder je nachdem der Körper um die Achse der x massiv oder hohl ist; die Schwerpunkte aller dieser Schnitte liegen demnach in der Umbrehungsachse. Die Halbmesser y oder Y und y_0 der den Schnitt begrenzenden Kreise sind durch die Gleichungen der erzeugenden Curven:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad Y = F(x) \quad \text{und} \quad y_0 = f_0(x)$$

gegeben; die beiden letztern können aber auch zwei verschiedene Werthe von y sein, die sich aus derselben Gleichung: $y = f(x)$ für denselben Werth von x ergeben. Die Oberfläche eines Schnittes wird demnach entweder durch

$$F_{,}(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$$

oder, wenn es eine Ringfläche ist, durch

$$F_{,}(x) = \pi(Y^2 - y_0^2) = \pi[F^2(x) - f_0^2(x)]$$

ausgedrückt, und die Gleichungen (37) nehmen dadurch für einen massiven Körper die Form an:

$$V = \pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,f^2(x)\ ,\qquad V\mathfrak{X} = \pi\int_{y_0}^{X} dx\,.\,xf^2(x)\ ;$$

für einen hohlen dagegen werden sie

$$V=\pi\int_{x_0}^{X} dx\,.[F^2(x)-f_0^2(x)]\ ,\quad V\mathfrak{X}=\pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,x[F^2(x)-f_0^2(x)]$$

oder, wie sie gewöhnlich aufgeführt werden

$$V = \pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,y^2\ ,\qquad V\mathfrak{X} = \pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,xy^2\ ,$$

$$V = \pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,(Y^2 - y_0^2)\ ,\qquad V\mathfrak{X} = \pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,x(Y^2 - y_0^2)\,. \qquad (38.$$

Ist die erzeugende Curve z. B. eine des zweiten Grades auf Scheitel und Achse bezogen und diese Achse zugleich Umdrehungsachse, so hat man als Gleichung derselben

$$y^2 = mx + nx^2\ ,$$

und zwischen den Grenzen: $X = x$, $x_0 = 0$ ergibt sich

$$V = \pi\int_0^x dx\,.\,(mx + nx^2) = \frac{1}{6}\pi x^2(3m + 2nx)\ ,$$

$$V\mathfrak{X} = \pi\int_0^x dx\,.\,(mx^2 + nx^3) = \frac{1}{12}\pi x^3(4m + 3nx)\ ,$$

woraus sofort

$$X = \frac{1}{2} x \frac{4m+3nx}{3m+2nx}$$

folgt.

Für das Umdrehungsellipsoid insbesondere hat man

$$m = \frac{2b^2}{a} \quad , \qquad n = -\frac{b^2}{a^2}$$

und demnach, wenn $x = h$ gesetzt wird,

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{b^2}{a^2}h^2(3a-h) \quad , \qquad X = \frac{1}{4}h\frac{8a-3h}{3a-h} ,$$

übereinstimmend mit den Werthen des §. 65, wenn daselbst $c = b$ genommen wird. Man schließt auch leicht daraus, daß wenn die kleine Achse der Ellipse Umdrehungsachse wird, für ein Segment von der Höhe h die Werthe:

$$V = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{b^2}h^2(3b-h) \quad , \qquad X = \frac{1}{4}h\frac{8b-3h}{3b-h}$$

gefunden werden müssen.

Bei der Parabel ist $n = 0$, $m = 2p$, und man erhält für das Umdrehungsparaboloid die Ausdrücke:

$$V = \pi p h^2 = \frac{1}{8}\pi h d^2 \quad , \qquad X = \frac{2}{3}h ,$$

worin d den Durchmesser $\sqrt{8ph}$ der Grundfläche vorstellt.

§. 67.

Weitere Beispiele sind die durch die Cycloide erzeugten Umdrehungskörper oder Conoide, nämlich das durch Umdrehung dieser Curve um die Normale ihres Scheitels erzeugte und das bei einer gleichen Bewegung um die Tangente in diesem Punkte beschriebene Conoid, von denen jedes durch eine zur Umdrehungsachse senkrechte Ebene begrenzt ist.

Nach den früher abgeleiteten Ausdrücken haben wir für das erstere zwischen den Grenzen $X = 2a$, $x_0 = 0$ zuerst

$$V = \pi\int_0^{2a} dx \, . \, y^2 = 2\pi^3 a^3 - 2\pi\int_0^{2a} dx \, . \, xy\frac{dy}{dx} ,$$

und mit den in §. 41 berechneten Werthen wird sogleich

$$V = 2\pi a^3\left(\frac{3}{4}\pi^2-\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{2}\pi^3 a^3\left(1-\frac{16}{9\pi^2}\right) = 16,9475\ldots a^3 .$$

Auf gleiche Weise ergibt sich

$$V\mathfrak{X} = \pi\int_0^{2a} dx\,.\,xy^2 = 2\pi^3 a^4-\pi\int_0^{2a} dx\,.\,x^2 y\frac{dy}{dx} ,$$

und wenn man wie in dem genannten §.

$$y = \sqrt{2ax-x^2}+az \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

einführt, so findet man

$$\pi\int_0^{2a} dx\,.\,x^2 y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{36}\pi a^4(9\pi^2+64),$$

also

$$V\mathfrak{X} = \frac{1}{36}\pi a^4(63\pi^2-64)$$

und daraus wieder

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{6}a\frac{63\pi^2-64}{9\pi^2-16} = 1,2764\ldots a .$$

Dreht sich der erzeugende Bogen nun um die Tangente, so muß man in den Gleichungen (38) die Achsen wechseln; es wird dadurch allgemein

$$\left.\begin{aligned} V &= \pi\int_{y_0}^{Y} dy\,.\,x^2 = \pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,x^2\frac{dy}{dx} \\ V\mathfrak{Y} &= \pi\int_{y_0}^{Y} dy\,.\,x^2 y = \pi\int_{x_0}^{X} dx\,.\,x^2 y\frac{dy}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (39.$$

und demnach in unserm besondern Falle

$$V = \pi\int_0^{2a} dx\,.\,x\sqrt{2ax-x^2} = \frac{1}{2}\pi^2 a^3 ,$$

$$V\mathfrak{Y} = \pi\int_0^{2a} dx\,.\,xy\sqrt{2ax-x^2} = \frac{1}{36}\pi a^4(9\pi^2+64) ,$$

woraus zuletzt

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\pi a\left(1 + \frac{64}{9\pi^2}\right) = 2{,}7025\ldots a$$

gefunden wird.

Auch bei der Berechnung des Kettenconoids werden die Gleichungen (39) eine leichte Anwendung finden.

§. 68.

Mittels der Polarcoordinaten kann man auch den Rauminhalt und die Lage des Schwerpunktes von einem Körper, der durch Umdrehung eines Curven=Sectors um eine feste Achse erzeugt wurde, unmittelbar bestimmen, d. h. ohne ihn in Theile zu zerlegen.

Wird nämlich die Umdrehungsachse als Achse der z und als Polar=Achse, die Spitze des Sectors als Pol genommen, so wird die Entfernung eines Punktes, dessen Coordinaten r und ϑ sind, von jener Achse durch $r \sin\vartheta$ ausgedrückt, und man schließt daraus, daß der Ring, welcher von der kleinen Fläche Gghk, Fig. 47, bei der Umdrehung um die Achse AX beschrieben wird und welcher als ein Zuwachs zweiter Ordnung zu dem von der Sectorfläche AFG erzeugten Körper betrachtet werden kann, dem Rauminhalte nach durch das Product aus der Fläche $Gghk = (r + \frac{1}{2}\varDelta r)\varDelta r \varDelta\vartheta$ in einen Kreisumfang $2\pi(r\sin\vartheta + \beta\varDelta . r\sin\vartheta)$ gemessen wird, dessen Halbmesser größer ist, als $r\sin\vartheta$ und kleiner als $r\sin\vartheta + \varDelta . r\sin\vartheta$. Man hat daher

$$\frac{\varDelta^2 V}{\varDelta r \varDelta\vartheta} = (r + \frac{1}{2}\varDelta r) . 2\pi(r\sin\vartheta + \beta\varDelta . r\sin\vartheta),$$

und der Anfangswerth dieses Verhältnisses gibt die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d^2 V}{dr\,d\vartheta} = 2\pi r^2 \sin\vartheta \quad , \quad \frac{d^2 . V\bar{z}}{dr\,d\vartheta} = 2\pi r^3 \sin\vartheta\cos\vartheta,$$

durch welche man die Integrale:

$$40.)\quad \left\{ \begin{aligned} V &= 2\pi\int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . \int_{r_0}^{R} dr . r^2 \sin\vartheta, \\ V\bar{z} &= 2\pi\int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . \int_{r_0}^{R} dr . r^3 \sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned} \right.$$

zur Bestimmung des Schwerpunktes erhält, der jetzt in der Polar=Achse oder in der Achse der z liegt; es ist dabei zu beachten, daß die

Grenzen R und r_0 im Allgemeinen, wenn sie nicht constant sind, Functionen von ϑ vorstellen. *)

Für einen Kugelsector, z. B., der, wie ABXC, Fig. 61, durch die Umdrehung eines Kreissectors ABX um den einen begrenzenden Halbmesser AX erzeugt gedacht werden kann, hat man

$$r = R \quad , \quad r_0 = 0 \quad , \quad \gamma = \gamma \quad , \quad \gamma_0 = 0$$

und daher

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos\gamma) \quad , \quad V\mathfrak{z} = \frac{1}{4}\pi R^4 \sin^2\gamma \; ,$$

$$\mathfrak{z} = \frac{3}{8}R(1 + \cos\gamma) \; .$$

Setzt man dann $R(1 - \cos\gamma) = h$ (Höhe DX der Haube des Sectors), so wird $\cos\gamma = 1 - \frac{h}{R}$, und die vorstehenden Werthe nehmen die Formen an:

$$V = \frac{2}{3}\pi h R^2 \quad , \quad \mathfrak{z} = \frac{3}{4}(R - \frac{1}{2}h) \; .$$

Dieser Werth von $\mathfrak{z}$ ist aber nach §. 49 auch der Abstand des Schwerpunktes einer concentrischen ähnlichen Kugelhaube bcd, deren Halbmesser $= \frac{3}{4}R$, und deren Höhe $de = \frac{3}{4}DX = \frac{3}{4}h$ ist, vom Mittelpunkt der Kugel; es folgt daraus, daß man sich auch die Masse des ganzen Kugelsectors in dieser Kugelhaube bcd vereinigt und gleichförmig vertheilt denken kann.

Für die Halbkugel wird $h = R$, und übereinstimmend mit den Ergebnissen in §. 65

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 \quad , \quad \mathfrak{z} = \frac{3}{8}R \; .$$

Ebenso läßt sich der Schwerpunkt eines von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Sectors oder einer massiven Kugelhaube berechnen, wenn man die innern Integrale der obigen Werthe von V und $V\mathfrak{z}$ zwischen den Grenzen R und r, den Halbmessern der beiden begrenzenden Kugelflächen, nimmt und $\gamma = \gamma$, $\gamma_0 = 0$ setzt; man findet auf diese Weise sehr leicht

*) Die allgemeinen Beziehungen für das Volumen und die Lage des Schwerpunktes, in Polar-Coordinaten ausgedrückt, folgen am Ende dieses Kapitels.

$$V = \frac{2}{3}\pi(R^3-r^3)(1-\cos\gamma) = \frac{2}{3}\pi h\frac{R^3-r^3}{R},$$

$$V\mathfrak{z} = \frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)\sin^2\gamma = \frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)\frac{2Rh-h^2}{R^2}$$

und daraus

$$\mathfrak{z} = \frac{3}{4}\,\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}\cos^2\frac{1}{2}\gamma = \frac{3}{8}\,\frac{2R-h}{R}\cdot\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}$$

oder auch

$$\mathfrak{z} = \frac{3}{8}\,\frac{(R+r)(R^2+r^2)(2R-h)}{R(R^2+Rr+r^2)}.$$

Für eine hohle Halbkugel ist wie vorher $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, $h = R$ und

$$\mathfrak{z} = \frac{3}{8}\,\frac{(R^2+r^2)(R+r)}{R^2+Rr+r^2}$$

der Abstand ihres Schwerpunktes vom Mittelpunkte der begrenzenden Kugelflächen.

Sehr einfache Anwendungen für die Gleichungen (40) geben noch die in den §§. 44 und 45 behandelten Sectoren der Parabel und Ellipse, da die entsprechenden Ausdrücke in dem jetzigen Falle leicht zu integriren sind.

§. 69.

Wenden wir uns nun zur Anwendung der allgemeinen Gleichungen (35), indem wir den Schwerpunkt eines von drei größten Kreisen in der Art begrenzten Kugelsectors suchen, daß die Ebenen von zwei derselben auf der des dritten senkrecht stehen und unter sich einen Winkel α einschließen.

Um diesen Körper nicht zerlegen zu müssen, wird man die Ebene des dritten Kreises als die der xz; die des ersten als Ebene der yz nehmen, so daß der gegebene Sector die Lage ABYZ, Fig. 62, erhält, und der Winkel BAZ der gegebene Winkel α ist. Als Gleichung der Ebene BAY hat man dann

$$z = x\cot\alpha = GK = f_0(x);$$

die Gleichung der Kugel gibt

$$z = \sqrt{r^2-x^2-y^2} = GH = F(x),$$

und man zieht daraus

$$F(x) - f_0(x) = \sqrt{r^2-x^2-y^2} - x\cot\alpha = HK.$$

Damit wird nun zuerst

$$V = \int_0^r dy . \int_0^{r' \sin\alpha} dx . \left(\sqrt{r'^2 - x^2} - x \cot\alpha\right) ,$$

wenn man, wie früher, $r^2 - y^2$ durch r'^2 ersetzt und die Grenzen von x in dem Schnitte DCE bestimmt. Die erste Integration gibt

$$V = \int_0^r dy . \left(\frac{1}{2} r' \sin\alpha \sqrt{r'^2 - r'^2 \sin^2\alpha} + \frac{1}{2} r'^2 \alpha - \frac{1}{2} r'^2 \sin^2\alpha \cot\alpha\right)$$

oder mit den erforderlichen Reductionen einfach

$$V = \frac{1}{2} \alpha \int_0^r dy . (r^2 - y^2) ,$$

woraus sogleich

$$V = \frac{1}{2} \alpha r^3$$

gefunden wird. Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$VX = \int_0^r dy . \int_0^{r' \sin\alpha} dx . x \left(\sqrt{r'^2 - x^2} - x \cot\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{3}(1 - \cos\alpha) \int_0^r dy . \sqrt{(r^2 - y^2)^3} = \frac{1}{8} \pi r^4 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha ,$$

und damit folgt

$$X = \frac{3}{16} \pi r \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha} .$$

Weiter hat man zur Bestimmung von Y den Ausdruck:

$$VY = \int_0^r dy . y \int_0^{r' \sin\alpha} dx . \left(\sqrt{r'^2 - x^2} - x \cot\alpha\right)$$

$$= \frac{1}{2} \alpha \int_0^r dy . y (r^2 - y^2) = \frac{1}{8} \alpha r^4$$

und findet einfach

$$Y = \frac{3}{8} r .$$

Endlich wird die letzte der Gleichungen (35) für unsern Fall

$$V\mathbf{Z} = \frac{1}{2}\int_0^r dy \, . \int_0^{r' \sin\alpha} dx \; . \; (r'^2 - x^2 - x^2 \cot^2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r dy \, . \int_0^{r' \sin\alpha} dx \; . \left(r'^2 - \frac{x^2}{\sin^2\alpha}\right) ;$$

sie gibt durch die erste Integration

$$V\mathbf{Z} = \frac{1}{3}\sin\alpha \int_0^r dy \, . \sqrt{(r^2 - y^2)^3} \; ,$$

und durch die zweite findet man

$$V\mathbf{Z} = \frac{1}{16}\pi r^4 \sin\alpha \quad , \quad \mathbf{Z} = \frac{3}{16}\pi r \frac{\sin\alpha}{\alpha} \; .$$

Wenn der Winkel α ein rechter wird, der Sector also zu einem Kugel-Achttheil sich ausdehnt, so hat man daraus

$$V = \frac{1}{6}\pi r^3 \quad , \quad \mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{Z} = \frac{3}{8} r \; ,$$

übereinstimmend mit frühern Ergebnissen.

§. 70.

Als letztes Beispiel, insbesondere für die Gleichungen (36) soll noch der Schwerpunkt des körperlichen Raumes AEXCZD, Fig. 63, berechnet werden, der von den in §. 56 aufgeführten Cylinder- und Kugelflächen und den zwei Coordinaten-Ebenen der xy und xz begrenzt wird. Zu diesem Zwecke nehme ich aber, wie die Figur zeigt, die erzeugende Gerade der Cylinderfläche parallel zur Achse der z; die Gleichung dieser Fläche erhält dann die Form:

$$y^2 = rx - x^2$$

und gibt in einem zur Ebene der yz parallelen Schnitte die Grenzen von y in Function von x, nämlich

$$Y = \sqrt{rx - x^2} \quad , \quad y_0 = 0 \; .$$

Der Werth von z wird durch die Gleichung der begrenzenden Kugelfläche gegeben, und man hat demnach, wenn $r^2 - x^2$ durch r'^2 ersetzt wird,

$$V = \int_0^r dx . \int_0^{\sqrt{rx-x^2}} dy \ . \ \sqrt{r^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^r dx . \left[(r-x)\sqrt{rx} + (r^2-x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{r+x}}\right] .$$

Setzt man dann in diesem Ausdruck $\arcsin \sqrt{\frac{x}{r+x}} = u$, woraus

$$x = r \operatorname{tang} u \quad , \quad u = \frac{1}{4}\pi \text{ für } x = r \quad , \quad u = 0 \text{ für } x = 0$$

folgt, so findet man

$$V = \frac{2}{15} r^3 + \frac{1}{12}\pi r^3 - \frac{1}{2} r^3 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} du . \operatorname{tang}^2 u + \frac{1}{6} r^3 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} du . \operatorname{tang}^6 u .$$

Man hat aber, wenn n eine gerade Zahl ist,

$$\int du . \operatorname{tang}^n u = \Delta . \left(\frac{\operatorname{tang}^{n-1} u}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3} u}{n-3} + \text{etc.} \ldots \pm \operatorname{tang} u \mp u\right)$$

und dadurch zwischen den Grenzen $\frac{1}{4}\pi$ und 0

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} du . \operatorname{tang}^n u = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \text{etc.} \ldots\ldots \pm 1 \mp \frac{1}{4}\pi .$$

Daraus zieht man für unsern Fall

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} du . \operatorname{tang}^2 u = 1 - \frac{1}{4}\pi ,$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} du . \operatorname{tang}^6 u = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4}\pi = \frac{13}{15} - \frac{1}{4}\pi ;$$

der Werth von V wird also

$$V = \frac{1}{6}\pi r^3 - \frac{2}{9} r^3 = \frac{1}{6} r^3 \left(\pi - \frac{4}{3}\right) = 0,3014 \ldots r^3$$

und zeigt in seiner ersten Form, daß das von der Cylinderfläche ausgeschlossene Stück des Kugel-Achttheils einen Rauminhalt $= \frac{2}{9} r^3$ hat.

Auf demselben Wege gelangt man nun leicht zu den Werthen für die Momente V𝔵, V𝔶, V𝔷. Für das erstere hat man

$$V\mathfrak{x} = \int_0^r dx \,.\, x \int_0^{\sqrt{rx-x^2}} dy \;.\; \sqrt{r'^2-y^2}$$

und zieht daraus nach und nach

$$V\mathfrak{x} = \frac{1}{2}\int_0^r dx\,.(rx-x^2)\sqrt{rx} + \frac{1}{2}\int_0^r dx\,.(r^2x-x^3)\arcsin\sqrt{\frac{x}{r+x}}$$

$$= \frac{2}{35}r^4 + \frac{1}{32}\pi r^4 - \frac{1}{4}r^4\int_0^{\frac{1}{4}\pi} du\,.\,\mathrm{tang}^4 u + \frac{1}{8}r^4\int_0^{\frac{1}{4}\pi} du\,.\,\mathrm{tang}^8 u$$

$$= \frac{2}{15}r^4\,,$$

wodurch dann

$$\mathfrak{x} = \frac{12}{5(3\pi-4)}r = 0{,}4424\,..\,r$$

gefunden wird. Ferner ist

$$V\mathfrak{y} = \int_0^r dx\,.\int_0^{\sqrt{rx-x^2}} dy \;.\; y\sqrt{r'^2-y^2} = \frac{1}{3}\int_0^r dx\,.\left[\sqrt{(r^2-x^2)^3} - \sqrt{(r^2-rx)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\pi r^4 - \frac{2}{15}r^4$$

und demnach

$$\mathfrak{y} = \frac{3}{8}r\,\frac{15\pi-32}{15\pi-20} = 0{,}2091\,..\,r\,.$$

Zuletzt berechnet sich

$$V\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\int_0^r dx\,.\int_0^{\sqrt{rx-x^2}} dy \;.\; (r'^2-y^2) = \frac{1}{6}\int_0^r dx\,.(3r^2-rx-2x^2)\sqrt{rx-x^2}\,,$$

oder wenn man $x = \frac{1}{2}r - u$ setzt, wodurch man

$$\frac{dx}{du} = -1 \quad,\quad u = -\frac{1}{2}r \text{ für } x = r \quad,\quad u = +\frac{1}{2}r \text{ für } x = 0$$

erhält, so verwandelt sich der letzte Ausdruck in den folgenden:

$$V\mathfrak{Z} = \frac{1}{6}\int_{+\frac{1}{2}r}^{-\frac{1}{2}r} du : (2u^2 - 3ru - 2r^2)\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - u^2}\ ,$$

und mit den bereits ausgeführten Integralen

$$\int_{+\frac{1}{2}r}^{-\frac{1}{2}r} du\,.\,u^2\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - u^2} = -\frac{1}{128}\pi r^4\ ,$$

$$\int_{+\frac{1}{2}r}^{-\frac{1}{2}r} du\,.\,u\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - u^2} = 0\ , \qquad \int_{+\frac{1}{2}r}^{-\frac{1}{2}r} du\,.\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2 - u^2} = -\frac{1}{8}\pi r^2$$

erhält man nach einigen Reductionen

$$V\mathfrak{Z} = \frac{5}{128}\pi r^4\ ;$$

folglich wird

$$\mathfrak{Z} = \frac{15}{64}r\,\frac{3\pi}{3\pi - 4} = 0{,}4072\ldots r$$

der Abstand des Schwerpunktes von der Ebene der xy.

Für den ganzen von der Cylinder= und der Kugelfläche begrenzten Raum schließt man daraus die Werthe:

$$V = \frac{2}{9}r^3(3\pi - 4)\ ,\quad \mathfrak{X} = \frac{12}{5(3\pi - 4)}r\ ,\quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0\ .$$

Schließlich mag noch die Ableitung der vorhergehenden Ergebnisse in der Weise, daß die Cylinderfläche auf der Ebene der xz senkrecht stehend angenommen und der betreffende Raum in zwei Theilen berechnet wird, von denen der eine zwischen der Ebene der xz und der durch die Durchschnittscurve der gegebenen Flächen gelegten parabolischen Cylinderfläche, der zweite zwischen dieser und der Kugelfläche eingeschlossen ist, sowie die Bestimmung des Schwerpunktes von dem in dem Kugel=Achttheil übrig gelassenen Raum, dessen Volumen oben gleich $\frac{2}{9}r^3$ gefunden wurde, zur Uebung empfohlen werden.

IV. Berechnung von Flächen und körperlichen Räumen mittels des Schwerpunktes.

§. 71.

Es gibt viele Fälle, wo mittels des Schwerpunktes einer ebenen Curve oder des von derselben eingeschlossenen Flächenraumes die Oberfläche oder das Volumen des von ihr erzeugten Umdrehungskörpers sehr einfach berechnet werden kann, wie sich leicht durch Vergleichung der im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln nachweisen läßt.

Wir haben nämlich oben gefunden, daß wenn L die Länge eines Curvenbogens und Y den Abstand seines Schwerpunktes von der Achse der x bezeichnet, man hat

$$LY = \int_{s_0}^{S} ds \,.\, y = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, y \frac{ds}{dx} \,;$$

ferner haben wir gesehen, daß die Oberfläche O der durch diese Curve bei ihrer Umdrehung um die Achse der x beschriebenen Umdrehungsfläche durch

$$O = 2\pi \int_{s_0}^{S} ds \,.\, y = 2\pi \int_{x_0}^{X} dx \,.\, y \frac{ds}{dx}$$

ausgedrückt wird; die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke gibt aber sogleich

41.) $$O = 2\pi L Y$$

und zeigt, daß der Flächeninhalt der erzeugten krummen Fläche durch das Product aus der Länge L der erzeugenden Curve in den Umfang $2\pi Y$ des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreises gemessen wird.

Ebenso zeigen die Ausdrücke:

$$FY = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} dx \,.\, (Y^2 - y_0^2)$$

für das Moment einer zwischen gegebenen Curven eingeschlossenen Fläche F und

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} dx \,.\, (Y^2 - y_0^2)$$

für das Volumen des von derselben Fläche bei ihrer Umdrehung um die Achse der x erzeugten Umdrehungskörpers, daß der letztere derselben auch die Form

$$V = 2\pi F \mathfrak{Y} \qquad (42.$$

erhalten kann, daß also das Volumen eines solchen Körpers auch das Product aus dem Flächeninhalte F der erzeugenden, von einer oder zwei Curven begrenzten Fläche in den Umfang $2\pi\mathfrak{Y}$ des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreises zum Maaße hat.

Bei dieser Berechnung ist jedoch vorausgesetzt, daß die erzeugende Curve oder Curvenfläche nicht von der Umdrehungsachse geschnitten wird; denn es ist leicht zu sehen, daß die vorhergehenden Ausdrücke in diesem Falle nur den Unterschied der von beiden Curventheilen erzeugten Flächen oder körperlichen Räume angeben. Auch braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß dieser Lehrsatz nur dann mit Vortheil angewendet werden kann, wenn der Schwerpunkt der Curve oder Curvenfläche ohne Rechnung bekannt ist; denn wenn die Ordinate $\mathfrak{Y}$ desselben erst berechnet werden muß, so ist leicht aus den obigen Gleichungen zu sehen, daß die Oberfläche O oder das Volumen V unmittelbar durch dieselbe Rechnung gegeben wird.

Einige einfache Beispiele werden genügen, um die Anwendung der Gleichungen (41) und (42) deutlich zu machen.

Die erzeugende Curve sei ein Kreis, dessen Halbmesser gleich r, und sein Mittelpunkt befinde sich in einer Entfernung c von der Drehungsachse, welche größer ist als der Halbmesser r. Zur Berechnung der Oberfläche O der erzeugten Umdrehungsfläche hat man

$$L = 2\pi r \quad , \quad \mathfrak{Y} = c$$

und demnach

$$O = 4\pi^2 rc \ .$$

Der Flächeninhalt des Kreises ist πr^2 und sein Mittelpunkt auch der Schwerpunkt dieser Fläche; man hat daher

$$V = 2\pi^2 cr^2 \ .$$

Wenn der Kreis die Umdrehungsachse gerade berührt, so wird $c = r$, und es ergibt sich dadurch

$$O = 4\pi^2 r^2 \quad , \quad V = 2\pi^2 r^3 \ ;$$

die Oberfläche eines solchen Wulstes ist demnach dem Quadrate des Kreisumfanges gleich und sein Volumen einem Cylinder, der denselben Umfang zur Höhe und die Kreisfläche zum Querschnitt hat.

Als zweites Beispiel nehme ich eine Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, als erzeugende Fläche und die Entfernung ihres Mittelpunktes von der Drehungsachse gleich c, so daß man hat

$$F = \pi ab \quad , \quad Y = c$$

und demnach für das Volumen des durch eine ganze Umdrehung erzeugten Körpers

$$V = \pi ab . 2\pi c = 2\pi^2 abc ,$$

wie auch die Achsen der Ellipse gegen die Drehungsachse liegen mögen. Ist die erzeugende Fläche dagegen eine halbe Ellipse, ihre große Achse der Umdrehungsachse parallel und um einen Abstand c von ihr entfernt, so findet man

$$F = \frac{1}{2}\pi ab \quad , \quad Y = c + \frac{4b}{3\pi},$$

woraus dann

$$V = \pi^2 ab\left(c + \frac{4b}{3\pi}\right)$$

folgt. Wird die große Achse also selbst als Umdrehungsachse genommen oder $c = 0$, so erhält man

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

als Rauminhalt des spindelförmigen Umdrehungsellipsoids. Die Ellipse geht in einen Halbkreis über, wenn $b = a = r$ ist, und das Volumen des erzeugten Ringes wird durch den Ausdruck:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 (3\pi c + 4r)$$

gemessen, welcher für $c = 0$ den bekannten Werth:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

für den Rauminhalt der Kugel gibt.

§. 72.

Die beiden vorhergehenden Lehrsätze, welche unter dem Namen: Guldin'sche Regeln bekannt sind, lassen sich indessen in folgender Weise auch allgemeiner darstellen.

Zuerst ist es offenbar nicht nothwendig, daß die erzeugende Curve

gerade einen ganzen Kreisumfang zurücklegt; man kann also statt des Umfanges 2π irgend einen Bogen α in die Gleichungen (41) und (42) einführen und diesen die Formen:

$$O = \alpha L Y \quad , \quad V = \alpha F Y \qquad (43.$$

geben, worin αY die Länge des von dem Schwerpunkte beschriebenen Kreisbogens vorstellt.

Wenn sich dann eine ebene Curve mit einem ihrer Punkte längs einer andern einfach oder doppelt gekrümmten Linie so bewegt, daß ihre Ebene immer normal zu dieser letztern bleibt und alle ihre übrigen Punkte parallele Curven zu der gegebenen beschreiben, ebenso wie der Schwerpunkt der sich bewegenden Curve oder der Schwerpunkt der von ihr begrenzten Fläche, so kann man sich diese Bewegung in jedem Augenblicke oder in jeder Lage der in Bewegung begriffenen Curve als eine drehende Bewegung um eine veränderliche Achse vorstellen, die immer senkrecht ist zur Krümmungsebene der leitenden Curve und zwar im Krümmungsmittelpunkte derselben. Nennt man also den veränderlichen Bogen der von dem Schwerpunkte der beweglichen Curve beschriebenen krummen Linie s, einen kleinen Zuwachs desselben Δs und den entsprechenden kleinen Bogen des Krümmungskreises derselben $\Delta s_{,}$, so ist die Einheit der Anfangswerth des Verhältnisses: $\frac{\Delta s}{\Delta s_{,}}$, und wenn daher P den Umfang der sich bewegenden Curve, O den Flächeninhalt der bei dieser Bewegung erzeugten Fläche ausdrückt, so wird man nach dem Früheren schließen, daß man hat

$$\frac{dO}{ds} = P .$$

Ebenso findet man für das Volumen V des von dieser Fläche begrenzten Raumes, wenn s' den veränderlichen Bogen der von dem Schwerpunkte der Fläche F der beweglichen Curve beschriebenen krummen Linie bezeichnet,

$$\frac{dV}{ds'} = F ,$$

und da P und F unveränderlich sind, so zieht man daraus

$$O = P\int_{s_0}^{S} ds = P(S - s_0) \quad , \quad V = F\int_{s'_0}^{S'} ds' = F(S' - s'_0) ,$$

oder indem man $S - s_0$ durch L, $S' - s'_0$ durch L' ersetzt,

$$O = PL \quad , \quad V = FL' . \qquad (44.$$

Der Flächeninhalt der erzeugten Fläche wird demnach durch das Product aus dem Umfang der erzeugenden Curve in den von seinem Schwerpunkte beschriebenen Bogen gemessen, das Volumen des von dieser Fläche und von zwei zur leitenden Curve normalen Ebenen begrenzten Raumes durch das Product aus der Oberfläche der erzeugenden Curve in den Weg des Schwerpunktes dieser Fläche ausgedrückt.

Natürlich gelten diese Sätze blos mit der Beschränkung, daß sich zwei so nahe als man will auf einanderfolgende Normal=Ebenen zu der leitenden Curve niemals innerhalb der erzeugenden Curve schneiden dürfen.

Wenn die leitende Linie eine Gerade ist, so wird die erzeugte Fläche eine Cylinderfläche, der erzeugte Körper ein Cylinder mit parallelen Grundflächen, und die obigen Lehrsätze sind für diesen ohnehin einleuchtend.

§. 73.

In dem eben genannten Falle, nämlich wenn die leitende Linie eine Gerade ist, kann aber selbst von der in dem allgemeinen Satze enthaltenen Bedingung, daß die begrenzenden Ebenen normal zu der leitenden Curve sein müssen, Umgang genommen werden, und das Volumen eines schief abgeschnittenen Prisma's oder Cylinders in jedem Falle durch den Flächeninhalt, die Oberfläche eines solchen Körpers jedoch nur in besondern Fällen durch den Umfang der erzeugenden Linie und durch die Entfernung der Schwerpunkte der schiefen Schnittflächen, beziehungsweise ihrer Umfänge, ausgedrückt werden.

Wird nämlich die Ebene der xy senkrecht zu der leitenden Geraden angenommen, die der xz dagegen senkrecht zu der einen schiefen Schnittfläche, so sind die Gleichungen der durch die letztere mit der Cylinderfläche erzeugten Curve

$$y = f(x) \quad , \qquad z = ax + b \ ,$$

und für das Moment ihres Umfanges in Bezug auf eine Achse in der Ebene der xy hat man nach Gleichung (25)

$$Lz = \int_{x_0}^{X} dx \, . \, z \sqrt{1 + a^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ ,$$

oder wenn tang α für a gesetzt wird,

$$L\mathfrak{Z}\cos\alpha = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, z \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cos^2\alpha}$$

oder mit dem Werthe von z in x

$$L\mathfrak{Z}\cos\alpha = a\int_{x_0}^{X} dx \,.\, x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cos^2\alpha} + b\int_{x_0}^{X} dx \,.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cos^2\alpha}$$

$$= (aL\mathfrak{X} + bL)\cos\alpha \;,$$

weil man auch hat

$$L\cos\alpha = \int_{x_0}^{X} dx \,.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cos^2\alpha} \;,$$

$$L\mathfrak{X}\cos\alpha = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cos^2\alpha} \;,$$

und aus dem letztern Werthe folgt, wie vorauszusehen war,

$$\mathfrak{Z} = a\mathfrak{X} + b \;.$$

Bezeichnet dann P den Umfang eines zur Achse des Cylinders senkrechten Schnittes, so daß

$$P = \int_{x_0}^{X} dx \,.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

wird, so hat man auch

$$P\mathfrak{Z} = aP\mathfrak{X} + bP \;.$$

Um nun den Flächeninhalt der betreffenden Cylinderfläche, deren Gleichung: $y = f(x)$ ist, zwischen der Ebene der xy und dem schiefen Schnitte auszudrücken, muß man in der ersten der Gleichungen (34) die z mit der y vertauschen, weil in unserm Falle die Aenderungsgesetze: $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ unendlich werden; diese Gleichung nimmt dadurch die Form an:

$$O = \int_{x_0}^{X} dx \,.\int_{z_0}^{Z} dz \,.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

und wird für unsern Fall, wo $\frac{dy}{dz} = 0$ *), $Z = z$, $z_0 = 0$ ist,

$$O = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \int_{z_0}^{Z} dz \,.\, 1 = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, z \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder mit dem Werthe von z

$$O = a \int_{x_0}^{X} dx \,.\, x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + b \int_{x_0}^{X} dx \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.$$

Beachtet man also, daß wenn $\mathfrak{X}'$ den Abstand des Schwerpunktes von dem Umfange P eines senkrechten Schnittes von der Ebene der yz bezeichnet, die Gleichung:

$$P\mathfrak{X}' = \int_{x_0}^{X} dx \,.\, x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

stattfindet, so zieht man aus dem vorhergehenden Werthe den Ausdruck:

$$O = aP\mathfrak{X}' + bP$$

und schließt aus der Vergleichung desselben mit dem obigen Werthe von $P\mathfrak{Z}$, daß im Allgemeinen die Oberfläche eines schief abgeschnittenen Cylinders oder Prisma's nicht dem Producte aus dem Umfange des senkrechten Schnittes in die Entfernung der Schwerpunkte der beiden begrenzenden Curven gleich ist, sondern nur in dem Falle, wo $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'$ ist, d. h. wo der Schwerpunkt der schiefen Schnittcurve mit dem des senkrechten Schnittes auf derselben, zur Erzeugenden des Cylinders (der Kante des Prisma's) parallelen Geraden liegt, also in allen Fällen, wo der senkrechte Schnitt einen Mittelpunkt hat und durch einen Durchmesser oder überhaupt durch jede durch den Mittelpunkt gelegte Gerade in zwei congruente Theile zerlegt wird, wie bei dem Kreise, der Ellipse, einem regelmäßigen Vielecke von gerader Seitenzahl, u. s. f.

*) Die Gleichung der Cylinderfläche: $y = f(x)$ gibt nämlich unter der Form: $F(x, y) = 0$ oder $0z = F(x, y)$ die Aenderungsgesetze:

$$0\frac{dz}{dx} = \frac{d \,.\, F(x, y)}{dx} \quad , \quad 0\frac{dz}{dy} = \frac{d \,.\, F(x, y)}{dy} \, ,$$

und daraus folgt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = \frac{1}{0} \quad , \quad \frac{dy}{dz} = 0 \,.$$

Die vorher ausgesprochene Bedingung wird dagegen in Bezug auf die Flächen des senkrechten und schiefen Schnittes immer erfüllt, und das Volumen kann deßhalb immer mittels des Schwerpunktes berechnet werden. Man findet in der That für die Momente der schiefen Schnittfläche durch die zweite und vierte der Gleichungen (34) mittels der Beziehungen:

$$z = ax + b \quad , \quad \frac{dz}{dx} = a \quad , \quad \frac{dz}{dy} = 0 \; ,$$

und wenn wir den Flächeninhalt dieses Schnittes mit O bezeichnen,

$$O\mathfrak{X} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x\sqrt{1 + a^2} \; ,$$

oder wenn wie oben tang α für a gesetzt wird,

$$O\mathfrak{X} \cos\alpha = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x$$

und in gleicher Weise

$$O\mathfrak{Z} \cos\alpha = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . z \; .$$

Wird nun die Oberfläche des senkrechten Schnittes mit F bezeichnet, so hat man bekanntlich

$$F = O\cos\alpha \quad , \quad \frac{d^2F}{dx\,dy} = 1$$

und zieht daraus einmal

$$F\mathfrak{X}' = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . x \quad , \quad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \; ,$$

woraus die Bestätigung der obigen Behauptung folgt, daß der Schwerpunkt der schiefen und derjenige der senkrechten Schnittfläche auf derselben zur Erzeugenden des Cylinders parallelen Geraden liegen; ferner findet man damit

$$F\mathfrak{Z} = \int_{x_0}^{X} dx . \int_{y_0}^{Y} dy . z \; ,$$

und die Vergleichung dieses Ausdruckes mit der ersten der Gleichungen (36) zeigt, daß die rechte Seite auch das Volumen V des abgeschnittenen Cylinders ausdrückt, daß man also auch hat

$$V = Fz ,$$

welchen Winkel die schiefe Schnittfläche mit der senkrechten bilden mag, vorausgesetzt jedoch, daß sie die Ebene der xy oder den begrenzenden senkrechten Schnitt nicht innerhalb des Risses der Cylinderfläche schneidet. Der Rauminhalt eines auf einer Seite schief abgeschnittenen Cylinders oder Prisma's ist demnach immer dem eines senkrecht abgeschnittenen gleich, welchem dieselbe Grundfläche und die Entfernung der Schwerpunkte der begrenzenden Schnittflächen als Höhe zukommt.

Ist endlich das Prisma oder der Cylinder auf beiden Seiten schief abgeschnitten, wie ABCD, Fig. 64, so zerlegt man diesen Körper durch eine beliebige zur Erzeugenden senkrechte Ebene EF, die jedoch keine der beiden begrenzenden Schnittflächen schneiden darf, in zwei Theile und berechnet das Volumen von einem jeden derselben. Diese Berechnung kommt aber offenbar darauf hinaus, die Oberfläche des senkrechten Schnittes EF mit dem Abstand ab der Schwerpunkte a und b der beiden schiefen Schnittflächen zu multipliciren; fällt man dann von dem Schwerpunkte b der obern Schnittfläche eine Senkrechte bd auf die Ebene der untern, so wird diese mit der Verbindungslinie ab der beiden Schwerpunkte denselben Winkel bilden, den die untere Schnittfläche mit einem senkrechten Schnitte einschließt, und wenn man daher die Länge der gefällten Senkrechten h nennt, die Entfernung der beiden Schwerpunkte mit l, den Flächeninhalt der untern Schnittfläche mit B und den Winkel, den sie mit einem senkrechten Schnitte bildet, mit ϑ bezeichnet, so ist

$$h = l \cos\vartheta \quad , \qquad F = B \cos\vartheta ,$$

und demnach

$$V = Fl = Bh ;$$

das Volumen eines auf beiden Seiten schief abgeschnittenen Prisma's oder Cylinders wird demnach durch das Product aus der Grundfläche in die Entfernung des Schwerpunktes der gegenüberliegenden begrenzenden Schnittfläche gemessen.

Der in §. 52 gegebene Werth von z für ein Dreieck zeigt, daß der bekannte, in §. 63 angewendete geometrische Lehrsatz über den

Rauminhalt des schief abgeschnittenen Prisma's nur ein besonderer Fall des eben ausgesprochenen ist.

Es darf kaum erwähnt werden, daß ein ähnlicher Lehrsatz auch für die Umhüllungsfläche eines auf beiden Seiten schief abgeschnittenen Cylinders abgeleitet werden kann, wenn für die Schwerpunkte der beiden begrenzenden Curven die oben gestellte Bedingung erfüllt wird.

V. Schwerpunkt nicht homogener Körper.

§. 74.

Wenn ein Körper in allen seinen Theilen dieselbe Dichte besitzt, so ist sein Schwerpunkt, wie in §. 22 gezeigt wurde, derselbe wie der seines Volumens. Ist der Körper dagegen nicht überall gleich dicht, oder nicht gleichartig, nicht homogen, so kann sein Schwerpunkt nicht mehr auf dieselbe Weise bestimmt werden; er wird dann entweder aus mehreren gleichartigen Theilen von verschiedener Dichte bestehen, oder seine Dichte wird von einem Punkte zum andern continuirlich ab= oder zunehmen.

Im ersten Falle muß der Schwerpunkt eines jeden Theiles besonders bestimmt und dann damit der Schwerpunkt des ganzen Körpers nach den Gleichungen (12) in §. 20 berechnet werden.

Im zweiten Falle kann die Dichte q oder das spezifische Gewicht p als Function der Coordinaten x, y, z ausgedrückt werden, und die Gleichungen (15) oder (16^b) sind es nun, durch welche der Schwerpunkt des Körpers bestimmt werden muß.

Sei z. B. der Schwerpunkt eines parallel begrenzten Prisma's oder Cylinders zu finden, dessen Dichte von der untern Fläche gegen die obere stetig und proportional der Entfernung von derselben zu= oder abnimmt, so daß in jedem parallelen Schnitte die Dichte in allen Punkten dieselbe ist. Man nehme die untere Grundfläche als Ebene der xy, bezeichne deren Flächeninhalt mit F, die Höhe des Cylinders mit h, die Dichte in der untern Grundfläche mit D_0, in der obern mit D, wodurch sich für einen parallelen Schnitt in der Entfernung z von der untern Begrenzungsfläche die Dichte:

$$q = D_0 + \frac{z}{h}(D - D_0)$$

ergibt; damit hat man für die Masse des Cylinders den Ausdruck:

$$M=\int_{x_0}^{X}dx.\int_{y_0}^{Y}dy.\int_{z_0}^{Z}dz.q=\int_{z_0}^{Z}dz.\left[D_0+\frac{z}{h}(D-D_0)\right]\int_{x_0}^{X}dx.\int_{y_0}^{Y}dy.1,$$

oder da, wie leicht zu sehen ist,

$$\int_{x_0}^{X}dx.\int_{y_0}^{Y}dy.1 \text{ durch } F \quad , \qquad Z \text{ durch } h \quad , \qquad z_0 \text{ durch } 0$$

ersetzt werden kann, nach ausgeführter Integration

$$M=D_0Fh+\frac{1}{2}Fh(D-D_0)=\frac{1}{2}Fh(D+D_0) \; .$$

Diese Masse ist demnach dieselbe, wie die Masse eines gleich großen Cylinders, dessen Dichte constant und der mittleren Dichte $\frac{1}{2}(D+D_0)$ des gegebenen gleich ist.

Es ist ferner

$$M\mathfrak{z}=F\int_{0}^{h}dz.z\left[D_0+\frac{z}{h}(D-D_0)\right]$$

$$=\frac{1}{6}Fh^2(D_0+2D) \; ,$$

woraus sogleich

$$\mathfrak{z}=\frac{1}{3}h\frac{D_0+2}{D_0+D}$$

folgt. Die Lage des Schwerpunktes bezüglich seiner Entfernung von der Grundfläche ist demnach dieselbe, wie in einem Trapez von gleicher Höhe, dessen parallele Seiten den Dichten D und D_0 proportional sind. Seine anderweitige Lage hängt natürlich nur von der Gestalt der Grundflächen ab und ist unabhängig von der Dichte; er liegt offenbar auf der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet, da der Schwerpunkt eines jeden parallelen Schnittes in derselben Geraden liegt (§. 59).

§. 75.

Statt der Formeln (16) ist es in vielen Fällen der leichtern Integration wegen vortheilhafter, andere anzuwenden, in welchen die Lage eines Punktes durch Polar-Coordinaten ausgedrückt ist, namentlich in solchen Fällen, wo die Dichte von einem bestimmten Punkte aus sich

nach allen Seiten gemäß einer gegebenen Function der Entfernung stetig ändert.

Um diese Gleichungen zu erhalten, bezeichne wieder r die Entfernung eines Punktes vom Pole, ϑ den Winkel, den dieser Fahrstrahl mit der Achse der z bildet, und ω den Winkel, welchen seine Projection in der Ebene der xy mit der Achse der x, oder den die Ebene des Winkels ϑ mit der Ebene der xz einschließt; man hat dann zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und diesen Polar-Coordinaten eines Punktes die öfter bemerkten Beziehungen:

$$x = r \sin\vartheta \cos\omega \quad , \qquad y = r \sin\vartheta \sin\omega \quad , \qquad z = r \cos\vartheta \ .$$

Nehmen wir dann einen körperlichen Raum ABCD, Fig. 65, der einerseits von der Ebene der xz und einer zweiten durch die Achse der z gelegten Ebene, welche mit dieser den Winkel ω bildet, anderseits von einer Kugelfläche BCD, deren Halbmesser r ist, und endlich von einer Kegelfläche ABD begrenzt wird, deren Achse die der z ist und deren erzeugende Gerade mit dieser den Winkel ϑ bildet, so kann derselbe dadurch erzeugt gedacht werden, daß sich die Ebene des Kreissectors BAC um die Achse der z bis in die Lage CAD gedreht habe. Bezeichnet man demnach den Flächeninhalt dieses Sectors mit O, den Abstand seines Schwerpunktes von der Achse der z mit $\mathfrak{X}$ und den Rauminhalt des Körpers ABCD mit V, so ist der Weg, den der Schwerpunkt bei der Bewegung des Sectors beschreibt, $= \omega\mathfrak{X}$, und man hat nach §. 43

$$O = \frac{1}{2} r^2 \vartheta \quad , \qquad \mathfrak{X} = \frac{2}{3} r \frac{1 - \cos\vartheta}{\vartheta}$$

und nach dem Lehrsatze (43) in §. 72

$$V = O \,.\, \omega\mathfrak{X} = \frac{1}{3} r^3 \omega (1 - \cos\vartheta) \ .$$

Werden nun die Coordinaten r, ω und ϑ als veränderlich genommen, so erhält man nach und nach die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dV}{dr} = r^2 \omega (1 - \cos\vartheta) \quad , \qquad \frac{d.\frac{dV}{dr}}{d\omega} = \frac{d^2V}{dr\,d\omega} = r^2 (1 - \cos\vartheta) ,$$

$$\frac{d.\frac{d^2V}{dr\,d\omega}}{d\vartheta} = \frac{d^3V}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = r^2 \sin\vartheta \ ,$$

und da nun die Beziehung:

$$\frac{d^3 M}{dx\,dy\,dz} = q\,\frac{d^3 V}{dx\,dy\,dz}$$

durch Austausch der Veränderlichen in

$$\frac{d^3 M}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = q\,\frac{d^3 V}{dr\,d\omega\,d\vartheta}$$

übergeht, so schließt man daraus

$$\frac{d^3 M}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = q r^2 \sin\vartheta \;.$$

Damit werden dann die Aenderungsgesetze der Momente

$$\frac{d^3 . MX}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = x\,\frac{d^3 M}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = q r^3 \sin^2\vartheta \cos\omega \;,$$

$$\frac{d^3 . MY}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = y\,\frac{d^3 M}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = q r^3 \sin^2\vartheta \sin\omega \;,$$

$$\frac{d^3 . MZ}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = z\,\frac{d^3 M}{dr\,d\omega\,d\vartheta} = q r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \;,$$

und man erhält nun zur Bestimmung des Schwerpunktes eines Körpers, dessen Begrenzung durch die Veränderlichen r, ω und ϑ ausgedrückt werden kann, die Gleichungen:

$$45.)\quad \left\{\begin{aligned}
M &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . \int_{r_0}^{R} dr . q r^2 \sin\vartheta \;,\\
MX &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . \int_{r_0}^{R} dr . q r^3 \sin^2\vartheta \cos\omega \;,\\
MY &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . \int_{r_0}^{R} dr . q r^3 \sin^2\vartheta \sin\omega \;,\\
MZ &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\omega . \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\vartheta . \int_{r_0}^{R} dr . q r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \;,
\end{aligned}\right.$$

worin α und α_0 die Grenzen von ω, γ und γ_0 die von ϑ, R und r_0 die der Veränderlichen r sind und mit Ausnahme des vorher-

gehenden Falles, wo der Körper die Gestalt eines Kugelsectors hat und wo die genannten Veränderlichen unabhängig von einander sind, wie die Grenzen der Veränderlichen x, y, z in gegenseitiger Abhängigkeit von einander stehen, und worin q irgend eine Function jener Veränderlichen sein kann.

Ist der gegebene Raum dem Pol gegenüber nur von einer einzigen continuirlichen Fläche begrenzt, so wird die Gleichung derselben die Form haben:

$$r = f(\omega, \vartheta),$$

und die Grenzen von r sind dann $R = f(\omega, \vartheta)$, $r_0 = 0$; ist der gegebene Raum dagegen zwischen zwei solchen Flächen eingeschlossen, deren Gleichungen

$$r = F(\omega, \vartheta) \quad , \qquad r = f_0(\omega, \vartheta)$$

sind, so werden die Grenzen R und r_0 durch diese Functionen ersetzt, und dadurch in beiden Fällen die obigen dreifachen Integrale auf doppelte zurückgeführt.

Man kommt von den vorhergehenden Ausdrücken (45) auf die in §. 68 abgeleiteten (40) zurück, wenn man q als constant betrachtet, und ω als unabhängig von den übrigen Veränderlichen zwischen den Grenzen 0 und 2π nimmt, was offenbar nur dann geschehen kann, wenn der Körper von einer Umdrehungsfläche begrenzt ist und deren Achse als Polar-Achse angenommen wird.

§. 76.

Um einige Beispiele für die Anwendung der vorhergehenden Formeln zu geben, nehme ich zuerst einen Kugelsector, dessen Dichte sich vom Mittelpunkte gegen die Kugelfläche hin stetig und proportional der Entfernung vom Mittelpunkte ändert. Ist dann D_0 die Dichte im Mittelpunkt, D die Dichte an der Oberfläche und q die einer Kugelfläche, deren Halbmesser gleich r ist, so hat man wie in §. 74

$$q = D_0 + \frac{r}{R}(D - D_0),$$

indem man den Halbmesser der begrenzenden Kugelfläche mit R bezeichnet. Die Grenzen der Veränderlichen r, ω und ϑ sind unabhängig von einander; die von r sind R und 0, für ϑ hat man γ und 0 und 2π und 0 für ω, oder auch γ und $-\gamma$ für ϑ und π und 0 für ω. Damit wird zuerst

$$\mathfrak{M}=\int_0^{2\pi} d\omega . \int_0^{\gamma} d\vartheta . \int_0^{R} dr . r^2 \left[D_0+\frac{r}{R}(D-D_0)\right] \sin\vartheta$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{3}D_0+\frac{1}{4}(D-D_0)\right]R^3(1-\cos\gamma)=\frac{1}{3}\pi(D_0+3D)R^3\sin^2\frac{1}{2}\gamma.$$

Ferner hat man

$$\mathfrak{M}\mathfrak{X}=\int_0^{2\pi} d\omega . \int_0^{\gamma} d\vartheta . \int_0^{R} dr . \left[D_0+\frac{r}{R}(D-D_0)\right] r^3 \sin\vartheta \cos\omega = 0,$$

da $\int d\omega . \cos\omega = \Delta . \sin\omega$ zwischen den Grenzen 2π und 0 Null gibt; ebenso ist $\int_0^{2\pi} d\omega . \sin\omega = 0$, und demnach auch

$$\mathfrak{M}\mathfrak{Y}=\int_0^{2\pi} d\omega . \int_0^{\gamma} d\vartheta . \int_0^{R} dr . \left[D_0+\frac{r}{R}(D-D_0)\right] r^3 \sin^2\vartheta \sin\omega = 0,$$

wie vorauszusehen war.

Zuletzt ist dann

$$\mathfrak{M}\mathfrak{Z}=\int_0^{2\pi} d\omega . \int_0^{\gamma} d\vartheta . \int_0^{R} dr . \left[D_0+\frac{r}{R}(D-D_0)\right] r^3 \sin\vartheta \cos\vartheta$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{4}D_0+\frac{1}{5}(D-D_0)\right] R^4 . \frac{1}{2}\sin^2\gamma$$

und folglich nach einigen Reductionen

$$\mathfrak{Z}=\frac{3}{5}R\frac{D_0+4D}{D_0+3D}\cos^2\frac{1}{2}\gamma .$$

Für den Fall, daß $D=D_0$ sein soll, wird

$$\mathfrak{M}=\frac{4}{3}\pi D_0 R^3 \sin^2\frac{1}{2}\gamma \quad , \quad \mathfrak{Z}=\frac{3}{4}R\cos^2\frac{1}{2}\gamma$$

übereinstimmend mit den Ergebnissen in §. 68. Für $D=0$ ist

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{3}\pi D_0 R^3 \sin^2\frac{1}{2}\gamma \quad , \quad \mathfrak{z} = \frac{3}{5} R \cos^2\frac{1}{2}\gamma \; ,$$

und für $D_0 = 0$ ergibt sich

$$\mathfrak{M} = \pi D R^3 \sin^2\frac{1}{2}\gamma \quad , \quad \mathfrak{z} = \frac{4}{5} R \cos^2\frac{1}{2}\gamma \; .$$

Auf gleiche Weise kann noch der Schwerpunkt einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Schale, deren Dichte sich proportional der Entfernung vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte stetig ändert, gefunden werden, indem man in den vorhergehenden Integralen die Veränderliche r zwischen den Grenzen R und r_0 nimmt, welche die Halbmesser der beiden Kugelflächen vorstellen.

Als zweiter Fall soll die Masse und die Lage des Schwerpunktes eines Cylinders berechnet werden, dessen senkrechter Querschnitt ein Kreis sei, welcher einerseits von einer zur Achse senkrechten Ebene und anderseits von einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt der Grundfläche sei, begrenzt werde, und dessen Dichte von der Achse aus gegen die äußere Mantelfläche proportional der Entfernung von der Achse stetig zunehmen soll. — Dazu bezeichnen wir den Halbmesser der Cylinderfläche mit r, den der Kugelfläche mit R und den Abstand der Ebene des Kreises, nach welchem sich diese Flächen schneiden, von der Grundfläche mit h, nehmen den Mittelpunkt der letztern als Pol und die Achse des Cylinders als Polar-Achse an, so daß die Gleichungen der begrenzenden Kugel- und Cylinderfläche die Formen:

$$\mathfrak{r} = R \quad , \quad \mathfrak{r} = \frac{r}{\sin\vartheta}$$

erhalten, wenn $\mathfrak{r}$ den veränderlichen Fahrstrahl bezeichnet, und theilen den gegebenen Körper durch eine Kegelfläche in zwei Theile, von denen der innere die Gestalt eines Kugelsectors hat. Für diesen werden die Grenzen von $\mathfrak{r}$ wieder R und 0, die von ϑ dagegen sind

$$\gamma = \operatorname{arc\,sin}\frac{r}{R} = \operatorname{arc\,cos}\frac{h}{R} = \operatorname{arc\,tang}\frac{r}{h} \quad \text{und} \quad \gamma_0 = 0 \; ;$$

für den andern Theil hat man dann als Grenzen von $\mathfrak{r}$

$$R = \frac{r}{\sin\vartheta} \quad , \quad r_0 = 0 \; ,$$

und als Grenzen von ϑ

$$\gamma = \frac{1}{2}\pi \quad , \quad \gamma_0 = \text{arc tang}\,\frac{r}{h}\ ;$$

die Grenzen von ω sind für beide Theile 2π und 0. Ist endlich wieder D_0 die Dichte in der Achse, D diejenige in der begrenzenden Cylinderfläche, so hat man als veränderliche Dichte q in einem Punkte, dessen Coordinaten $\mathfrak{r}$ und ϑ sind, den Werth:

$$q = D_0 + \frac{\mathfrak{r}\sin\vartheta}{r}(D - D_0)$$

und demnach für die Masse M des Cylinders den Ausdruck:

$$M = 2\pi \int_0^{\text{arc cos}\frac{h}{R}} d\vartheta \,.\, \int_0^{R} d\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{r}^2 \sin\vartheta \left[D_0 + \frac{\mathfrak{r}\sin\vartheta}{r}(D - D_0)\right]$$

$$+ 2\pi \int_{\text{arc tang}\frac{r}{h}}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, \int_0^{\frac{r}{\sin\vartheta}} d\mathfrak{r}\,.\,\mathfrak{r}^2 \sin\vartheta \left[D_0 + \frac{\mathfrak{r}\sin\vartheta}{r}(D - D_0)\right]\ ;$$

man zieht daraus durch die erste Integration

$$M = \frac{2}{3}\pi D_0 R^3 \int_0^{\text{arc cos}\frac{h}{R}} d\vartheta\,.\,\sin\vartheta + \frac{1}{2}\pi\frac{R^4}{r}(D - D_0)\int_0^{\text{arc cos}\frac{h}{R}} d\vartheta\,.\,\sin^2\vartheta$$

$$+ \frac{1}{6}\pi r^3 (D_0 + 3D)\int_{\text{arc tang}\frac{r}{h}}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta\,.\,\sin^2\vartheta$$

und durch die zweite, wenn r^2 durch $R^2 - h^2$ ersetzt wird,

$$M = \frac{2}{3}\pi D_0 R^2 (R - h) + \frac{1}{4}\pi (D - D_0) R^3 \left(\frac{R}{r}\,\text{arc cos}\,\frac{h}{R} - \frac{h}{R}\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\pi (D_0 + 3D)\, h (R^2 - h^2)\ .$$

Die Momente MX und MY sind wie im vorhergehenden Falle Null; für das dritte MZ findet man dagegen den Ausdruck:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{z} = 2\pi \int_0^{\arccos\frac{h}{R}} d\vartheta \;.\; \int_0^R d\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{r}^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \left[D_0 + \frac{\mathfrak{r}\sin\vartheta}{r}(D - D_0)\right]$$

$$+ 2\pi \int_{\arcsin\frac{r}{R}}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \;.\; \int_0^{\frac{r}{\sin\vartheta}} d\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{r}^3 \sin\vartheta \cos\vartheta \left[D_0 + \frac{\mathfrak{r}\sin\vartheta}{r}(D - D_0)\right],$$

welcher durch Ausführung der angedeuteten Integrationen nach und nach die Werthe liefert:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\pi D_0 R^4 \int_0^{\arcsin\frac{r}{R}} d\vartheta \,.\, \sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{2}{5}\pi\frac{R^5}{r}(D - D_0) \int_0^{\arcsin\frac{r}{R}} d\vartheta \,.\, \sin^2\vartheta\cos\vartheta$$

$$+ \frac{1}{10}\pi(D_0 + 4D) r^4 \int_{\arcsin\frac{r}{R}}^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \;.\; \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta},$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{z} = \frac{1}{60}\pi(7D_0 + 8D) R^2 r^2 + \frac{1}{20}\pi(D_0 + 4D) r^2 (R^2 - r^2)$$

$$= \frac{1}{6}\pi(D_0 + 2D) R^2 r^2 - \frac{1}{20}\pi(D_0 + 4D) r^4,$$

oder wenn r^2 durch $R^2 - h^2$ ersetzt wird,

$$\mathfrak{M}\mathfrak{z} = \frac{1}{60}\pi(7D_0 + 8D) R^4 - \frac{1}{20}\pi(D_0 + 4D) h^4$$

$$+ \frac{1}{15}\pi(D - D_0) R^2 h^2 .$$

Diese Ausdrücke nehmen eine einfachere Form an, wenn die Dichte constant wird; man hat dann

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{3}\pi D_0 (R^3 - h^3) \quad , \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{z} = \frac{1}{4}\pi D_0 (R^4 - h^4),$$

$$\mathfrak{z} = \frac{3}{8}\,\frac{R^4 - h^4}{R^3 - h^3}$$

und schließt aus dem ersten dieser Werthe, daß das Volumen des ganzen von der Kugelfläche begrenzten Cylinders, dessen

Achse einen Durchmesser der Kugelfläche bildet, dem Rauminhalte einer hohlen Kugel gleich ist, welche außen von derselben Kugelfläche und innerhalb von einer zweiten concentrischen begrenzt wird, die die Ebenen der beiden äußern Durchbringungskreise der Kugel- und Cylinderfläche berührt.

Für $h = 0$, $r = R$ geht der betreffende Körper in eine Halbkugel über, und die zuletzt gefundenen Ausdrücke liefern die bekannten Werthe von M und $\mathfrak{z}$ für eine homogene Halbkugel. Für die nicht homogene, welche aus cylindrischen Schichten von zunehmender Dichte besteht, zieht man aus den allgemeinen Ausdrücken für M und $M\mathfrak{z}$ die Werthe:

$$M = \frac{1}{24}\pi R^3 [16 D_0 + 3\pi (D - D_0)] ,$$

$$M\mathfrak{z} = \frac{1}{60}\pi R^4 (7 D_0 + 8 D) ,$$

aus denen

$$\mathfrak{z} = \frac{2}{5} R \frac{7 D_0 + 8 D}{16 D_0 + 3\pi (D - D_0)}$$

als Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche folgt.

Fünftes Kapitel.

Gesammtwirkung von Kräften, deren Richtungen nicht parallel sind.

I. Kräfte, deren Angriffspunkte und Richtungen in derselben Ebene liegen.

§. 77.

Untersuchen wir nun, wie sich die Gesammtwirkung von einer beliebigen Anzahl nicht paralleler Kräfte ausdrücken läßt, die an einem festen Systeme angreifen, deren Richtungen aber mit ihren Angriffspunkten in einer und derselben Ebene liegen.

Die Gerade MP, Fig. 66, stelle eine dieser Kräfte, deren Intensität mit P bezeichnet sei, der Größe und Richtung nach vor; ihr Angriffspunkt M sei auf ein beliebiges Achsenpaar AX und AY in der Ebene der Kräfte bezogen, und x, y dessen Coordinaten; endlich werde der Winkel UMP, welchen die Richtung der Kraft P mit einer zur positiven Achse der x parallelen Geraden UM bildet, durch α oder $\widehat{Px}$ vorgestellt. Die Wirkung dieser Kraft P in Bezug auf den Anfangspunkt A läßt sich wieder in eine fördernde und in eine drehende zerlegen; denn läßt man in dem Punkte A zwei der Kraft P gleiche und parallele, aber einander entgegengerichtete Kräfte AP und AP' angreifen, so werden diese in der Wirkung der Kraft P keine Aenderung hervorbringen; es wird dann aber die Kraft AP' mit der Kraft MP ein Moment P.MA bilden, dessen drehende Wirkung durch das Product: $P \times \overline{AN}$ gemessen wird, wenn AN die von A auf die rückwärts verlängerte MP gefällte Senkrechte bezeichnet. Die noch übrige Kraft AP dagegen wird dem Punkte A eine fortschreitende Bewegung ertheilen wollen, und ihre Wirkung kann wieder nach den Achsen in zwei andere zerlegt werden, die ihrer Intensität und dem Sinne nach, in welchem sie thätig sind, durch $P \cos \widehat{Px}$ und $P \sin \widehat{Px}$ ausgedrückt

werden. In welchem Sinne aber das Moment P . AM zu drehen strebt, kann aus dem Producte $P \times \overline{AN}$ oder Pp, wenn man AN = p setzt, nicht leicht erkannt werden; auch ist die Länge der Senkrechten AN nicht unmittelbar gegeben; es wird daher zweckmäßiger sein, diese letztere durch die Gegebenen der Aufgabe auszudrücken und dabei die nöthige Rücksicht auf das Qualitätszeichen des Momentes zu nehmen.

Es kann nun auf verschiedene Weise, sei es durch die Gleichung der Geraden, längs welcher die Kraft P wirkt, oder dadurch, daß man die Coordinaten-Achsen um den Winkel α oder $\widehat{Px}$ dreht und die neue Ordinate des Punktes M nimmt, oder endlich aus der Fig. 66 unmittelbar abgeleitet werden, daß p in Function der Coordinaten des Angriffspunktes M und des Winkels $\widehat{Px}$ ausgedrückt den Werth:

$$p = x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

erhält. Denn zieht man durch den Endpunkt m der Abscisse x zu der MN eine Parallele mn, welche die verlängerte AN in n schneidet, und eine zweite Parallele mp zu dieser letztern selbst, so hat man

$$AN = An - Nn = An - mp\ ;$$

ferner ist leicht zu sehen, daß die Winkel Mmp und Amn dem Winkel UMP oder $\widehat{Px}$ gleich sind, daß demnach

$$An = x \sin \alpha \quad , \quad mp = y \cos \alpha$$

wird und sich damit AN oder p wie oben ergibt.

Der Anblick der Figur zeigt dann, daß das Moment P . MA für einen Angriffspunkt M, dessen Coordinaten x und y positiv sind, von der Linken zur Rechten oder wie der Zeiger einer Uhr drehen will, also positiv ist, wenn der Winkel α größer ist, als der Winkel MAX, und kleiner, als dieser Winkel vermehrt um zwei Rechte, oder weil man hat

$$\text{tang} . MAX = \frac{y}{x} ,$$

wenn

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} < \frac{y}{x} ,$$

woraus mit der Beachtung, daß $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha$, $\cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$ ist, und daß allgemein $-a < -b$, wenn $a > b$, die einzige Bedingung:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha > 0.$$

folgt. Es wird also das Moment positiv sein, wenn die Senkrechte $x \sin \alpha - y \cos \alpha$ einen positiven, negativ dagegen, wenn sie einen negativen Werth hat, und das Product

$$Pp = P(x \sin \alpha - y \cos \alpha)$$

kann sonach das Moment P.MA sowohl der Intensität nach, als dem Sinne seiner Wirkung gemäß vorstellen.

§. 78.

Durch das im vorhergehenden §. angewendete Verfahren haben wir nun statt der einen Kraft P zwei fördernde Kräfte:

$$P \cos \widehat{Px} \quad , \quad P \sin \widehat{Px}$$

und eine drehende Kraft:

$$P(x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px}) \; ,$$

deren Gesammtwirkung der Wirkung der Kraft P in Bezug auf den Anfangspunkt A gleich kommt.

Behandelt man dann jede der übrigen Kräfte P', P'', etc. des gegebenen Systems auf dieselbe Weise, so wird man statt des letztern drei neue Systeme von Kräften erhalten, von denen das erste aus fördernden Kräften besteht, die alle längs der Achse der x wirken, das zweite aus eben solchen Kräften, die längs der Achse der y thätig sind, und das dritte aus drehenden Kräften oder Momenten, die natürlich alle in der Ebene der Kräfte liegen. Man kann demnach die Wirkung eines jeden dieser Systeme durch eine einzige Kraft ersetzen, nämlich das erste System durch seine Resultirende X, das zweite durch eine fördernde Kraft Y und das dritte durch ein Moment M, so daß man hat

$$46.)\;\left\{\begin{array}{l} X = \Sigma . P \cos \widehat{Px} \quad , \quad Y = \Sigma . P \sin \widehat{Px} \; , \\ M = \Sigma . P(x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px}) \; . \end{array}\right.$$

In den meisten Fällen kann endlich die Gesammtwirkung dieser drei Systeme oder ihrer Resultirenden durch die Wirkung einer einzigen Kraft R vorgestellt werden, welche dann die Resultirende des ganzen gegebenen Systems ist und allgemeine Resultirende genannt werden soll. Um die Größe, die Richtung und die Coordinaten des Angriffspunktes dieser Kraft zu bestimmen, muß man sich ihre Wirkung in ähnlicher Weise wie die der übrigen Kräfte zerlegt denken und

jede dieser besondern Wirkungen dem entsprechenden der drei vorher erhaltenen Systeme gleich setzen. Bezeichnet man dazu den Winkel, den ihre Richtung mit der Achse der x einschließt, mit $\widehat{Rx}$, die Coordinaten ihres Angriffspunktes mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, so erhält man für dieselbe die beiden fördernden Kräfte:

$$R \cos \widehat{Rx} \quad , \quad R \sin \widehat{Rx} \ ,$$

die drehende Kraft:

$$R(\mathfrak{X} \sin \widehat{Rx} - \mathfrak{Y} \cos \widehat{Rx})$$

und damit die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} R \cos \widehat{Rx} &= X = \Sigma . P \cos \widehat{Px}, \\ R \sin \widehat{Rx} &= Y = \Sigma . P \sin \widehat{Px}, \\ R(\mathfrak{X} \sin \widehat{Rx} - \mathfrak{Y} \cos \widehat{Rx}) &= M = \Sigma . P(x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px}). \end{aligned}\right.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen geben den Werth von R und den Winkel $\widehat{Rx}$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(\Sigma . P \sin \widehat{Px})^2 + (\Sigma . P \cos \widehat{Px})^2}, \\ \tan \widehat{Rx} &= \frac{Y}{X} = \frac{\Sigma . P \sin \widehat{Px}}{\Sigma . P \cos \widehat{Px}}, \end{aligned}\right\} \quad (47.$$

wodurch die allgemeine Resultirende des Systems der Größe und Richtung nach bestimmt ist. Durch die dritte der obigen Gleichungen sollten demnach noch die Coordinaten ihres Angriffspunktes gefunden werden, was aber mittels einer einzigen Gleichung nicht möglich ist; diese drückt nur eine Beziehung zwischen den Coordinaten aller Punkte aus, welche Angriffspunkte jener Kraft sein können, und ist demnach die Gleichung der Geraden, längs welcher die allgemeine Resultirende thätig sein muß, und damit ist auch die Aufgabe gelöset, da es gleichgültig ist, in welchem Punkte dieser Geraden die genannte Kraft angreift, wenn derselbe nur mit dem gegebenen Systeme in fester Verbindung steht. Auf solche Weise betrachtet, wird die genannte Gleichung die Formen:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \tan \widehat{Rx} - \frac{M}{R \cos \widehat{Rx}}$$

oder

$$Y = X \frac{\Sigma . P \sin \widehat{Px}}{\Sigma . P \cos \widehat{Px}} - \frac{\Sigma . P (x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px})}{\Sigma . P \cos \widehat{Px}} \quad (48.$$

annehmen, worin nun X und Y laufende Coordinaten vorstellen, und der Quotient: $\frac{M}{R \cos \widehat{Rx}}$ die Entfernung des Durchschnittspunktes der Achse der y mit der Richtung der Kraft R vom Anfangspunkte A ausdrückt.

Man schließt daraus, daß die Gleichung:

$$M = \Sigma . P (x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px}) = 0$$

die Bedingung ausspricht, unter welcher die Richtung der allgemeinen Resultirenden des Systems durch den Anfangspunkt geht.

Wird eine der Resultirenden X und Y Null, z. B. die erstere oder $\Sigma . P \cos \widehat{Px}$, so findet man

$$X = \frac{\Sigma . P (x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px})}{\Sigma . P \sin \widehat{Px}}$$

als Gleichung der Richtung der allgemeinen Resultirenden R; diese ist demnach parallel zur Achse der y.

Sind aber beide Componenten $\Sigma . P \sin \widehat{Px}$ und $\Sigma . P \cos \widehat{Px}$, also auch R selbst Null, ohne daß zugleich das resultirende Moment $M = \Sigma . P (x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px})$ Null wird, so kommt die Gleichung für die Richtung der Resultirenden R auf

$$0 = \Sigma . P (x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px})$$

zurück; sie wird also unmöglich, und in diesem Falle kann die Gesammtwirkung der gegebenen Kräfte nicht mehr durch die einer einzigen Kraft ersetzt werden; denn diese Wirkung ist nun der des resultirenden Momentes M allein gleich und besteht in dem Bestreben, das gegebene feste System um eine zur Ebene der Kräfte senkrechte Gerade zu drehen, ohne demselben eine fortschreitende Bewegung zu ertheilen.

II. Kräfte mit beliebigen Angriffspunkten und Richtungen.

§. 79.

Endlich zu dem allgemeinsten Falle, zu einem System von Kräften mit beliebigen Richtungen und Angriffspunkten übergehend, bezeichne ich wieder mit P die Intensität einer dieser Kräfte, mit x, y, z die Coordinaten ihres Angriffspunktes M in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, welches jedoch mit dem System der Angriffspunkte fest verbunden vorausgesetzt wird, und mit α, β, γ oder mit $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$, $\widehat{Pz}$ die drei Winkel, welche die Richtung dieser Kraft P mit den drei Coordinaten-Achsen bildet.

In dem Anfangspunkte A denke man sich wieder zwei der Kraft P gleiche, parallele und einander entgegengesetzte Kräfte angebracht, wodurch in dem Zustand des ganzen Systems nichts geändert wird, und zerlege dadurch die Wirkung der Kraft P in Bezug auf den Anfangspunkt A in die einer fördernden Kraft P, die in A angreift, und in die eines Momentes P.MA, dessen Ebene durch die Richtung der Kraft P und den Anfangspunkt A geht. Auf gleiche Weise verfahre man mit allen übrigen der gegebenen Kräfte und zerlege so das gegebene System in ein System von fördernden Kräften, welche alle im Anfangspunkte A angreifen und einzeln den gegebenen Kräften gleich und parallel sind, und in ein System von drehenden Kräften oder Momenten, welche nun aber in ganz verschiedenen Ebenen liegen.

Durch fernere Zerlegung der fördernden Kräfte nach den drei Coordinaten-Achsen und durch Zusammensetzung der nach derselben Achse thätigen Componenten findet man dann nach §. 10 des ersten Buches

$$49.)\quad X = \Sigma . P \cos \widehat{Px}\,, \quad Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py}\,, \quad Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz}$$

als resultirende Kräfte in den drei Achsen, und durch fortgesetzte Vereinigung dieser letztern ergibt sich eine einzige fördernde Kraft R, welche dem Anfangspunkte A dieselbe fortschreitende Bewegung ertheilen will, wie sämmtliche gegebene Kräfte; ihre Intensität R und ihre Richtungswinkel a, b, c oder $\widehat{Rx}$, $\widehat{Ry}$, $\widehat{Rz}$ werden wie dort durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{(\Sigma.P\cos\widehat{Px})^2+(\Sigma.P\cos\widehat{Py})^2+(\Sigma.P\cos\widehat{Pz})^2}, \\ \cos\widehat{Rx} &= \frac{\Sigma.P\cos\widehat{Px}}{R},\ \cos\widehat{Ry}=\frac{\Sigma.P\cos\widehat{Py}}{R},\ \cos\widehat{Rz}=\frac{\Sigma.P\cos\widehat{Pz}}{R} \end{aligned}\right\} (50.$$

gegeben und sind demnach vollkommen bestimmt.

Ebenso wird man jede drehende Kraft M, deren Wirkung durch das Product Pp gemessen wird, in drei andere nach den drei Coordinaten-Ebenen zerlegen und durch Summirung aller in derselben Ebene liegenden Componenten drei Resultirende M_X, M_Y, M_Z bilden, deren Achsen durch die Indexe x, y, z angedeutet werden. Endlich wird man aus diesen das resultirende Moment M_R mittels der Gleichung:

$$M_R = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}$$

und die Winkel l, m, n, welche von seiner Achse mit den drei Coordinaten-Achsen gebildet werden, mittels der Gleichungen:

$$\cos l = \frac{M_X}{M_R}, \quad \cos m = \frac{M_Y}{M_R}, \quad \cos n = \frac{M_Z}{M_R}$$

berechnen, womit dann die Gesammtwirkung der gegebenen Kräfte in jeder Hinsicht bekannt ist.

Man schließt daraus, daß die Wirkung eines jeden Systems von Kräften, deren Angriffspunkte in einer unveränderlichen Verbindung stehen und immer dieselbe gegenseitige Lage behalten, in eine fördernde Kraft R und in eine drehende Kraft M_R zerlegt oder durch die Wirkung dieser beiden Kräfte ersetzt werden kann.

§. 80.

Um aber die zuletzt angedeutete Zerlegung und Zusammensetzung der Momente durchführen zu können, muß man nicht nur die drei Winkel λ, μ, ν kennen, welche die Achse des Momentes der Kraft P mit den drei Coordinaten-Achsen bildet, sondern auch die Länge der vom Anfangspunkte auf die Richtung dieser Kraft gefällten Senkrechten p durch die Gegebenen, nämlich durch die Coordinaten x, y, z des Angriffspunktes und die Winkel α, β, γ ausdrücken können. Was zuerst die Länge der genannten Senkrechten betrifft, so wurde in §. 20 der Einleitung gezeigt, daß dieselbe durch

$$p = \sqrt{(x\cos\beta - y\cos\alpha)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2}$$

ausgedrückt wird; die Achse des Momentes steht auf der Ebene desselben senkrecht, also auch auf den beiden Geraden, durch welche die Lage derselben bestimmt wird, nämlich auf der Richtung der Kraft P und auf der Geraden AM, welche den Angriffspunkt M derselben mit dem Anfangspunkte A verbindet, und man hat daher als Anwendung der in §. 21 daselbst gefundenen Ausdrücke, indem man die Winkel l, m, n durch λ, μ, ν ersetzt, für die Cosinus dieser letztern die Werthe:

$$\cos\lambda = \pm\frac{y\cos\gamma - z\cos\beta}{p} \quad , \qquad \cos\mu = \pm\frac{z\cos\alpha - x\cos\gamma}{p} \; ,$$

$$\cos\nu = \pm\frac{x\cos\beta - y\cos\alpha}{p} \; .$$

Die Componenten des Momentes Pp oder M sind nun nach §. 13

$$Pp\cos\lambda \quad , \qquad Pp\cos\mu \quad , \qquad Pp\cos\nu$$

oder mit den vorhergehenden Werthen, und indem man die Winkel α, β, γ durch die Bezeichnung $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$, $\widehat{Pz}$ ersetzt,

$$\pm P(y\cos\widehat{Pz} - z\cos\widehat{Py}) \quad , \qquad \pm P(z\cos\widehat{Px} - x\cos\widehat{Pz}) \; ,$$

$$\pm P(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px}) \; ,$$

und es sind in diesen Ausdrücken nur noch die Zeichen mit dem Sinne der Wirkung dieser drehenden Kräfte in Uebereinstimmung zu bringen, so daß über diesen Sinn kein Zweifel obwaltet.

Setzen wir zu dem Ende die Coordinaten x, y, z positiv und die Winkel $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$, $\widehat{Pz}$ alle drei kleiner, als $\frac{1}{2}\pi$ voraus, so daß auch die Cosinus dieser Winkel positive Werthe haben, und bezeichnen wir den Winkel, welchen die Projection mQ, Fig. 67, der Kraft P in der Ebene der xy mit der Achse der x bildet, mit $\widehat{Qx}$, so ist nach dem Frühern (§. 77) zu schließen, daß die beabsichtigte Bewegung des Punktes M oder seiner Projection m für ein Auge in der positiven Achse der z in dem Sinne eines Uhrzeigers vor sich gehen wird, wenn der Winkel $\widehat{Qx}$ größer ist als der Winkel mAX, den die Projection des Fahrstrahles AM mit der Achse der x einschließt, und kleiner als der Winkel $\pi + mAX$, also wenn

$$x \sin\widehat{Qx} - y \cos\widehat{Qx} > 0 ,$$

oder da auch

$$\sin\widehat{Qx} = \frac{\cos\widehat{Py}}{\sin\widehat{Pz}} , \qquad \cos\widehat{Qx} = \frac{\cos\widehat{Px}}{\sin\widehat{Pz}}$$

ist, wenn man hat

$$x \cos\widehat{Py} - y \cos\widehat{Px} > 0 .$$

Projiciren wir sodann die Richtung der Kraft P und den Fahrstrahl AM auf die Ebene der xz und benennen den Winkel der Projection Q' der erstern mit der Achse der z mit $\widehat{Q'z}$, so wird man sich leicht überzeugen, daß der Sinn der beabsichtigten Drehung um die Achse der y für ein Auge in der positiven Hälfte dieser Achse positiv sein wird, wenn der Winkel $\widehat{Q'z}$ wieder größer ist als der Winkel m'AZ und kleiner als $\pi + m'AZ$, also wenn man hat

$$\frac{\sin\widehat{Q'z}}{\cos\widehat{Q'z}} > \frac{x}{z} , \qquad \frac{\sin(\widehat{Q'z} - \pi)}{\cos(\widehat{Q'z} - \pi)} < \frac{x}{z}$$

oder wie vorher

$$z \sin\widehat{Q'z} - x \cos\widehat{Q'z} > 0 ;$$

hier ist dann

$$\sin\widehat{Q'z} = \frac{\cos\widehat{Px}}{\sin\widehat{Py}} , \qquad \cos\widehat{Q'z} = \frac{\cos\widehat{Pz}}{\sin\widehat{Py}} ,$$

und die Bedingung für einen positiven Sinn der Bewegung wird

$$z \cos\widehat{Px} - x \cos\widehat{Pz} > 0 .$$

Durch die beiden vorhergehenden Bedingungsgleichungen ist der Sinn des Momentes Pp offenbar vollständig bestimmt; es muß sich daher der Sinn der Drehung um die Achse der x aus denselben ableiten lassen. Multiplicirt man dazu die erste derselben, nämlich

$$x \cos\widehat{Py} - y \cos\widehat{Px} > 0$$

mit $\cos\widehat{Pz}$, die zweite oder

$$z \cos\widehat{Px} - x \cos\widehat{Pz} > 0$$

mit $\cos\widehat{Py}$, so gibt die Summe der Producte die Ungleichheit:

$$z \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Pz} > 0 \;,$$

und die Figur zeigt, daß mit Zugrundelegung jener ersten Bedingungen das Moment Pp um die Achse der x oder parallel zu der Ebene der yz eine Drehung bewirken will, deren Sinn für ein Auge in der positiven Achse der x negativ ist; die beabsichtigte Drehung um diese Achse wird demnach einen positiven Sinn haben, wenn man hat

$$y \cos \widehat{Pz} - z \cos \widehat{Py} > 0 \;.$$

Aus diesen Betrachtungen folgt sofort, daß die drei Componenten der drehenden Kraft Pp der Intensität nach und der über den Sinn der Drehung gemachten Annahme gemäß durch die Producte:

$$P(x \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px}) \;, \qquad P(z \cos \widehat{Px} - x \cos \widehat{Pz}) \;,$$
$$P(y \cos \widehat{Pz} - z \cos \widehat{Py})$$

vorgestellt werden, und zwar durch das erste das Moment in der Ebene der xy, das die Achse der z zur Achse hat, durch das zweite die Kraft, welche um die Achse der y drehen will, und durch das dritte diejenige, welche eine Drehung des gegebenen Systems um die Achse der x zu bewirken strebt.

§. 81.

Diese Momente, welche wir dadurch erhalten haben, daß wir die Achse des gegebenen Momentes P.MA der Länge nach dem Producte Pp proportional genommen und diese alsdann auf die drei Coordinaten-Achsen projicirt haben, welche also auch die Projectionen des Momentes P.MA in den drei Coordinaten-Ebenen ausdrücken, wenn dasselbe als Dreieck geometrisch dargestellt gedacht wird, können auch als Momente der Projectionen Qm, Q′m′, Q″m″ oder Q, Q′, Q″ der Kraft P in diesen Ebenen angesehen werden. Denn behält man die obige Bezeichnung $\widehat{Qx}$ für den Winkel der Projection Qm mit der Achse der x bei und denkt sich diese Projection als eine in der Ebene der xy wirkende Kraft Q, so hat man für das Maaß ihres Momentes Q.mA den Ausdruck:

$$Qq = Q(x \sin \widehat{Qx} - y \cos \widehat{Qx})$$

oder mit den obigen Werthen von $\sin \widehat{Qx}$ und $\cos \widehat{Qx}$

$$Qq = \frac{Q}{\sin\widehat{Pz}}(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px})\ ,$$

und da man auch $Q = P\sin\widehat{Pz}$ hat,

$$Qq = P(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px})\ .$$

Auf gleiche Weise findet man in den beiden andern Coordinaten=Ebenen die Ausdrücke:

$$Q'q' = P(z\cos\widehat{Px} - x\cos\widehat{Pz})\ ,\quad Q''q'' = P(y\cos\widehat{Pz} - y\cos\widehat{Py})\ ,$$

durch welche die obige Behauptung bestätigt wird.

Diese Ausdrücke nehmen noch eine einfachere Form an, wenn man die Senkrechten q, q', q'' einführt; denn nach dem Vorhergehenden hat man für die erste derselben die Werthe:

$$q = x\sin\widehat{Qx} - y\cos\widehat{Qx}\ ,\qquad q\sin\widehat{Pz} = x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px}\ ,$$

und damit folgt

$$Qq = P(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px}) = Pq\sin\widehat{Pz}\ .$$

Ebenso findet man für die beiden andern Momente

$$Q'q' = Pq'\sin\widehat{Py}\ ,\qquad Q''q'' = Pq''\sin\widehat{Px}\ ,$$

und es sind nun in diesen Werthen die Achsen der Momente unmittelbar bezeichnet.

Werden nun auch die Momente aller übrigen Kräfte auf dieselbe Weise durch die Coordinaten der Angriffspunkte und die Richtungswinkel der Kräfte ausgedrückt und diejenigen derselben, welche dieselbe Coordinaten=Achse als gemeinschaftliche Achse haben, zu einem einzigen vereinigt, so findet man

$$\left.\begin{aligned} M_X &= \Sigma\,.\,P(y\cos\widehat{Pz} - z\cos\widehat{Py}) = \Sigma\,.\,Pq''\sin\widehat{Px} \\ M_Y &= \Sigma\,.\,P(z\cos\widehat{Px} - x\cos\widehat{Pz}) = \Sigma\,.\,Pq'\sin\widehat{Py} \\ M_Z &= \Sigma\,.\,P(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px}) = \Sigma\,.\,Pq\sin\widehat{Pz} \end{aligned}\right\} \quad (51.$$

als Werthe dieser resultirenden Momente in den drei Coordinaten=Ebenen, woraus sich der für das allgemeine resultirende Moment M_R, wie oben angegeben, ableiten läßt.

§. 82.

Durch das Vorhergehende ist also dargethan, daß und wie jedes beliebige System von Kräften mit festverbundenen Angriffspunkten auf eine fördernde Kraft R und eine drehende Kraft M_R zurückgeführt werden kann, und man wird sogleich einsehen, daß es im Allgemeinen nicht möglich ist, die Wirkung des ganzen Systems durch die einer einzigen allgemeinen Resultirenden R zu ersetzen. Denn diese Kraft R müßte sich in Bezug auf den Anfangspunkt A in eine fördernde Kraft R und in eine drehende Kraft Rr zerlegen lassen, von denen die erstere unsere oben gefundene fördernde Kraft

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} ,$$

die andere das resultirende Moment M_R ersetzen müßte; das letztere ist aber nur möglich, wenn die beiden Momente Rr und M_R ihre Ebenen oder Achsen parallel oder, was durch Versetzung immer erreicht werden kann, gemeinschaftlich haben, weil, wie von selbst einleuchtet, die drehende Wirkung des Momentes Rr nicht dieselbe sein kann, wenn sie um eine Achse zu drehen strebt, die mit der des gegebenen Momentes M_R einen Winkel bildet, der nicht Null ist, so wenig als eine fördernde Kraft die Wirkung einer andern ersetzen kann, mit deren Richtung die ihrige einen Winkel einschließt. Um dieses weiter auszuführen, darf nur darauf hingedeutet werden, daß wenn jede der beiden fördernden oder drehenden Kräfte dasselbe leistet, ihre Gesammtwirkung gerade doppelt so groß sein muß, als die Wirkung einer von beiden, und es folgt aus den Werthen für die Resultirende zweier fördernden oder zweier drehenden Kräfte, daß dieses nur möglich ist, wenn der Winkel zwischen den Richtungen oder den Achsen dieser Kräfte Null wird.

Die genannte Bedingung wird aber auch genügend sein; denn wenn sie erfüllt ist, so kann über die Coordinaten **X**, **Y**, **Z** des Angriffspunktes der Kraft R, deren Intensität und Richtung bereits durch die fördernden Kräfte X, Y, Z festgestellt ist, immer so verfügt werden, daß das Product Rr dem Werthe von M_R gleich wird. Da nun nach unserm Verfahren die Ebenen aller Momente, also auch die von M_R und Rr durch den Anfangspunkt gehen, und die Ebene des Momentes Rr die Kraft R selbst enthält, so kann die obige Bedingung auch dahin ausgesprochen werden, daß die Achse des Momentes M_R auf der Richtung der Kraft R senkrecht sein muß.

Diese Bedingung wird analytisch durch die Gleichung:

$$\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n = 0$$

ausgedrückt, worin a, b, c die Winkel sind, welche die Richtung der fördernden Resultirenden R, und l, m, n die, welche die Achse des resultirenden Momentes M_R mit den Coordinaten-Achsen bildet, oder wenn für die Cosinus dieser Winkel ihre in §. 79 beigefügten Werthe eingeführt werden, durch

$$\frac{X}{R}\cdot\frac{M_X}{M_R}+\frac{Y}{R}\cdot\frac{M_Y}{M_R}+\frac{Z}{R}\cdot\frac{M_Z}{M_R}=0\,;$$

man zieht daraus die Gleichung:

$$XM_X+YM_Y+ZM_Z=0 \qquad (52.$$

als die nothwendige und genügende Bedingung, welche durch die gegebenen Kräfte befriedigt werden muß, wenn ihre Gesammtwirkung durch die Wirkung einer einzigen Kraft ersetzt werden, d. h. wenn das gegebene System eine einzige allgemeine Resultirende haben soll.

Zu derselben Gleichung kommt man auch dadurch, daß man die Momente der allgemeinen Resultirenden in den drei Coordinaten-Ebenen einzeln den resultirenden Momenten M_X, M_Y, M_Z gleich setzt; man findet auf diese Weise die Gleichungen:

$$R(\mathfrak{X}\cos\widehat{Ry}-\mathfrak{Y}\cos\widehat{Rx})-M_Z=0\,,$$

$$R(\mathfrak{Z}\cos\widehat{Rx}-\mathfrak{X}\cos\widehat{Rz})-M_Y=0\,,$$

$$R(\mathfrak{Y}\cos\widehat{Rz}-\mathfrak{Z}\cos\widehat{Ry})-M_X=0\,,$$

oder wenn man X, Y, Z für $R\cos\widehat{Rx}$, $R\cos\widehat{Ry}$, $R\cos\widehat{Rz}$ einführt,

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{X}Y-\mathfrak{Y}X-M_Z=0\,,\\ \mathfrak{Z}X-\mathfrak{X}Z-M_Y=0\,,\\ \mathfrak{Y}Z-\mathfrak{Z}Y-M_X=0\,.\end{array}\right\} \qquad (53.$$

Diese Gleichungen müssen nun offenbar durch dieselben Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ befriedigt werden, oder sie müssen die drei Projectionen derselben Geraden, nämlich der Richtung der allgemeinen Resultirenden R in den drei Coordinaten-Ebenen vorstellen, also in einer solchen Abhängigkeit stehen, daß immer eine aus den beiden andern folgt. Multiplicirt man aber die erste mit Z, die zweite mit Y, die dritte mit X und addirt die Producte, so findet man wie vorher

$$XM_X+YM_Y+ZM_Z=0$$

als die nothwendige und genügende Bedingung für diese gegenseitige Abhängigkeit; allein die Bedeutung dieser Gleichung wird erst klar, wenn man sie mit $R M_R$ dividirt und für die Quotiente $\frac{X}{R}$, $\frac{M_X}{M_R}$, etc. die Winkelfunctionen $\cos a$, $\cos l$, etc. einführt, wodurch sie dann die oben ausgesprochene Bedingung ausdrückt, daß die Richtung der fördernden Resultirenden zur Achse des Momentes M_R senkrecht oder mit der Ebene dieses Momentes parallel ist, beziehungsweise mit ihr zusammenfällt.

§. 83.

Durch das Wegschaffen des Nenners R in der Gleichung (52) kommt diese in den Fall befriedigt zu werden, ohne daß das System eine allgemeine Resultirende hat. Dieser Fall tritt dann ein, wenn X, Y, Z, also auch R Null ist, ohne daß auch das Moment M_R Null wird; man hat dann eigentlich $\frac{X}{R} = \frac{0}{0}$, und die Gleichung (52) erscheint durch Einführung des Nenners R unter einer unbestimmten Form. In diesem Falle werden die Gleichungen (53) Aufschluß über das Verhalten des Systems geben, und man erhält aus ihnen die unmöglichen Gleichungen:

$$M_X = 0 \quad , \qquad M_Y = 0 \quad , \qquad M_Z = 0 \, ,$$

welche zeigen, daß es in dem betreffenden Falle unmöglich ist, die Wirkung der gegebenen Kräfte durch die einer einzigen Kraft zu ersetzen; diese Wirkung kommt vielmehr auf die des resultirenden Momentes M_R zurück, wie dies von selbst einleuchtet.

Auf der andern Seite findet man, daß durch die Einführung des Nenners M_R die Bedingungsgleichung (52) für den Fall, wo die Momente M_X, M_Y, M_Z und demnach auch M_R selbst Null werden, noch einmal unter der unbestimmten Form: $\frac{0}{0}$ erscheint; in diesem Falle werden aber die Gleichungen (53)

$$\mathfrak{x} Y - \mathfrak{y} X = 0 \, ,$$
$$\mathfrak{z} X - \mathfrak{x} Z = 0 \, ,$$
$$\mathfrak{y} Z - \mathfrak{z} Y = 0 \, ,$$

also die einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht, d. h. die Gleichungen der fördernden Resultirenden R, welche nun zugleich die

allgemeine Resultirende ist. In diesem Falle erleidet demnach unsre Bedingungsgleichung keine Ausnahme.

Aus diesem letztern Ergebniß schließen wir aber weiter, daß die Gleichungen:

$$M_X = 0 \quad , \quad M_Y = 0 \quad , \quad M_Z = 0$$

die Bedingungen ausdrücken, unter welchen der Anfangspunkt der Coordinaten in der Richtung der Resultirenden liegt, und übereinstimmend mit dem in §. 2 ausgesprochenen Satze, daß ein System von Kräften, deren Richtungen sich alle in demselben Punkte schneiden, immer eine allgemeine Resultirende hat; denn verlegt man den Anfang der Coordinaten in diesen Punkt, so erhält man offenbar für alle Momente jener Kräfte den Werth: Null; man hat also auch $M_X = 0$, $M_Y = 0$, $M_Z = 0$, und die fördernde Resultirende ist zugleich die allgemeine, wie dort schon ausgesprochen wurde.

§. 84.

In allen Fällen, in welchen die Bedingungsgleichung (52) nicht befriedigt wird, kann die Wirkung des ganzen Systems immer durch die zweier Kräfte ersetzt werden, welche nicht in derselben Ebene liegen, oder deren Richtungen sich nicht schneiden.

Denn da in diesem Falle die fördernde Resultirende R nicht in die Ebene des Momentes M_R fällt, so wird sie diese Ebene im Anfangspunkte der Coordinaten schneiden und kann daselbst mit der einen der beiden Kräfte, welche das Moment bilden, und von denen wir immer eine am Anfangspunkt angreifend voraussetzen, zu einer neuen Kraft verbunden werden, deren Richtung weder mit der der Kraft R, noch mit der Ebene des Momentes M_R zusammenfallen wird, und das ganze System von Kräften wird nun durch diese neue Kraft und durch die noch übrige von den Kräften des Momentes M_R ersetzt werden.

Es wird ferner einleuchten, daß dieses auf beliebig viele verschiedene Arten geschehen kann, wenn man beachtet, daß das Moment M_R alle mögliche Lagen um den Durchschnittspunkt der Kraft R mit seiner Ebene annehmen und überdieß aus beliebig vielen verschiedenen Paaren von Kräften gebildet werden kann.

Auf analytischem Wege wird man sich von diesem Satze auf folgende Art überzeugen. — Die durch die Gleichung (52) ausgesprochene Bedingung kann immer dadurch erfüllt werden, daß man dem ganzen

System zwei neue gleiche und entgegengesetzte Kräfte Q hinzusetzt und über die Intensität, die Richtung und die Coordinaten des Angriffspunktes derselben in der Weise verfügt, daß durch die gegebenen Kräfte und eine dieser Kräfte Q jener Gleichung Genüge geleistet wird, was offenbar auf beliebig viele Arten geschehen kann. Denn diese Kraft Q gibt, wie jede der gegebenen Kräfte P, drei fördernde und drei drehende Componenten, also zu jeder der Summen: X, Y, Z, M_x, M_y, M_z ein neues Glied, und es werden dadurch in jene Bedingungsgleichung sechs willkürliche Größen eingeführt, nämlich die Intensität Q, die Richtungswinkel: $\widehat{Qx}$, $\widehat{Qy}$, $\widehat{Qz}$, von denen jedoch nur zwei willkürlich sind, und die drei Coordinaten des Angriffspunktes, woraus offenbar hervorgeht, daß jene Gleichung durch Einführung einer solchen Kraft auf beliebig viele verschiedene Arten befriedigt werden kann. Man kann z. B. die Kraft Q im Anfangspunkte angreifen lassen, wodurch die Momente derselben Null werden, und erhält dann nur die fördernden Kräfte:

$$Q\cos\widehat{Qx}\ ,\quad Q\cos\widehat{Qy}\ ,\quad Q\cos\widehat{Qz}\ ,$$

durch welche die Bedingungsgleichung (52) in

$$(X+Q\cos\widehat{Qx})M_x+(Y+Q\cos\widehat{Qy})M_y+(Z+Q\cos\widehat{Qz})M_z=0$$

oder in die Gleichung:

$$XM_x+YM_y+ZM_z+Q(M_x\cos\widehat{Qx}+M_y\cos\widehat{Qy}+M_z\cos\widehat{Qz})=0$$

übergeht, welche zeigt, daß hier noch nach Belieben über die Richtungswinkel $\widehat{Qx}$, $\widehat{Qy}$, $\widehat{Qz}$ verfügt werden kann, und daß man dann erst einen bestimmten Werth für die Intensität Q findet; man hat jedoch dabei die Bedingungsgleichung:

$$\cos^2\widehat{Qx}+\cos^2\widehat{Qy}+\cos^2\widehat{Qz}=1$$

zu berücksichtigen und diese Winkel so zu wählen, daß Q einen positiven Werth erhält.

Berechnet man endlich nach diesem die resultirende R, der gegebenen Kräfte P und dieser Kraft Q, so wird die Wirkung der Kräfte P allein durch die Wirkungen dieser Resultirenden und der zweiten der Kräfte Q ersetzt werden, und zwar je nach der für diese letztern angenommenen Richtung auf eine andere Weise.

§. 85.

Die fördernde Kraft R, welche dadurch entsteht, daß man jede der gegebenen Kräfte P parallel mit ihrer Richtung in den Anfang der Coordinaten versetzt und dort alle zu einer einzigen Kraft vereinigt, bleibt offenbar dieselbe, welchen Punkt des Systems man als Anfangspunkt nimmt. Die Größe jedes einzelnen Momentes dagegen hängt nothwendig von der Lage des Punktes A in Bezug auf den Angriffspunkt M und die Richtung der Kraft P ab, jedoch nicht von der Richtung der Coordinaten-Achsen; dasselbe wird also auch im Allgemeinen mit dem resultirenden Momente M_R der Fall sein, d. h. dieses wird für jeden andern Punkt B des Systems im Allgemeinen einen andern Werth und seine Ebene eine andere Richtung haben.

Es ist aber nicht nothwendig, daß man, um diesen neuen Werth zu erhalten, von neuem die Momente aller Kräfte berechnet; es genügt, die Kraft R in den betreffenden Punkt B, Fig. 68, parallel mit sich zu versetzen, indem man in diesem wieder zwei der Kraft R gleiche und entgegengesetzte Kräfte anbringt und das dadurch entstehende Moment $R.AB$ mit dem resultirenden Momente M_R zu einem einzigen vereinigt.

Daraus folgt zunächst, daß für alle Punkte, welche in der Richtung der Kraft R liegen, das Moment M_R seinen Werth behält, da für diese das Moment $R.AB$ Null ist, und daß für alle Punkte in derselben Parallelen zu der Richtung von R das neue resultirende Moment dieselbe Intensität erhalten wird.

Wenn der Punkt B nicht in der Richtung von R liegt, und die Bedingungsgleichung (52) nicht befriedigt ist, wenn also die Achse des resultirenden Momentes M_R nicht senkrecht auf der Richtung der fördernden Kraft R steht, so kann die Achse des Momentes $R.AB$, welche in jeder Lage des Punktes B mit der Kraft R einen rechten Winkel bilden muß, nie mit der Achse des Momentes M_R zusammenfallen, sondern wird immer einen Winkel mit derselben bilden, der zwischen den Grenzen $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ und $\frac{1}{2}\pi + \vartheta$ liegt, wenn man den Winkel zwischen der Richtung der Kraft R und der Achse des Momentes M_R mit ϑ bezeichnet. Die Achse, beziehungsweise die Intensität des neuen Momentes wird daher im Allgemeinen bald größer, bald kleiner sein, als die des Momentes M_R, je nachdem der Winkel ϑ kleiner oder größer als $\frac{1}{2}\pi$ ist, und je nachdem im letztern Falle die Intensität des Momentes $R.AB$, dessen Maaß nur die Grenzen 0 und ∞ hat, einen hinreichend großen Werth erhält, oder nicht.

Für den Fall aber, daß der Winkel ϑ Null ist, daß also die

Achse des Momentes M_R mit der Richtung von R zusammenfällt, in welchem Falle die Achse des Momentes R . AB mit der Achse von M_R immer einen rechten Winkel bildet, wie auch der Punkt B liegen mag, dann werden die Achsen, beziehungsweise die Intensitäten aller Momente, welche durch Zusammensetzung der zwei genannten entstehen, größer sein, als die des Momentes M_R; denn man hat immer für jene den Werth:

$$\sqrt{M_R^2 + (R . AB)^2} \; .$$

Nimmt man demnach denjenigen Punkt eines festen Systems als Anfang der Coordinaten, für welchen die Achse des resultirenden Momentes mit der Richtung der Resultirenden R der fördernden Kräfte zusammenfällt, so erhält man das kleinste resultirende Moment M_R für dieses System; denn wohin man auch von hier aus den Anfangspunkt verlegen mag, immer wird das neue resultirende Moment größer werden, als das für jenen Anfangspunkt gefundene.

§. 86.

Um die Lage dieses Punktes in dem Systeme zu finden, seien $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ seine drei Coordinaten, bezogen auf die durch einen beliebigen Punkt A gelegten Achsen, für welche M_X, M_Y, M_Z die drei Componenten der Achse des resultirenden Momentes M_R sind; durch den gesuchten Punkt denke man sich dann drei neue Achsen parallel zu den ersten gelegt und die Componenten der Achse des resultirenden Momentes M_E in Bezug auf diese mit M_A, M_B, M_C bezeichnet; man findet dann leicht, mit der Beachtung, daß die Coordinaten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ für alle Kräfte gemeinschaftlich sind,

$$\begin{aligned} M_C &= \Sigma . P [(x - \mathfrak{X}') \cos \widehat{Py} - (y - \mathfrak{Y}') \cos \widehat{Px}] \\ &= M_Z - \mathfrak{X}' Y + \mathfrak{Y}' X \; , \\ M_B &= M_Y - \mathfrak{Z}' X + \mathfrak{X}' Z \; , \\ M_A &= M_X - \mathfrak{Y}' Z + \mathfrak{Z}' Y \; . \end{aligned}$$

Die oben ausgesprochene Bedingung, daß die Achse des Momentes M_E mit der Resultirenden R zusammenfällt, gibt dann

$$\frac{X}{R} = \frac{M_A}{M_E} \; , \qquad \frac{Y}{R} = \frac{M_B}{M_E} \; , \qquad \frac{Z}{R} = \frac{M_C}{M_E} \; ,$$

und man zieht daraus

$$\frac{M_E}{R} = \frac{M_A}{X} = \frac{M_B}{Y} = \frac{M_C}{Z}.$$

Setzt man nun für M_A, M_B, M_C ihre obigen Werthe, so kann man die drei Gleichungen bilden:

$$\left.\begin{array}{l} Y(M_X - \mathfrak{Y}'Z + \mathfrak{Z}'Y) - X(M_Y - \mathfrak{Z}'X + \mathfrak{X}'Z) = 0 \\ X(M_Z - \mathfrak{X}'Y + \mathfrak{Y}'X) - Z(M_X - \mathfrak{Y}'Z + \mathfrak{Z}'Y) = 0 \\ Z(M_Y - \mathfrak{Z}'X + \mathfrak{X}'Z) - Y(M_Z - \mathfrak{X}'Y + \mathfrak{Y}'X) = 0 \end{array}\right\}, \quad (54.$$

von denen jede aus den beiden andern abgeleitet werden kann, die also die Gleichungen einer und derselben Geraden vorstellen, nämlich die der Richtung von R, oder die Gleichungen der Achse des resultirenden Momentes M_E. Es gibt demnach, wie nach dem vorhergehenden §. vorauszusehen war, unendlich viele solcher Punkte, für welche das resultirende Moment einen kleinsten Werth hat; denn dieses wird für alle Punkte der Fall sein, die in der Achse des Momentes M_E liegen.

Es ist übrigens leicht zu sehen, daß die letzten Gleichungen sich auch dadurch ergeben, daß man die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d\,.\,M_E}{d\mathfrak{X}'}, \quad \frac{d\,.\,M_E}{d\mathfrak{Y}'}, \quad \frac{d\,.\,M_E}{d\mathfrak{Z}'}$$

aus der Gleichung:

$$M_E^2 = M_A^2 + M_B^2 + M_C^2$$

oder mit den frühern Werthen von M_A, M_B, M_C

$$M_E^2 = (M_X - \mathfrak{Y}'Z + \mathfrak{Z}'Y)^2 + (M_Y - \mathfrak{Z}'X + \mathfrak{X}'Z)^2 + (M_Z - \mathfrak{X}'Y + \mathfrak{Y}'X)^2$$

gleich Null setzt, wodurch die Bedingungsgleichungen für einen kleinsten Werth von M_E dargestellt werden.

Einfacher ist es aber, die Lage der Geraden, welche durch die Gleichungen (54) ausgedrückt wird, da man weiß, daß sie zu der Richtung der Resultirenden R parallel ist, durch den Endpunkt B der Senkrechten AB, Fig. 69, festzustellen, welche von dem ursprünglichen Coordinaten-Anfang A auf sie gefällt worden ist.

Bezeichnen wir die Länge dieser Senkrechten mit r und die Coordinaten ihres Endpunktes B mit $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, so erhalten wir durch Versetzung der Kraft R in diesen Punkt ein Moment Rr, welches mit dem ebenfalls dahin versetzten Momente M_R ein neues Moment M_E geben muß, dessen Achse BM_E mit R zusammenfällt; die Achsen der beiden genannten Momente und die Richtung der Kraft R müssen demnach in

derselben Ebene liegen, die auf der Ebene des Momentes Rr senkrecht steht und durch die Richtung der Kraft R gelegt ist. Ist dann ϑ wieder der Winkel, welchen die Achse des Momentes M_R mit der fördernden Resultirenden R bildet, so hat man einmal

$$\cos\vartheta = \frac{X M_X + Y M_Y + Z M_Z}{R M_R};$$

ferner ist auch nach §. 11, weil die Achse von Rr auf R senkrecht steht,

$$Rr = M_R \sin\vartheta \quad , \qquad M_E = M_R \cos\vartheta \, ,$$

woraus weiter folgt

$$r = \frac{M_R \sin\vartheta}{R} \quad , \qquad M_E = \frac{X M_X + Y M_Y + Z M_Z}{R} \, .$$

Die Senkrechte r steht aber sowohl auf der Richtung von R, als auf der Achse des Momentes M_R senkrecht; man hat daher auch

$$\frac{\mathfrak{X}'}{r}\cdot\frac{X}{R} + \frac{\mathfrak{Y}'}{r}\cdot\frac{Y}{R} + \frac{\mathfrak{Z}'}{r}\cdot\frac{Z}{R} = 0 \, ,$$

$$\frac{\mathfrak{X}'}{r}\cdot\frac{M_X}{M_R} + \frac{\mathfrak{Y}'}{r}\cdot\frac{M_Y}{M_R} + \frac{\mathfrak{Z}'}{r}\cdot\frac{M_Z}{M_R} = 0 \, ,$$

oder einfacher:

$$55.) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}'X + \mathfrak{Y}'Y + \mathfrak{Z}'Z = 0 \, , \\ \mathfrak{X}'M_X + \mathfrak{Y}'M_Y + \mathfrak{Z}'M_Z = 0 \, . \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sind die der Senkrechten AB oder r; sie bestimmen in Verbindung mit der Beziehung:

$$\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2 = r^2 = \frac{M_R^2 \sin^2\vartheta}{R^2}$$

zwei Punkte B, von denen jedoch nur derjenige genommen werden darf, in welchem die Achse des resultirenden Momentes M_E oder die Richtung von R zwischen die Achsen von Rr und M_R zu liegen kommt.

Zieht man endlich durch den so bestimmten Punkt B eine Gerade parallel zur Richtung der Kraft R, so ist diese die Achse des kleinsten resultirenden Momentes, und ihre Gleichungen sind

$$56.) \quad \begin{cases} (z - \mathfrak{Z}')X = (x - \mathfrak{X}')Z \, , \\ (y - \mathfrak{Y}')X = (x - \mathfrak{X}')Y \, . \end{cases}$$

§. 87.

Wenn das gegebene System von Kräften eine allgemeine Resultirende hat, und demnach die Gleichung:

$$XM_X + YM_Y + ZM_Z = 0$$

befriedigt wird, so zeigt der Werth von M_E, daß in diesem Falle das kleinste Moment Null, und folglich die Richtung dieser allgemeinen Resultirenden zugleich die Achse des kleinsten Momentes ist, daß also für jeden Punkt in dieser Richtung, den man als Anfang der Coordinaten nimmt, das Resultirende der Momente aller Kräfte Null wird, wie oben (§. 83).

Geht man nun in diesem Falle von einem Punkte in der Richtung der Resultirenden zu einem Punkte außerhalb derselben über, so entsteht ein Moment, dessen Ebene durch die Richtung der Resultirenden geht, und welches nun das resultirende Moment des Systems in Bezug auf den betreffenden Punkt ist. Es sind dann für alle Punkte in derselben durch jene Richtung gelegten Ebene die Achsen der resultirenden Momente parallel; ihre Intensitäten ändern sich jedoch mit der Entfernung eines jeden Punktes von der Richtung der Resultirenden, und es haben die resultirenden Momente nur für diejenigen Punkte in derselben Ebene gleiche Maaße, welche auf den beiden zur genannten Richtung parallel und in gleichen Abständen von ihr gezogenen Geraden liegen, wobei aber wieder der Sinn der von diesen Momenten beabsichtigten Drehung nur für die auf derselben Parallelen gelegenen Punkte derselbe, für die auf der andern Parallelen der entgegengesetzte ist.

Nimmt man von der Lage der Achsen und dem Sinne der Drehung Umgang, so liegen alle Punkte, für welche das resultirende Moment dieselbe Intensität hat, auf einer Cylinderfläche, deren Achse die Richtung der allgemeinen Resultirenden ist.

Wenn endlich die Resultirende R Null ist, so kann durch Versetzung des Anfangspunktes der Coordinaten kein neues Moment entstehen; das resultirende Moment bleibt also immer dasselbe, seine Achse behält immer dieselbe Richtung und die beabsichtigte Drehung denselben Sinn, welchen Punkt des Systems man auch als Anfangspunkt nehmen mag.

§. 88.

Als Beispiel für die Anwendung des Vorhergehenden sei ein System von vier Kräften gegeben, deren Intensitäten, Richtungswinkel und Angriffspunkte folgende sind:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = 16\overset{Kgr}{,}54 \\ \gamma_1 = 30^\circ\ 42' \\ \varepsilon_1 = 42^\circ\ 18' \\ x_1 = \ \ 2^m,17 \\ y_1 = \ \ 3\ ,76 \\ z_1 = \ \ 1\ ,53 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} P_2 = \ \ 8\overset{Kgr}{,}26 \\ \gamma_2 = 112^\circ\ 26' \\ \varepsilon_2 = 164^\circ\ 37' \\ x_2 = -4^m,37 \\ y_2 = \ \ 1\ ,23 \\ z_2 = \ \ 3\ ,51 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} P_3 = \ 13\overset{Kgr}{,}87 \\ \gamma_3 = \ 67^\circ\ 35' \\ \varepsilon_3 = 218^\circ\ 22' \\ x_3 = \ \ 5^m,27 \\ y_3 = -2\ ,86 \\ z_3 = -2\ ,00 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} P_4 = \ \ 9\overset{Kgr}{,}63 \\ \gamma_4 = 154^\circ\ 54' \\ \varepsilon_4 = 332^\circ\ 41 \\ x_4 = \ \ 1^m,33 \\ y_4 = -4\ ,54 \\ z_4 = \ \ 3\ ,12 \end{array}\right\}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung wie in §. 11 des ersten Buches ergeben sich zuerst die Werthe:

$$\begin{array}{lll} P_1 \cos \widehat{P_1 x} = +\ 6{,}25 & P_1 \cos \widehat{P_1 y} = +5{,}68 & P_1 \cos \widehat{P_1 z} = +14{,}22 \\ P_2 \cos \widehat{P_2 x} = -\ 7{,}36 & P_2 \cos \widehat{P_2 y} = +2{,}03 & P_2 \cos \widehat{P_2 z} = -\ 3{,}15 \\ P_3 \cos \widehat{P_3 x} = -10{,}05 & P_3 \cos \widehat{P_3 y} = -7{,}96 & P_3 \cos \widehat{P_3 z} = +\ 5{,}29 \\ P_4 \cos \widehat{P_4 x} = +\ 3{,}63 & P_4 \cos \widehat{P_4 y} = -1{,}87 & P_4 \cos \widehat{P_4 z} = -\ 8{,}72 \end{array}$$

und damit folgt weiter

$$\left.\begin{array}{l} X = \Sigma . P \cos \widehat{Px} = -\ 7{,}53 \\ Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py} = -\ 2{,}12 \\ Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz} = +\ 7{,}64 \end{array}\right\} \quad R = 10\overset{Kgr}{,}93 \quad \left\{\begin{array}{l} \widehat{Rx} = 101^\circ\ 10',8 \\ \widehat{Ry} = 133\ \ 31,3 \\ \widehat{Rz} = \ \ 45\ \ 40,6. \end{array}\right.$$

Die fernere Rechnung ordnet sich dann in folgender Weise:

$$\begin{array}{lll} \log P_1 \cos \widehat{P_1 y} = 0{,}75459 & \log P_1 \cos \widehat{P_1 x} = 0{,}79559 & \log P_1 \cos \widehat{P_1 z} = 1{,}15296 \\ \qquad \log x_1 = 0{,}33646 & \qquad \log z_1 = 0{,}18469 & \qquad \log y_1 = 0{,}57519 \\ \hline \log P_1 x_1 \cos \widehat{P_1 y} = 1{,}09105 & \log P_1 z_1 \cos \widehat{P_1 x} = 0{,}98028 & \log P_1 y_1 \cos \widehat{P_1 z} = 1{,}72815 \\ P_1 x_1 \cos \widehat{P_1 y} = +12{,}33 & P_1 z_1 \cos \widehat{P_1 x} = +\ 9{,}56 & P_1 y_1 \cos \widehat{P_1 z} = +53{,}47 \end{array}$$

und gibt so nach und nach

$$\begin{array}{lll} P_2 x_2 \cos \widehat{P_2 y} = -\ 8{,}85 & P_2 z_2 \cos \widehat{P_2 x} = -25{,}84 & P_2 y_2 \cos \widehat{P_2 z} = -\ 3{,}88 \\ P_3 x_3 \cos \widehat{P_3 y} = -41{,}94 & P_3 z_3 \cos \widehat{P_3 x} = +20{,}11 & P_3 y_3 \cos \widehat{P_3 z} = -15{,}13 \\ P_4 x_4 \cos \widehat{P_4 y} = -\ 2{,}49 & P_4 z_4 \cos \widehat{P_4 x} = +11{,}32 & P_4 y_4 \cos \widehat{P_4 z} = +39{,}59 \end{array}$$

und damit

$$\Sigma . Px \cos \widehat{Py} = -40{,}95\ ;\quad \Sigma . Pz \cos \widehat{Px} = +15{,}15,\quad \Sigma . Py \cos \widehat{Pz} = +74{,}05;$$

ferner findet man

$P_1 y_1 \cos\widehat{P_1 x} = +23{,}48$ $P_1 x_1 \cos\widehat{P_1 z} = +30{,}86$ $P_1 z_1 \cos\widehat{P_1 y} = +\ 6{,}91$

$P_2 y_2 \cos\widehat{P_2 x} = -\ 9{,}05$ $P_2 x_2 \cos\widehat{P_2 z} = +13{,}77$ $P_2 z_2 \cos\widehat{P_2 y} = +\ 7{,}11$

$P_3 y_3 \cos\widehat{P_3 x} = +28{,}75$ $P_3 x_3 \cos\widehat{P_3 z} = +27{,}87$ $P_3 z_3 \cos\widehat{P_3 y} = +15{,}92$

$P_4 y_4 \cos\widehat{P_4 x} = -16{,}48$ $P_4 x_4 \cos\widehat{P_4 z} = -11{,}60$ $P_4 z_4 \cos\widehat{P_4 y} = -\ 7{,}78$

also auch

$\Sigma.Py\cos\widehat{Px} = +26{,}70$, $\Sigma.Px\cos\widehat{Pz} = +60{,}90$, $\Sigma.Pz\cos\widehat{Py} = +22{,}16$.

Daraus folgt dann

$$\left.\begin{aligned} M_Z &= \Sigma.Px\cos\widehat{Py} - \Sigma.Py\cos\widehat{Px} = -67{,}65 \\ M_Y &= \Sigma.Pz\cos\widehat{Px} - \Sigma.Px\cos\widehat{Pz} = -45{,}75 \\ M_X &= \Sigma.Py\cos\widehat{Pz} - \Sigma.Pz\cos\widehat{Py} = +51{,}89 \end{aligned}\right\} M_R = 96\overset{\text{Mkgr}}{,}76$$

und

$\log\cos l = 9{,}72940$ $\log\cos m = 9{,}67471-$ $\log\cos n = 9{,}84459-$

$l = 61^\circ 47',7$ $m = 118^\circ 13',1$ $n = 134^\circ 21',7$;

die Intensität des resultirenden Momentes ist demnach 96,76 Meter-Kilogramm, und seine Achse bildet mit den drei Coordinaten-Achsen die vorstehenden Winkel l, m, n.

Um nun zu sehen, ob das gegebene System eine einzige Resultirende hat, oder ob die Richtung von R auf der eben bestimmten Achse des Momentes M_R senkrecht steht, berechnet man

$$XM_X + YM_Y + ZM_Z = -810{,}07\ ,$$
$$\frac{XM_X + YM_Y + ZM_Z}{R \,.\, M_R} = \cos\vartheta = \cos 140^\circ 0',5$$

und schließt daraus, daß es nicht der Fall ist, daß vielmehr die Achse des Momentes M_R mit der Richtung der fördernden Resultirenden R einen Winkel von $140^\circ 0',5$ einschließt.

Ferner findet man für das kleinste resultirende Moment M_E den Werth:

$$M_E = \frac{XM_X + YM_Y + ZM_Z}{R} = M_R\cos\vartheta = -74\overset{\text{Mkgr}}{,}13\ ,$$

und daraus, daß dieser negativ ist, ersieht man, daß die Achse dieses Momentes nicht mit der Richtung von R selbst, sondern mit der ent-

gegengesetzten Verlängerung zusammenfällt, daß sie folglich mit den drei Coordinaten-Achsen Winkel bildet, deren Cosinus durch

$$-\frac{X}{R}\ ,\quad -\frac{Y}{R}\ ,\quad -\frac{Z}{R}$$

ausgedrückt werden und demnach die Werthe erhalten:

$$\pi-\widehat{Rx}=78^{0}49',2\ ,\quad \pi-\widehat{Ry}=46^{0}28',7\ ,\quad \pi-\widehat{Rz}=134^{0}19',4\ .$$

Als kürzeste Entfernung dieser Achse vom Anfangspunkt ergibt sich

$$r=\frac{M_R \sin\vartheta}{R}=5^{m},687\ ,$$

und um die Coordinaten des Endpunktes dieser Senkrechten zu berechnen, zieht man aus der Gleichung (55) zuerst die Werthe:

$$\mathfrak{X}'=\frac{YM_Z-ZM_Y}{XM_Y-YM_X}\mathfrak{Z}'\ ,\qquad \mathfrak{Y}'=\frac{ZM_X-XM_Z}{XM_Y-YM_X}\mathfrak{Z}'$$

und findet damit aus der nachfolgenden Gleichung

$$\mathfrak{Z}'=r\frac{XM_Y-YM_X}{\sqrt{(XM_Y-YM_X)^2+(ZM_X-XM_Z)^2+(YM_Z-ZM_Y)^2}}\ .$$

Mit den oben berechneten Zahlenwerthen und mit der Beachtung, daß nun die Werthe von X, Y, Z mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden müssen, ergibt sich in unserm Falle

$$\left.\begin{array}{ll} XM_Y-YM_X=-\ 454,50 & \mathfrak{X}'=-\ 4,123 \\ ZM_X-XM_Z=+\ 112,96 & \mathfrak{Y}'=+\ 0,945 \\ YM_Z-ZM_Y=-\ 492,95 & \mathfrak{Z}'=-\ 3,801 \end{array}\right\}\ ,$$

womit die Lage der Achse des kleinsten Momentes vollständig bestimmt ist.

Will man endlich dem gegebenen System noch eine Kraft hinzufügen, durch welche die Bedingungsgleichung (52) befriedigt wird, so kann man für diese die einfache Verfügung treffen, daß sie mit der Achse der z zusammenfällt; es sind dann die Winkel $\widehat{Qx}$ und $\widehat{Qy}$ gleich $\frac{1}{2}\pi$, $\widehat{Qz}=0$ oder π, und die in §. 84 für diesen Zweck abgeleitete Gleichung wird einfach

$$XM_X+YM_Y+ZM_Z\pm QM_Z=0\ ;$$

sie gibt mit den früher gefundenen Werthen

$$Q = \frac{-810,57}{-67,65} = 11\overset{Hgr}{,}98\,,$$

wenn das untere Zeichen genommen wird, was darauf hindeutet, daß $\widehat{Qz} = \pi$ genommen werden muß.

Die Componenten X und Y bleiben dann dieselben wie vorher; es ändert sich nur der Werth von Z und wird $Z' = 7,64 - 11,98 = -4,34$, woraus sich wie früher die Werthe für die Intensität der neuen Resultirenden R' und die Winkel zwischen ihrer Richtung und den Coordinaten-Achsen, nämlich

$$R' = 8\overset{Hgr}{,}95\,,\quad \widehat{R'x} = 147^{\circ}\,19',4\,,\quad \widehat{R'y} = 103^{\circ}42',5\,,\quad \widehat{R'z} = 49^{\circ}\,1',3$$

berechnen. Zwei der Gleichungen (53) bestimmen dann die Projectionen dieser Richtung in den entsprechenden Coordinatenebenen, und man findet in unserm Falle

$$\left.\begin{array}{l} 2,12\,\mathbf{x} + 7,53\,\mathbf{y} = 67,65 \\ 7,53\,\mathbf{z} - 4,34\,\mathbf{x} = 45,75 \end{array}\right\}$$

oder einfacher

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{y} = 0,282\,\mathbf{x} - 8,984 \\ \mathbf{z} = 0,485\,\mathbf{x} - 5,114 \end{array}\right\}$$

als Gleichungen der Richtung der Resultirenden R'.

Nach dieser Bestimmung kann nun die Wirkung des ganzen Systems durch die Wirkung der Kraft R' und einer längs der positiven Achse der z thätigen Kraft $Q = 11\overset{Hgr}{,}98$ ersetzt werden.

§. 89.

Es erübrigt nun noch, dieselbe Aufgabe durch Construction aufzulösen, wozu vor Allem erfordert wird, daß die Achsen der Momente, wie die fördernden Kräfte, durch ihre Projectionen dargestellt werden.

Zu dem Ende seien M' und M'', Fig. 70, die Projectionen des Angriffspunktes einer Kraft P, deren Projectionen M'P' und M''P'' nach der in §. 14 der Einleitung angegebenen Weise mittels der Winkel γ und ε verzeichnet worden sind. Man bestimmt nun auf gewöhnliche Weise die Durchgangspunkte N' und N'' der Richtung der Kraft P durch die Ebenen der xy und der xz und damit die Risse AN' und AN'' der durch den Anfangspunkt A und jene Richtung gelegten Ebene, welche die Ebene des Momentes der Kraft P in Bezug auf den Anfangspunkt A sein wird. Die Geraden AL' und AL'', welche in A

senkrecht auf die Risse AN′ und AN″ gezogen wurden, sind demnach die Projectionen der Achse dieses Momentes, und es handelt sich nur noch darum, die Länge dieser Projectionen und den Sinn ihrer Richtung zu bestimmen.

Diese Richtung der Achse ergibt sich in jedem besondern Falle leicht aus der Richtung der Projectionen der Kraft P und der Lage des Angriffspunktes. In unserm Falle z. B. ist es ersichtlich, daß die Projectionen der Achse nicht Al′ und Al″ sein können, sondern AL′ und AL″ sein müssen, wenn die von dem Momente beabsichtigte Drehung die Richtung der Bewegung eines Uhrzeigers haben soll.

Die Länge der Achse muß dem Producte Pp aus der Intensität der Kraft in die vom Punkte A auf ihre Richtung gefällte Senkrechte proportional sein oder der Oberfläche des Dreiecks AMP, welches von der Kraft MP im Raume mit dem Anfangspunkte A gebildet wird. Dieses Dreieck selbst ist nicht bekannt, sondern zwei Projectionen desselben, nämlich AMP′ und AMP″, und diese sind nach §. 81 den Componenten der Achsen des Momentes parallel zu den Achsen der z und y proportional. Ferner ist es einleuchtend, daß wenn man die erstere kennt und auf die AZ von A nach H aufträgt, alsdann mittels der beiden Projectionen AL′ und AL″ die Lage der Achse AQ des Momentes gegen die Achse AZ in der Ebene der xz construirt und die Parallele HQ zu der AX zieht, die dadurch abgeschnittene Länge AQ die Achse des Momentes der Größe nach vorstellen wird, und die durch die Senkrechte QG bestimmte Länge AG die Projection derselben Achse in der Ebene der xy ist. Daraus geht dann hervor, daß es nicht nothwendig ist, die Richtung AQ selbst zu zeichnen, indem die Parallele HQ unmittelbar die Länge der Vertical-Projection AL″ begrenzt und damit auch die Horizontal-Projection AL′ gibt.

Endlich wird man, da die zur Darstellung der drehenden Kräfte erforderliche Längen-Einheit willkürlich ist, die der Oberfläche des Dreiecks AM′P′ proportionale Seiten-Achse AH dadurch erhalten, daß man ein Dreieck P′ED zeichnet, das dem genannten Dreieck an Oberfläche gleich ist und zur Grundlinie eine beliebig gewählte Längen-Einheit hat, die für alle Momente in derselben Aufgabe beibehalten werden muß; es werden dann die Grundlinien aller vorkommenden Dreiecke einander gleich, ihre Oberflächen also den Höhen proportional sein, und diese sonach die Achsen und beziehungsweise deren Componenten vertreten können. Auf diese Art erhält man in dem durch die Figur dargestellten Falle zur Bestimmung von AH die Höhe EF des Dreiecks DEP′, dessen Grundlinie DP′ der gewählten Längen-Einheit gleich ist.

§. 90.

Mittels dieser Darstellungsweise kann die Wirkung irgend eines Systems von Kräften ebenso wie die eines Systems von fördernden Kräften durch Construction gefunden und demnach auch die in §. 88 berechnete Aufgabe zeichnend gelöst werden.

Um aber die Zeichnung nicht zu sehr zu verwirren, wird man das gegebene System sogleich in ein System fördernder Kräfte und in ein System drehender Kräfte zerlegen und die Resultirenden dieser Systeme in zwei getrennten Constructionen darstellen.

Für das erste der genannten Systeme läßt man nämlich alle Kräfte im Anfangspunkte A angreifen, zeichnet ihre Projectionen mit Hülfe der Winkel γ und ε und setzt aus diesen die Projectionen der fördernden Resultirenden R zusammen, wie es bereits im ersten Buche, §. 11, angegeben und in Fig. 34 ausgeführt wurde.

Um dagegen die Resultirende des Systems der drehenden Kräfte zu finden, trägt man die Projectionen der gegebenen Kräfte von den entsprechenden Projectionen ihrer Angriffspunkte an auf und sucht auf dem im vorhergehenden §. gezeigten Wege die Projectionen der Achse eines jeden Momentes. Alle in derselben Ebene liegenden Achsen-Projectionen setzt man zu einer Resultirenden AM_R' und AM_R'', Fig. 71, zusammen, und findet damit wie gewöhnlich die Richtung und Größe des resultirenden Momentes M_R, wodurch dessen Intensität und der Sinn seiner Wirkung bekannt ist.

In Fig. 71 ist diese Construction für den in §. 88 gegebenen Fall durchgeführt und zwar so, daß die Einheit für die Kräfte, d. h. 1 Kilogramm durch $0^{\text{cm}},2$, jene für die Entfernung durch $0^{\text{cm}},5$, und die gemeinschaftliche Grundlinie der Momenten-Dreiecke durch $2^{\text{cm}},00$, welche 10 Kilogramm vertreten, vorgestellt ist. Es hat sich daraus $AM_R = 9^{\text{m}},67$ ergeben, und diese Höhe entspricht mit der ebengenannten Grundlinie einem Dreiecke von der Oberfläche 96,7, wonach also das resultirende Moment M_R in Uebereinstimmung mit der Rechnung 96,7 Meterkilogramm beträgt.

Will man ferner untersuchen, ob das System eine einzige Resultirende hat, so wird man in einer dritten Zeichnung, wie Fig. 72, die Projectionen der fördernden Kraft R und der Achse des Momentes M_R auftragen und mit den letztern die Risse AN′ und AN″ der Ebene dieses Momentes zeichnen. Diese muß dann auch die Richtung der Kraft R enthalten, wenn der genannte Fall stattfinden soll, und man

überzeugt sich, ob er stattfindet oder nicht, wenn man den Endpunkt R' als horizontale Projection eines Punktes jener Ebene annimmt und dazu die verticale Projection R," sucht, welche in dem betreffenden Falle mit dem Endpunkt der Projection AR" zusammenfallen wird. Findet dies, wie in unserer Figur, nicht statt, so liegt auch die Richtung von R nicht in der Ebene von M_R und das System hat keine allgemeine Resultirende.

Um dann auch durch Zeichnung die Kraft Q zu bestimmen, deren Richtung in die Achse der z fällt und deren Intensität so bemessen ist, daß mit ihr das System eine allgemeine Resultirende erhält, so darf man nur durch die Vertical-Projection R," des der Ebene des Momentes angehörenden Punktes R, eine Parallele zu der Projection AR" ziehen; diese wird auf der Achse der z die Länge AQ abschneiden, welche die gesuchte Kraft vorstellt.

Wenn aber die Richtung der Kraft Q, welche immer noch im Anfangspunkte A angreift, irgend eine beliebige sein soll, so muß man eine Ebene durch diese Richtung und durch die Richtung der Kraft R legen, die Projectionen der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der des Momentes zeichnen und nun nach dem Parallelogramm der Kräfte die Projectionen von Q so bestimmen, daß die Resultirende von Q und R in diese Durchschnittslinie fällt.

Würde endlich für die Kraft Q auch ein beliebiger Angriffspunkt angenommen, so müßte man sich dieselbe in eine im Anfangspunkte A angreifende fördernde Kraft und in ein Moment zerlegt denken, deren Intensitäten natürlich noch unbekannt sind, und von denen das letztere mit dem resultirenden Momente M_R zu einem neuen Momente zusammengesetzt werden müßte, dessen Ebene im Allgemeinen eine andere Richtung erhalten wird, als die des genannten Momentes, und zwar wird die Lage dieser Ebene nicht nur von der Lage der Ebene des Momentes der Kraft Q abhängen, die noch aus der Lage des Angriffspunktes und aus der gewählten Richtung dieser Kraft dargestellt werden könnte, sondern auch von der unbekannten Größe des Momentes dieser Kraft; man hätte also zuletzt die Intensität der fördernden Kraft Q so zu bestimmen, daß die Richtung der Resultirenden von ihr und der fördernden Resultirenden R in eine Ebene fällt, deren Lage selbst wieder von der zu bestimmenden Kraft abhängt; die Aufgabe wird also für die Construction nur durch mehrmaliges Probiren aufzulösen sein. Sie kommt dagegen auf den vorhergehenden Fall zurück, wenn die Richtung der Kraft Q in der Ebene des Momentes M_R selbst angenommen wird, da diese dann auch die Ebene des neuen resultirenden

Momentes bleibt und die Richtung der neuen förbernden Resultirenden von Q und R enthalten muß.

§. 91.

Die constructive Bestimmung der Richtung der allgemeinen Resultirenden R des Systems in dem Falle, daß die vorherbesprochene Bedingung erfüllt wird, oder der neuen Resultirenden $R_{,}$, welche durch Einführung einer neuen Kraft Q entsteht, hat nun keine Schwierigkeit mehr.

Durch den Endpunkt M_R'' der Projection der Achse des Momentes M_R in der verticalen Projectionstafel, Fig. 72, ziehe man eine Parallele $M_R''H$ zur Projectionsachse, welche auf der Coordinaten-Achse der z die Componente AH der genannten Momenten-Achse abschneiden wird. Mit dieser Componenten AH als Höhe und mit der für die Grundlinie der Momenten-Dreiecke angenommenen Länge construire man dann in der Ebene der xy ein Dreieck AB′C′, dessen Grundlinie B′C′ zu der Horizontal-Projection AR′ der förbernden Resultirenden R parallel ist, und das die Projection des resultirenden Momentes M_R in der Ebene der xy vorstellt. Auf gleiche Weise findet man eine Projection desselben Momentes in der verticalen Projectionstafel der xz, wenn durch den Endpunkt M_R' eine Parallele $M_R'F$ zur Projectionsachse gezogen und mit der dadurch erhaltenen Höhe AF und der gemeinschaftlichen Grundlinie der Momenten-Dreiecke ein Dreieck AD″E″ in der genannten Tafel gezeichnet wird, dessen Grundlinie D″E″ zu der Projection $AR_{,}''$ parallel ist. Es ist aber dabei wohl zu beachten, daß das so erhaltene Dreieck AD″E″ nicht die Projection desselben Dreieckes im Raume ist, welches das Dreieck AB′C′ zur Horizontal-Projection hat, daß aber die diesen Projectionen entsprechenden Raum-Dreiecke dieselbe Fläche haben, und beide die Intensität des Momentes M_R vorstellen. Es ist daher auch nicht schwer, statt des Dreieckes AD″E″ ein anderes AB″C″ zu zeichnen, welches die verticale Projection desselben Raum-Dreieckes, dem das Dreieck AB′C′ als horizontale Projection angehört, vorstellt, und dessen Grundlinie B″C″ noch der Projection AR parallel ist. Dieses letztere Dreieck ist indessen zur ferneren Construction nicht nothwendig, und das Ergebniß bleibt dasselbe, ob man das frühere Dreieck AD″E″ oder das zuletzt erhaltene AB″C″ als verticale Projection des Momentes M_R nimmt.

Die Grundlinie B′C′ des Dreieckes AB′C′ wird nun als die eine Kraft des Momentes M_R' in der Ebene der xy betrachtet und demnach, um dasselbe vollständig darzustellen, in A die der B′C′ parallele, gleiche,

aber entgegengesetzt gerichtete AC, gezogen, so daß diese in die Richtung der fördernden Kraft R' fällt, und dann mit dieser, welche mit der Projection $R_{,}'$ der fördernden Resultirenden in unserm Falle gleichbedeutend ist, zu einer einzigen Kraft vereinigt, welche entweder der Summe oder der Differenz von beiden gleich ist, je nachdem die $AC_{,}$ in demselben oder in entgegengesetztem Sinne von R' gerichtet ist. In unserm Falle findet das erstere statt; wir erhalten also die Kraft AL als Resultirende von $R_{,}'$ und $AC_{,}$, und diese gibt mit der parallel gerichteten $B'C'$ nach der in §. 2 angegebenen Construction den Punkt J' und die horizontale Projection $J'K'$ von der Richtung der allgemeinen Resultirenden $R_{,}$. Mittels eines ähnlichen Verfahrens findet man auch die verticale Projection $J''K''$ dieser Richtung, und diese ist sonach vollständig bestimmt.

Die Größe der allgemeinen Resultirenden $R_{,}$ bleibt dieselbe, wie die der fördernden Kraft $R_{,}$; der Angriffspunkt in ihrer Richtung bleibt willkürlich, und es werden demnach $M'R_{,}'$ und $M''R_{,}''$ die Projectionen der allgemeinen Resultirenden $R_{,}$ der Größe und Richtung nach vorstellen.

§. 92.

Zuletzt wollen wir noch für das ursprüngliche System, das keine allgemeine Resultirende hat, die Projectionen der Achse des kleinsten resultirenden Momentes suchen, um auch dieses der Größe und Richtung nach durch Zeichnung zu erhalten.

Wie oben gezeigt wurde, fällt die Achse dieses Momentes, das mit M_E bezeichnet wurde, wenn sie parallel mit ihrer Richtung in den Anfangspunkt versetzt wird, mit der Richtung der Resultirenden R der fördernden Kräfte zusammen und ist die Resultirende der Achse des resultirenden Momentes M_R vom gegebenen System und der Achse des Momentes $R \cdot AN$, welches durch die Versetzung der Kraft R in einen Punkt N, der sich in der Richtung der gesuchten Achse befindet, entstanden ist. Die Achse dieses letztern Momentes steht ferner senkrecht auf der Richtung der fördernden Resultirenden R und liegt demnach in einer zu dieser Richtung senkrechten Ebene, deren Risse AB' und AC'', Fig. 73, demnach senkrecht zu den Projectionen AR' und AR'' derselben Richtung sein werden. Sie liegt aber auch in einer Ebene, welche durch dieselbe Richtung und die Achse des Momentes M_R bestimmt wird, und deren Risse $F'AG''$ leicht zu erhalten sind. Der Durchschnitt dieser beiden Ebenen gibt also ihre Richtung, und die Projectionen derselben werden dadurch gefunden, daß man beide Ebenen

durch eine dritte B′DG″ durchschneidet und die Projectionen E′ und E″ des Durchgangspunktes jenes Durchschnittes in der letzten Ebene bestimmt. Mittels der Richtungen der Projectionen der gesuchten Achse AK des kleinsten Momentes und der Projectionen der Achse des Momentes R.AN und mit Hülfe der bekannten Achse des Momentes M_R kann nun die Größe der Projectionen AK′, AK″, und AL′, AL″ durch das Parallelogramm der Kräfte gefunden, und der Sinn, in welchem die Achse AK gerichtet ist, bestimmt werden.

Es bleibt also noch der Punkt N oder vielmehr die durch diesen Punkt gehende neue Richtung der fördernden Resultirenden R zu suchen, welche die eigentliche Lage der Achse des kleinsten Momentes ist, und dies wird auf dieselbe Weise geschehen, wie im vorhergehenden §. die Richtung der allgemeinen Resultirenden bestimmt wurde. Die Achse AL, oder deren Projectionen AL′ und AL″, Fig. 74, des Momentes R.AN geben wie dort die Projectionen desselben in den Projectionstafeln der xy und xz durch die Dreiecke AD′G′ und AF″H″, deren Grundlinie D′G′ oder F″H″ wieder die allen Momenten-Dreiecken gemeinschaftliche ist. Statt der ferneren dortigen Construction kann man nun aber auch diese beiden letzten Dreiecke in die Dreiecke AN′R′ und AN″R″ verwandeln, die denselben Flächeninhalt haben, wie jene, und deren Grundlinien N′R′ und N″R″ den Projectionen AR′ und AR″ der Resultirenden gleich und parallel sind; diese Grundlinien, beziehungsweise ihre Verlängerungen, werden dann die gesuchten Projectionen der Geraden vorstellen, von welcher jeder Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden kann, um in Bezug auf denselben als resultirendes Moment das kleinste zu erhalten, welches für das System möglich ist, und dessen Intensität durch die wirkliche Länge der Achse AK vorgestellt wird.

Unsere Figuren geben die entsprechenden Größen für den in §. 88 berechneten Fall übereinstimmend mit den dort gefundenen Werthen.

Sechstes Kapitel.

Gegenseitige Anziehung der Körper.

§. 93.

Die im vorhergehenden Kapitel vorgeführten Betrachtungen über die Gesammtwirkung von Kräften, deren Richtungen und Angriffspunkte an einem festen System von materiellen Punkten beliebig gegeben sind, sowie die Mittel, diese Gesammtwirkung zu berechnen, reichen in allen Fällen aus, wo die Zahl der Kräfte eine bestimmte ist, und wo diese Kräfte selbst einzeln ihrer Größe und Richtung nach bekannt sind; sie genügen aber nicht mehr, wenn die Angriffspunkte eine stetige Folge bilden, wenn die Richtungen der Kräfte von der Lage der Angriffspunkte abhängen und wenn ihre Intensität eine Function von der Lage und Masse dieser Angriffspunkte wird.

Im dritten Kapitel haben wir bereits einen ähnlichen Fall für parallele Kräfte in der Wirkung der Schwere kennen gelernt und dort sowie im darauf folgenden Kapitel sowohl die allgemeinen Ausdrücke zur Berechnung der Gesammtwirkung der Schwere auf irgend ein System von stetig aufeinanderfolgenden Angriffspunkten (Linien, Flächen und Körper) und zur Bestimmung der Coordinaten des Angriffspunktes jener Gesammtwirkung (des Schwerpunktes), als auch die besondern für gegebene geometrische Formen abgeleitet; es war aber dort die Intensität der an den einzelnen materiellen Punkten angreifenden Kräfte nur eine Function von der Masse derselben, ihre Richtung war bestimmt und wie die Intensität von der Lage der materiellen Punkte durchaus unabhängig. In dem gegenwärtigen Kapitel soll daher die oben angedeutete allgemeine Aufgabe, die Gesammtwirkung von Kräften mit stetig aufeinanderfolgenden Angriffspunkten zu ermitteln, wenn Richtung und Intensität derselben von der Lage und Masse dieser Angriffspunkte abhängt, aufgelöst, und dabei die gegenseitige Anziehung der Körper zu Grunde gelegt werden.

Jene Eigenschaft der Körper, welche wir Schwere nennen, oder

die als Anziehung sich äußernde Wirkung der Erde auf dieselben, ist nämlich nur ein besonderer Fall eines viel allgemeineren Gesetzes, auf das wir durch die Betrachtung des Weltgebäudes in strenger Schlußfolge hingeleitet werden, und welches darin besteht, daß alle Körper und alle materiellen Körpertheilchen ein gegenseitiges Bestreben zeigen, sich zu vereinigen, daß diese Eigenschaft der Stofftheilchen durchaus unabhängig ist von der besondern Art des Stoffes, aus welchem sie gebildet sind, und daß sich dieselbe nur mit der Menge des in ihnen enthaltenen Stoffes oder ihrer Masse und mit ihrer gegenseitigen Entfernung ändert, und zwar so, daß sie mit der Masse wächst, mit der Entfernung dagegen abnimmt. Diese Eigenschaft, welche wir uns der wahrzunehmenden Wirkung gemäß als eine den Stofftheilchen innewohnende anziehende Kraft vorstellen, ist indessen für die uns umgebenden Körper so gering, daß sie im Allgemeinen durch die auf der Erde ziemlich beträchtlichen Widerstände völlig wirkungslos gemacht wird; das Vorhandensein derselben wird aber durch die von großen Gebirgsmassen bewirkte Ablenkung des Bleilothes und durch die Bewegung des Hebels einer Coulomb'schen Drehwage mittels großer Bleikugeln bestätigt.

Die folgenden Untersuchungen finden übrigens auch bei andern gegenseitigen Wirkungen der Körper, wie bei den elektrischen und magnetischen Anziehungen, ihre Anwendung und sind daher auch von allgemeiner Bedeutung.

I. Systeme ohne stetigen Zusammenhang.

§. 94.

Betrachten wir zuerst die gegenseitige Wirkung zweier materiellen Punkte M und N, deren Entfernung mit w, und deren Massen mit m und m' bezeichnet seien. Diese Wirkung wird als eine gegenseitige allgemein eine Function der beiden Massen m und m' und ihrer Entfernung w sein und demnach, wenn wir sie mit R bezeichnen, durch

$$R = F(m, m', w)$$

ausgedrückt werden müssen. Denken wir uns dann statt des materiellen Punktes M einen andern M' in gleicher Entfernung von N, aber von nmal größerer Dichte, so daß er auch nmal so viel Masse oder die Masse nm enthält, so wird die gegenseitige anziehende Wirkung R'

zwischen den Punkten M' und N ebenfalls n mal so groß sein, als die zwischen M und N, da der Punkt M' aus n gleichen, gleichsam concentrischen Punkten M bestehend betrachtet werden kann; man hat daher

$$R' = nR \quad , \qquad F(nm, m', w) = nF(m, m', w)$$

und zieht daraus, wie in §. 9, nach dem Gesetze der Homogeneität

$$\frac{R'}{nm} = \frac{R}{m} = F(m', w) \, .$$

Auf gleiche Weise findet man aber auch in Bezug auf eine n' mal größere Masse m' die n' mal größere Wirkung R'', also

$$R'' = n'R' = nn'R$$

und damit die Verhältnisse:

$$\frac{R''}{n'm'} = \frac{n'R'}{nm \, . \, n'm'} = \frac{R}{mm'} = f(w)$$

also für R den Werth:

$$R = mm' f(w) \, .$$

Für zwei andere Massen $m_,$ und $m_,'$, deren gegenseitige Entfernung $w_,$ sei, hat man ebenso als anziehende Wirkung

$$R_, = m_, m_,' f(w_,)$$

und damit die Proportion:

$$R : R_, = mm' f(w) : m_, m_,' f(w_,)$$

oder die Gleichung:

$$\frac{R_,}{R} = \frac{m_, m_,'}{mm'} \cdot \frac{f(w_,)}{f(w)} \, .$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß das Verhältniß der gleichartigen Größen R und $R_,$, wie es nach dem Gesetze der Homogeneität sein muß, unabhängig ist von der Einheit der Masse; es muß aber ebenso unabhängig sein von der Einheit der Entfernung, woraus nothwendig folgt, daß die Function $f(w)$ nur von einer Form sein kann, welche der Bedingung genügt:

$$A.) \qquad \frac{f(w_,)}{f(w)} = f\left(\frac{w_,}{w}\right) ,$$

also auch, wenn $w_, = w$, gesetzt wird, der Bedingung:

$$f(1) = 1 \, ,$$

und man wird sich leicht überzeugen, daß die Bedingung (A) nur durch die einfache Function:

$$f(w) = w^n$$

befriedigt werden kann, worin n irgend eine positive oder negative Zahl vorstellt. *)

Bezeichnet man dann die Wirkung $R_,$ zwischen zwei Massen $m_,=1$ und $m_,'=1$, deren Entfernung $w_,$ ebenfalls die Einheit ist, mit G, so erhält man

$$R : G = mm'f(w) : 1$$

und dadurch für das absolute Maaß der gegenseitigen Anziehung zweier Massenpunkte m und m', deren gegenseitige Entfernung w ist, den Ausdruck:

$$R = Gmm'f(w) \;, \tag{57.}$$

worin die Constante G den Werth dieser anziehenden Kraft bezeichnet, wenn jeder der beiden anziehenden Punkte die Einheit der Masse enthält und sich beide in der Einheit der Entfernung von einander befinden. Die Funktion f(w) ist innerhalb der oben bestimmten Form, also in Bezug auf den Exponenten n willkürlich und kann insoweit beliebig oder den Erfahrungen in der Natur gemäß angenommen werden; diese lehren, und zwar am einfachsten durch die Gesetze der Planeten-Bewegung, wie im vorhergehenden Buche gezeigt worden ist, daß für die allgemeine Massenanziehung $f(w) = w^{-2} = \frac{1}{w^2}$ ist, d. h. daß die gegenseitige Anziehungskraft zweier materiellen Punkte im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung steht. Bei den allgemeinsten Ableitungen soll indessen diese Function, beziehungsweise der Exponent n, unbestimmt gelassen werden. Ebenso soll auch die Art der gegenseitigen Wirkung, ob sie eine anziehende oder abstoßende ist, im Allgemeinen unbestimmt bleiben, so daß der Factor G ebensowohl die Intensität der anziehenden, als die der abstoßenden Kraft für die Einheiten der Masse und der Entfernung vorstellt.

Nimmt man nun den einen der gegebenen Punkte als Anfang eines Coordinatensystems und drückt die Lage des zweiten in Bezug auf dieses durch seine Coordinaten x, y, z aus, so wird

$$w^2 = x^2 + y^2 + z^2 \;,$$

*) Einen Beweis für diesen Satz wird man in der Einleitung zu meiner Analysis der Stetigkeit finden.

und für die drei Winkel α, β, γ, welche die verbindende Gerade, also auch die Richtung der Kraft R mit den drei Achsen der Coordinaten bildet, hat man:

$$\cos\alpha = \frac{x}{w} \quad , \qquad \cos\beta = \frac{y}{w} \quad , \qquad \cos\gamma = \frac{z}{w} \,,$$

wo vorausgesetzt wird, daß diese Kraft eine in M, Fig. 75, angreifende und von M gegen N wirkende, also anziehende ist; soll dieselbe abstoßend wirken, so muß man

$$\cos\alpha = -\frac{x}{w} \quad , \qquad \cos\beta = -\frac{y}{w} \quad , \qquad \cos\gamma = -\frac{z}{w}$$

nehmen, und es wird dann die Art der Wirkung durch die Zeichen der Cosinus der Richtungswinkel angedeutet. Die umgekehrte Bezeichnung wird aber eintreten, wenn die Kraft R an dem Punkte N angreifend gedacht wird; es werden dann jene Cosinus für die abstoßende Wirkung positiv, für die anziehende negativ werden. Im Allgemeinen kann man daher bei den Cosinus der Richtungswinkel von der Art der Wirkung ganz Umgang nehmen und diese unmittelbar durch das Zeichen des Coeffizienten G näher bestimmen, so daß die Componenten der Kraft R parallel zu den drei Coordinaten-Achsen für beide Wirkungsarten durch

$$58.)\quad X = Gmm'f(w)\frac{x}{w} \,, \quad Y = Gmm'f(w)\frac{y}{w} \,, \quad Z = Gmm'f(w)\frac{z}{w}$$

ausgedrückt werden. Für den besondern Fall: $f(w) = \frac{1}{w^2}$ sind demnach

$$X = Gmm'\frac{x}{w^3} \quad , \qquad Y = Gmm'\frac{y}{w^3} \quad , \qquad Z = Gmm'\frac{z}{w^3}$$

die längs der drei Achsen thätigen Kräfte.

§. 95.

Sei nun ein unveränderliches System von materiellen Punkten gegeben, und dessen Wirkung auf einen einzelnen außerhalb oder innerhalb desselben liegenden Punkt zu bestimmen.

Diese Aufgabe wird am einfachsten dadurch gelöst werden, daß man den angegriffenen Punkt als Anfang eines beliebigen Coordinatensystems nimmt und die Lage aller Punkte des gegebenen Systems auf dasselbe bezieht. Sind also x, y, z die Coordinaten eines dieser Punkte, m seine Masse, μ die Masse des angegriffenen Punktes, so erhält man nach dem Vorhergehenden

$$G\mu m \frac{x}{w} f(w) \quad , \quad G\mu m \frac{y}{w} f(w) \quad , \quad G\mu m \frac{z}{w} f(w)$$

als Componenten der gegenseitigen Wirkung dieser beiden Punkte parallel zu den drei Achsen genommen, worin $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ immer die Entfernung der beiden Punkte bezeichnet. Für die gegenseitige Wirkung zwischen dem einzeln stehenden Punkte und einem zweiten Punkte des Systems, dessen Coordinaten und Masse mit x', y', z' und m' bezeichnet sind, hat man ebenso die längs der Achsen gerichteten Seitenkräfte:

$$G\mu m' \frac{x'}{w'} f(w') \quad , \quad G\mu m' \frac{y'}{w'} f(w') \quad , \quad G\mu m' \frac{z'}{w'} f(w'),$$

worin w' die Entfernung: $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ vorstellt, u. s. f.

Die drei Componenten X, Y, Z der Gesammtwirkung R des Systems auf den Anfangspunkt werden demnach durch

$$X = G\mu \Sigma . m \frac{x}{w} f(w) \, , \quad Y = G\mu \Sigma . m \frac{y}{w} f(w) \, , \quad Z = G\mu \Sigma . m \frac{z}{w} f(w) \quad (59.$$

ausgedrückt, und daraus die Resultirende R, sowie die Richtungswinkel $\widehat{Rx}$, $\widehat{Ry}$, $\widehat{Rz}$ durch die bekannten Verhältnisse:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos a = \frac{X}{R} \quad , \quad \cos b = \frac{Y}{R} \quad , \quad \cos c = \frac{Z}{R}$$

abgeleitet. In diesen Werthen wird man den Coeffizienten G für eine anziehende Wirkung positiv, für eine abstoßende negativ nehmen.

Bringt man die Werthe von X, Y, Z unter die Form:

$$X = G\mu \Sigma . m x \frac{f(w)}{w}, \quad Y = G\mu \Sigma . m y \frac{f(w)}{w}, \quad Z = G\mu \Sigma . m z \frac{f(w)}{w},$$

so sieht man sogleich, daß für die Voraussetzung: $f(w) = w$, d. h. wenn die Anziehung der Entfernung proportional ist, das Verhältniß: $\frac{f(w)}{w}$ von w unabhängig wird; man weiß ferner (§. 22, Gl. 16ª), daß

$$\Sigma . mx = \mathbf{X} \Sigma m \quad , \quad \Sigma . my = \mathbf{Y} \Sigma m \quad , \quad \Sigma . mz = \mathbf{Z} \Sigma m$$

gesetzt werden kann, wenn **X**, **Y**, **Z** die Coordinaten des Schwerpunktes von dem gegebenen System bezeichnen, und dadurch wird

$$X = G\mu \mathfrak{X} \Sigma m \quad , \quad Y = G\mu \mathfrak{Y} \Sigma m \quad , \quad Z = G\mu \mathfrak{Z} \Sigma m \ ,$$

$$R = G\mu \sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} . \Sigma m = G\mu M \mathfrak{W} \ ;$$

die Wirkung des ganzen Systems ist folglich dieselbe, als ob die ganze Masse $M = \Sigma m$ desselben in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre.

In jedem andern Falle geht noch, wie leicht zu sehen, die Richtung der Resultirenden durch das System, und es läßt sich in dieser Richtung, innerhalb oder außerhalb des Systems, immer ein materieller Punkt denken von gleicher Masse, wie die des ganzen Systems, dessen Wirkung auf den einzelnen materiellen Punkt dieselbe sein würde, wie die von dem ganzen System hervorgebrachte. Die Coordinaten $\mathfrak{X}_{,}$, $\mathfrak{Y}_{,}$, $\mathfrak{Z}_{,}$ dieses Punktes, den ich Mittelpunkt der Anziehung nennen will, werden offenbar durch die Gleichungen:

$$60.) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{X}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) \Sigma m = \Sigma . m \frac{x}{w} f(w) \ , \\ \frac{\mathfrak{Y}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) \Sigma m = \Sigma . m \frac{y}{w} f(w) \ , \\ \frac{\mathfrak{Z}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) \Sigma m = \Sigma . m \frac{z}{w} f(w) \end{cases}$$

bestimmt, worin $\mathfrak{W}_{,} = \sqrt{\mathfrak{X}_{,}^2 + \mathfrak{Y}_{,}^2 + \mathfrak{Z}_{,}^2}$ dessen Entfernung vom Anfangspunkte, dem angegriffenen Punkte, ausdrückt, und die Gesammtwirkung des Systems kann dann durch

$$61.) \qquad R = G\mu M f(\mathfrak{W}_{,}) = G\mu \Sigma . m f(w)$$

vorgestellt werden, worin M wieder die Masse: Σm des ganzen Systems vertritt.

Liegen z. B. alle Punkte des Systems auf einer Kugelfläche und der einzelne Punkt in dem Mittelpunkte derselben, so daß alle w gleich sind, so wird

$$\frac{\mathfrak{X}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) \Sigma m = \frac{f(w)}{w} \Sigma . mx , \quad \frac{\mathfrak{Y}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) \Sigma m = \frac{f(w)}{w} \Sigma . my ,$$

$$\frac{\mathfrak{Z}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) \Sigma m = \frac{f(w)}{w} \Sigma . mz ,$$

oder wenn für $\Sigma . mx$, $\Sigma . my$, $\Sigma . mz$ wieder ihre obigen Werthe: $\mathfrak{X} \Sigma m$, $\mathfrak{Y} \Sigma m$, $\mathfrak{Z} \Sigma m$ gesetzt werden,

$$\frac{\mathfrak{X}_,}{\mathfrak{W}_,} f(\mathfrak{W}_,) = \mathfrak{X}\frac{f(w)}{w} \quad , \quad \frac{\mathfrak{Y}_,}{\mathfrak{W}_,} f(\mathfrak{W}_,) = \mathfrak{Y}\frac{f(w)}{w} \, ,$$

$$\frac{\mathfrak{Z}_,}{\mathfrak{W}_,} f(\mathfrak{W}_,) = \mathfrak{Z}\frac{f(w)}{w} \, .$$

Wenn man dann diese Ausdrücke zum Quadrat erhebt, addirt und beachtet, daß $\mathfrak{X}_,^2 + \mathfrak{Y}_,^2 + \mathfrak{Z}_,^2 = \mathfrak{W}_,^2$, $\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{W}^2$ ist, so findet man

$$w f(\mathfrak{W}_,) = \mathfrak{W} f(w) \, ;$$

ferner ergibt sich

$$\cos\widehat{Rx} = \frac{X}{R} = \frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{W}} \quad , \quad \cos\widehat{Ry} = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{W}} \quad , \quad \cos\widehat{Rz} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{W}} \, ,$$

und man schließt daraus, daß die Richtung der anziehenden Wirkung durch den Schwerpunkt des Systems geht.

Man findet auf diese Weise für die Wirkung, welche eine homogene Halbkugelfläche auf ihren Mittelpunkt hervorbringt, in dem besondern Falle, daß $f(w) = \frac{1}{w^2}$ ist, da man hier $w = r$, $\mathfrak{W} = \frac{1}{2} r$ hat,

$$\mathfrak{W}_,^2 = 2r^2 \, ;$$

die Wirkung ist demnach dieselbe, als wenn die ganze Masse der Fläche in einem Punkte vereinigt wäre, welcher $1,414\ldots r$ vom Mittelpunkte entfernt liegt. Für eine ganze Kugelfläche wird $\mathfrak{W} = 0$, also $\mathfrak{W}_, = \infty$, und die Wirkung R ist gleich Null, wie sich dieses von selbst versteht.

§. 96.

Der Anfangspunkt der Coordinaten wird allgemeiner und bisweilen auch für die Rechnung vortheilhafter in das System verlegt, und dann die Lage des angegriffenen materiellen Punktes, dessen Masse μ ist, durch seine drei Coordinaten a, b, c bestimmt, während man die der Punkte des Systems immer mit x, y, z bezeichnet. Die Entfernung w eines dieser letztern von jenem angegriffenen Punkte wird nun durch

$$w = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

ausgedrückt, und die Winkel $\widehat{wx}$, $\widehat{wy}$, $\widehat{wz}$, welche die Verbindungslinie der beiden Punkte mit den drei Achsen bildet, ebenso durch

$$\cos\widehat{wx} = \frac{a-x}{w} \quad , \quad \cos\widehat{wy} = \frac{b-y}{w} \quad , \quad \cos\widehat{wz} = \frac{c-z}{w} \, .$$

Die gegenseitige fördernde Wirkung, welche zwischen diesen beiden Punkten stattfindet, ist wieder $G\mu m f(w)$ und läßt sich in die drei Seitenkräfte:

$$G\mu m\frac{a-x}{w}f(w)\ ,\quad G\mu m\frac{b-y}{w}f(w)\ ,\quad G\mu m\frac{c-z}{w}f(w)$$

zerlegen; dadurch ergeben sich als Componenten der Gesammtwirkung R die Ausdrücke:

$$62.)\ \begin{cases} X = G\mu\Sigma.m\frac{a-x}{w}f(w)\ ,\quad Y = G\mu\Sigma.m\frac{b-y}{w}f(w)\ , \\ Z = G\mu\Sigma.m\frac{c-z}{w}f(w)\ . \end{cases}$$

Die Richtung der Resultirenden geht offenbar durch den Punkt abc; sie ist bestimmt, wenn die Winkel, welche sie mit den drei Achsen bildet, bekannt sind, und diese werden auf dieselbe Weise wie vorher gefunden.

Die Gleichungen zur Bestimmung des Mittelpunktes der Anziehung, d. i. des Punktes, in welchem ohne Aenderung der Wirkung die ganze Masse $M = \Sigma m$ des Systems vereinigt gedacht werden kann, und dessen Coordinaten wieder $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ seien, nehmen nun die Form an:

$$63.)\ \begin{cases} M\frac{a-X_{,}}{W_{,}}f(W_{,}) = \Sigma.m\frac{a-x}{w}f(w)\ , \\ M\frac{b-Y_{,}}{W_{,}}f(W_{,}) = \Sigma.m\frac{b-y}{w}f(w)\ , \\ M\frac{c-Z_{,}}{W_{,}}f(W_{,}) = \Sigma.m\frac{c-z}{w}f(w)\ , \end{cases}$$

oder wenn man

$$\frac{f(w)}{w} \text{ durch } F(w)$$

ersetzt, die einfachere:

$$\begin{cases} M(a-X_{,})F(W_{,}) = \Sigma.m(a-x)F(w)\ , \\ M(b-Y_{,})F(W_{,}) = \Sigma.m(b-y)F(w)\ , \\ M(c-Z_{,})F(W_{,}) = \Sigma.m(c-z)F(w)\ , \end{cases}$$

worin wieder

$$W_{,} = \sqrt{(a-X_{,})^2+(b-Y_{,})^2+(c-Z_{,})^2}$$

die Entfernung des Mittelpunktes der Anziehung von dem in Angriff genommenen Punkte ausdrückt. Diese wird zuerst und zwar dadurch

gefunden, daß man die Summe der Quadrate der drei vorhergehenden Gleichungen (63) bildet und so den Ausdruck erhält:

$$Mf(W_{,})=\sqrt{[\Sigma.m(a-x)F(w)]^2+[\Sigma.m(b-y)F(w)]^2+[\Sigma.m(c-z)F(w)]^2},$$

woraus der Werth von $W_{,}$ und $F(W_{,})$ gezogen werden kann, mittels dessen dann aus dem Vorhergehenden die Werthe der Coordinaten $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ abgeleitet werden.

Für den besondern Fall: $f(w)=\frac{1}{w^2}$ nehmen diese Ausdrücke die Formen an:

$$M\frac{a-X_{,}}{W_{,}^3}=\Sigma.m\frac{a-x}{w^3}\ ,\quad M\frac{b-Y_{,}}{W_{,}^3}=\Sigma.m\frac{b-y}{w^3}\ ,$$

$$M\frac{c-Z_{,}}{W_{,}^3}=\Sigma.m\frac{c-z}{w^3}\ ,$$

$$\frac{M}{W_{,}^2}=\sqrt{\left(\Sigma.m\frac{a-x}{w^3}\right)^2+\left(\Sigma.m\frac{b-y}{w^3}\right)^2+\left(\Sigma.m\frac{c-z}{w^3}\right)^2}\ .$$

Aus dem letzten derselben zieht man den Werth von $W_{,}$, nämlich

$$W_{,}=\sqrt[4]{\frac{M^2}{\left(\Sigma.m\frac{a-x}{w^3}\right)^2+\left(\Sigma.m\frac{b-y}{w^3}\right)^2+\left(\Sigma.m\frac{c-z}{w^3}\right)^2}}\ ,$$

und durch die erstern hat man, wenn dieser berechnet ist,

$$X_{,}=a-\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3(a-x)\ ,\quad Y_{,}=b-\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3(b-y)\ ,$$

$$Z_{,}=c-\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3(c-z)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}X_{,}&=\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3x+a\left[1-\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3\right]\\Y_{,}&=\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3y+b\left[1-\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3\right]\\Z_{,}&=\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3z+c\left[1-\Sigma.\frac{m}{M}\left(\frac{W_{,}}{w}\right)^3\right]\end{aligned}\right\}\ .\ (64.$$

§. 97.

Aus den vorhergehenden Ergebnissen können wir nun für den betreffenden besondern Fall, wo $f(w) = \frac{1}{w^2}$ ist, einen Schluß ziehen, der sich leicht auch auf allgemeinere Fälle ausdehnen läßt und dessen wir später bedürfen.

Bezeichnen wir nämlich den größten Werth von w mit w_n, den kleinsten mit w_0 und setzen $w_n = \alpha_, w = \alpha_,' w' = \alpha_,'' w'' =$ etc., worin $\alpha_,$, $\alpha_,'$, etc. Zahlen bedeuten, welche größer sind als 1, ebenso $w_0 = \alpha_0 w = \alpha'_0 w' =$ etc., indem man mit α_0, α'_0, etc. Zahlen bezeichnet, die größer sind als 0 und kleiner als 1, und beachten wir, daß

$$\Sigma . m \frac{a-x}{w^3} = \frac{1}{w_n^2} \Sigma . m \frac{a-x}{w} \alpha_,^2 = \frac{1}{w_0^2} \Sigma . m \frac{a-x}{w} \alpha_0^2 ,$$

so kann der Werth von **W**, durch

$$\mathbf{W}_, = w_n \sqrt[4]{\frac{M^2}{\left(\Sigma . m \frac{a-x}{w} \alpha_,^2\right)^2 + \left(\Sigma . m \frac{b-y}{w} \alpha_,^2\right)^2 + \left(\Sigma . m \frac{c-z}{w} \alpha_,^2\right)^2}}$$

und durch

$$\mathbf{W}_, = w_0 \sqrt[4]{\frac{M^2}{\left(\Sigma . m \frac{a-x}{w} \alpha_0^2\right)^2 + \left(\Sigma . m \frac{b-y}{w} \alpha_0^2\right)^2 + \left(\Sigma . m \frac{c-z}{w} \alpha_0^2\right)^2}} ,$$

ausgedrückt werden, und es ist leicht zu sehen, daß wenn alle Glieder unter den Summenzeichen im Nenner dieser Werthe gleiche Zeichen haben, d. h. wenn die Werthe von a, b, c positiv oder negativ größer sind als alle Werthe von x, y, z, wenn also der angegriffene Punkt ganz außerhalb des angreifenden Systems liegt, der erste Nenner größer, der zweite dagegen kleiner als $(\Sigma m)^2$ oder M^2 sein wird, daß also auch **W**, kleiner ist als w_n und größer als w_0. Dieser Schluß wird noch einleuchtender werden, wenn man mit $\beta_,$ den kleinsten der Werthe $\alpha_,$, mit β_0 den größten der Werthe α_0 bezeichnet; denn es ist dann offenbar der erste Nenner größer als

$$\beta_,^4 \left[\left(\Sigma . m \frac{a-x}{w}\right)^2 + \left(\Sigma . m \frac{b-y}{w}\right)^2 + \left(\Sigma . m \frac{c-z}{w}\right)^2\right] ,$$

der zweite aber kleiner als

$$\beta_0^4\left[\left(\Sigma\,.\,m\frac{a-x}{w}\right)^2+\left(\Sigma\,.\,m\frac{b-y}{w}\right)^2+\left(\Sigma\,.\,m\frac{c-z}{w}\right)^2\right]\;,$$

und von diesen Ausdrücken selbst ist unter der obigen Voraussetzung in Betreff der Summenglieder, da $\beta_{,}$ immer größer, β_0 aber kleiner als 1 bleibt, der erste größer, der zweite kleiner als $(\Sigma m)^2$.

Damit ergibt sich dann für die Werthe von $\mathbf{X}_{,}$, $\mathbf{Y}_{,}$, $\mathbf{Z}_{,}$ die Folgerung, daß der Quotient $\frac{\mathbf{W}_{,}}{w}$ bald größer, bald kleiner als 1 ist und sich um so weniger davon entfernt, je größer die Coordinaten a, b, c gegen die größten Werthe von x, y, z sind, daß also die Factoren

$$1-\Sigma\,.\,\frac{m}{M}\left(\frac{\mathbf{W}_{,}}{w}\right)^3$$

nur wenig von Null verschieden sein können, und die Werthe von $\mathbf{X}_{,}$, $\mathbf{Y}_{,}$, $\mathbf{Z}_{,}$ immer zwischen den größten und kleinsten Werthen von x, y, z liegen.

Nebenbei schließt man noch aus den Gleichungen (64), daß für eine unbegrenzt wachsende Entfernung des angegriffenen Punktes die Werthe von $\mathbf{X}_{,}$, $\mathbf{Y}_{,}$, $\mathbf{Z}_{,}$ sich den Ausdrücken:

$$\mathbf{X}_{,}=\frac{\Sigma\,.\,m x}{M}\quad,\qquad \mathbf{Y}_{,}=\frac{\Sigma\,.\,m y}{M}\quad,\qquad \mathbf{Z}_{,}=\frac{\Sigma\,.\,m z}{M}$$

nähern, daß der Mittelpunkt der Anziehung also dem Schwerpunkt des Systems immer näher kommt.

Bei näherer Betrachtung wird man ferner einsehen, daß es nicht einmal nothwendig ist, daß alle Glieder unter den Summenzeichen zugleich positiv oder negativ sind, damit $\mathbf{W}_{,}$ zwischen w_0 und w_n liegt; es können selbst zwei dieser Summen, z. B. $\Sigma\,.\,m\frac{b-y}{w^3}$ und $\Sigma\,.\,m\frac{c-z}{w^3}$ Null werden, und doch für die dritte

$$\Sigma\,.\,m\frac{a-x}{w}\alpha_{,}^2 > M\quad,\qquad \Sigma\,.\,m\frac{a-x}{w}\alpha_0^2 < M$$

werden, und dieser Fall wird immer eintreten, wenn die Achse der x durch den angegriffenen Punkt und den Mittelpunkt der Anziehung gelegt und die Entfernung a des erstern von dem letztern hinreichend groß gegen die Ausdehnung des Systems ist, so daß die Glieder $\frac{a-x}{w}$ nicht sehr von 1 verschieden sind und alle gleiche Zeichen haben.

Ist dieses letztere aber nicht der Fall, ist vielmehr für viele Punkte $\frac{a-x}{w}$ sehr klein, oder enthält auch die Summe $\Sigma . m \frac{a-x}{w^3}$ viele Glieder von entgegengesetzten Zeichen, so wird $\mathbf{w}_,$ größer werden als w_n und kann selbst *unendlich* werden, nämlich dann, wann sich der angegriffene Punkt einer solchen Lage innerhalb des Systems nähert, daß die Wirkungen von allen Seiten sich gegenseitig aufheben, die Gesammtwirkung auf denselben also Null ist; denn es ist einleuchtend, daß wenn der Ausdruck: $G \mu M \frac{1}{\mathbf{w}_,^2}$ durch den Werth: Null gehen soll, $\mathbf{w}_,$ durch den Werth: Unendlich gehen muß.

Will man diese Betrachtungen nun auf andere Functionen von w ausdehnen, so muß man diese in solche abtheilen, welche für $w = 0$ ebenfalls Null, und in solche, welche für diesen Werth unendlich werden. Man wird dann finden, daß für die letztern dasselbe gilt, was oben für die Function $f(w) = \frac{1}{w^2}$ bewiesen wurde, und daß auch für die erstern in dem Falle, wo der in Angriff genommene Punkt außerhalb des Systems liegt, offenbar $\mathbf{w}_, > w_0$ und $< w_n$ sein muß; daß sich dagegen in diesem Falle $\mathbf{w}_,$ dem Werthe: Null nähert, wenn die Summen:

$$\Sigma . m \frac{a-x}{w^3} \quad , \quad \Sigma . m \frac{b-y}{w^3} \quad , \quad \Sigma . m \frac{c-z}{w^3}$$

sich von der positiven oder negativen Seite demselben Werthe nähern. In der That wird für eine solche Function von w die anziehende Wirkung mit der Entfernung zunehmen, und es kann dann $G \mu M f(\mathbf{w}_,)$ nur Null werden, wenn $\mathbf{w}_,$ selbst Null ist.

Es kann demnach im Allgemeinen behauptet werden, daß *wenn der in Angriff genommene Punkt außerhalb des Systems liegt*, namentlich wenn dieses nicht blos in materiellen Punkten besteht, die auf einer *Fläche* oder in einer *Linie* vertheilt sind, der Mittelpunkt der Anziehung immer in das System fällt, daß dagegen im andern Falle, wo jener Punkt im System selbst liegt und zwar so, daß die Wirkungen von allen Seiten gleich werden, dieser Mittelpunkt der Anziehung in eine unendliche Entfernung rücken wird, wenn die anziehende Wirkung mit der Entfernung abnimmt, und daß er mit dem angegriffenen Punkte zusammenfallen würde, wenn die anziehende Wirkung mit der Entfernung wachsen sollte.

§. 98.

Untersuchen wir endlich noch die Wirkung eines Systems von materiellen Punkten auf ein anderes ähnliches System, welches von dem ersteren ganz getrennt sein oder auch dasselbe durchdringen kann. Das Coordinaten = System werde auf irgend eine Weise gelegt, und die Coordinaten der Punkte des erstern oder wirkenden Systems durch x, y, z, die des zweiten oder angegriffenen Systems dagegen durch t, u, v bezeichnet.

Die Gesammtwirkung P des ganzen ersten Systems auf einen Punkt des zweiten, dessen Masse μ und dessen Coordinaten t, u, v seien, wird nach dem Vorhergehenden (Gl. 61) durch

$$G\mu\Sigma . mf(w) = G\mu Mf(W,)$$

ausgedrückt und läßt sich zuerst als eine fördernde Kraft P darstellen, welche im Anfangspunkte angreift und drei rechtwinklige Seitenkräfte: $P\cos\widehat{Px}$, $P\cos\widehat{Py}$, $P\cos\widehat{Pz}$ gibt, für welche man mit der Bezeichnung:

$$w_0 = \sqrt{(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2} ,$$

$$w_0' = \sqrt{(t-x')^2+(u-y')^2+(v-z')^2} ,$$

$$w_0'' = \sqrt{(t-x'')^2+(u-y'')^2+(v-z'')^2} ,$$

u. s. f.

die Ausdrücke erhält:

$$P\cos\widehat{Px} = G\mu\left[m\frac{t-x}{w_0}f(w_0)+m'\frac{t-x'}{w_0'}f(w_0')+m''\frac{t-x''}{w_0''}f(w_0'')+\text{etc.}\right]$$

$$= G\mu\Sigma . m\frac{t-x}{w_0}f(w_0) ,$$

$$P\cos\widehat{Py} = G\mu\left[m\frac{u-y}{w_0}f(w_0)+m'\frac{u-y'}{w_0'}f(w_0')+m''\frac{u-y''}{w_0''}f(w_0'')+\text{etc.}\right]$$

$$= G\mu\Sigma . m\frac{u-y}{w_0}f(w_0) ,$$

$$P\cos\widehat{Pz} = G\mu\left[m\frac{v-z}{w_0}f(w_0)+m'\frac{v-z'}{w_0'}f(w_0')+m''\frac{v-z''}{w_0''}f(w_0'')+\text{etc.}\right]$$

$$= G\mu\Sigma . m\frac{v-z}{w_0}f(w_0) .$$

Die Wirkung P′ desselben Systems auf einen Punkt t′ u′ v′ des zweiten, dessen Masse μ' ist, gibt ebenso die Seitenkräfte:

$$P' \cos \widehat{P'x} = G\mu' \left[m \frac{t'-x}{w_{,}} f(w_{,}) + m' \frac{t'-x'}{w_{,}'} f(w_{,}') + \text{etc.} \right]$$
$$= G\mu' \Sigma . m \frac{t'-x}{w_{,}} f(w_{,}) \,,$$

$$P' \cos \widehat{P'y} = G\mu' \left[m \frac{u'-y}{w_{,}} f(w_{,}) + m' \frac{u'-y'}{w_{,}'} f(w_{,}') + \text{etc.} \right]$$
$$= G\mu' \Sigma . m \frac{u'-y}{w_{,}} f(w_{,}) \,,$$

$$P' \cos \widehat{P'z} = G\mu' \left[m \frac{v'-z}{w_{,}} f(w_{,}) + m' \frac{v'-z'}{w_{,}'} f(w_{,}') + \text{etc.} \right]$$
$$= G\mu' \Sigma . m \frac{v'-z}{w_{,}} f(w_{,}) \,,$$

indem man nun hat

$$\sqrt{(t'-x)^2 + (u'-y)^2 + (v'-z)^2} = w_{,} \,,$$
$$\sqrt{(t'-x')^2 + (u'-y')^2 + (v'-z')^2} = w_{,}' \,,$$

u. s. f.

Für die Gesammtwirkung R erhält man demnach als Componente parallel zur Achse der x

$$\Sigma . P \cos \widehat{Px} = G \left[\mu \Sigma . m \frac{t-x}{w_0} f(w_0) + \mu' \Sigma . m \frac{t'-x}{w_{,}} f(w_{,}) + \text{etc.} \right],$$

und wenn man nun den Inder von w wegläßt, ein neues Summenzeichen vorsetzt und an diesem durch einen Inder die Veränderlichen andeutet, auf welche es sich bezieht, und dieselbe Bezeichnung auch für die übrigen Componenten anwendet, so ergeben sich folgende Werthe für die drei rechtwinkligen Componenten der fördernden Gesammtwirkung R:

65.)
$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma . P \cos \widehat{Px} &= G \Sigma_t . \mu \Sigma_x . m \frac{t-x}{w} f(w) \,, \\ \Sigma . P \cos \widehat{Py} &= G \Sigma_t . \mu \Sigma_x . m \frac{u-y}{w} f(w) \,, \\ \Sigma . P \cos \widehat{Pz} &= G \Sigma_t . \mu \Sigma_x . m \frac{v-z}{w} f(w) \,, \end{aligned} \right.$$

und damit auf bekannte Weise R selbst.

Die Kraft P gibt aber auch eine drehende Wirkung in Bezug auf den Anfang der Coordinaten, welche sich in die drei nachstehenden in Bezug auf die drei Coordinaten=Ebenen zerlegen läßt:

$$P(x\cos\widehat{Py}-y\cos\widehat{Px})=G\mu\left[t\Sigma.m\frac{u-y}{w_0}f(w_0)-u\Sigma.m\frac{t-x}{w_0}f(w_0)\right],$$

$$P(z\cos\widehat{Px}-x\cos\widehat{Pz})=G\mu\left[v\Sigma.m\frac{t-x}{w_0}f(w_0)-t\Sigma.m\frac{v-z}{w_0}f(w_0)\right],$$

$$P(y\cos\widehat{Pz}-z\cos\widehat{Py})=G\mu\left[u\Sigma.m\frac{v-z}{w_0}f(w_0)-v\Sigma.m\frac{u-y}{w_0}f(w_0)\right].$$

Aehnliche drehende Kräfte erhält man von den andern Kräften P', P'', etc., und die drehende Gesammtwirkung M_R des ersten Systems auf das zweite wird darnach sich als das Resultirende der drei Momente M_Z, M_Y, M_X ergeben, für welche man hat

$$\left.\begin{aligned}M_Z&=G\left[\Sigma_t.\mu t\Sigma_x.m\frac{u-y}{w}f(w)-\Sigma_t.\mu u\Sigma_x.m\frac{t-x}{w}f(w)\right]\\M_Y&=G\left[\Sigma_t.\mu v\Sigma_x.m\frac{t-x}{w}f(w)-\Sigma_t.\mu t\Sigma_x.m\frac{v-z}{w}f(w)\right]\\M_X&=G\left[\Sigma_t.\mu u\Sigma_x.m\frac{v-z}{w}f(w)-\Sigma_t.\mu v\Sigma_x.m\frac{u-y}{w}f(w)\right]\end{aligned}\right\}.\quad(66.$$

Zwischen diesen drehenden Kräften M_X, M_Y, M_Z und den fördernden Kräften $\Sigma.P\cos\widehat{Px}$, $\Sigma.P\cos\widehat{Py}$, $\Sigma.P\cos\widehat{Pz}$ finden alle jene Beziehungen statt, die wir im vorhergehenden Kapitel kennen gelernt haben. Wird demnach von ihnen die Bedingungsgleichung (52) in §. 82 befriedigt, so läßt sich die Gesammtwirkung beider Systeme auf die zweier materiellen Punkte zurückführen, welche dieselbe Masse enthalten wie diese Systeme, deren Coordinaten beziehungsweise $\mathbf{X}_,$, $\mathbf{Y}_,$, $\mathbf{Z}_,$ und $\mathbf{T}_,$, $\mathbf{U}_,$, $\mathbf{V}_,$ sind, und deren Entfernung $\mathbf{W}_,$ demnach durch $\sqrt{(\mathbf{T}_,-\mathbf{X}_,)^2+(\mathbf{U}_,-\mathbf{Y}_,)^2+(\mathbf{V}_,-\mathbf{Z}_,)^2}$ ausgedrückt wird. Um in diesem Falle die bezeichneten Coordinaten jener beiden Punkte zu bestimmen, hat man zuerst die Gleichung:

$$GM_1M_2f(\mathbf{W}_,)=R=\sqrt{(\Sigma.P\cos\widehat{Px})^2+(\Sigma.P\cos\widehat{Py})^2+(\Sigma.P\cos\widehat{Pz})^2},$$

worin M_1 und M_2 die Massen Σm und $\Sigma\mu$ der beiden Systeme vorstellen, und durch welche der Werth von $\mathbf{W}_,$ gefunden wird. Ferner

hat man für die drei rechtwinkligen Componenten von R nun auch die Ausdrücke:

$$67.)\quad \begin{cases} \Sigma . P \cos\widehat{Px} = G M_1 M_2 \dfrac{\mathfrak{T}_{,} - \mathfrak{X}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) , \\ \Sigma . P \cos\widehat{Py} = G M_1 M_2 \dfrac{\mathfrak{U}_{,} - \mathfrak{Y}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) , \\ \Sigma . P \cos\widehat{Pz} = G M_1 M_2 \dfrac{\mathfrak{V}_{,} - \mathfrak{Z}_{,}}{\mathfrak{W}_{,}} f(\mathfrak{W}_{,}) , \end{cases}$$

und ihre Momente in Bezug auf die drei Coordinatenachsen werden nach gehöriger Reduction

$$68.)\quad \begin{cases} M_Z = G M_1 M_2 \dfrac{f(\mathfrak{W}_{,})}{\mathfrak{W}_{,}} (\mathfrak{U}_{,} \mathfrak{X}_{,} - \mathfrak{T}_{,} \mathfrak{Y}_{,}) , \\ M_Y = G M_1 M_2 \dfrac{f(\mathfrak{W}_{,})}{\mathfrak{W}_{,}} (\mathfrak{T}_{,} \mathfrak{Z}_{,} - \mathfrak{V}_{,} \mathfrak{X}_{,}) , \\ M_X = G M_1 M_2 \dfrac{f(\mathfrak{W}_{,})}{\mathfrak{W}_{,}} (\mathfrak{V}_{,} \mathfrak{Y}_{,} - \mathfrak{U}_{,} \mathfrak{Z}_{,}) . \end{cases}$$

Aus diesen sechs Gleichungen, von denen die drei letzten übrigens bekanntlich nur für zwei gelten, können in Verbindung mit dem bereits gefundenen Werthe von $\mathfrak{W}_{,}$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{W}_{,}^2 = (\mathfrak{T}_{,} - \mathfrak{X}_{,})^2 + (\mathfrak{U}_{,} - \mathfrak{Y}_{,})^2 + (\mathfrak{V}_{,} - \mathfrak{Z}_{,})^2$$

die Ausdrücke für diese sechs zu bestimmenden Coordinaten gezogen werden, und die Aufgabe wird vollständig gelöset sein.

Wenn dagegen die obengenannte Bedingungsgleichung nicht befriedigt wird, so läßt sich die gegenseitige Wirkung der beiden Systeme nicht mehr auf die zweier materiellen Punkte zurückführen, indem nicht nur ein gegenseitiges Bestreben zur Annäherung stattfindet, sondern auch eine drehende Wirkung von einem Systeme auf das andere ausgeübt wird.

II. Wirkung eines stetig zusammenhängenden Systems auf einen materiellen Punkt.

§. 99.

Die bisher entwickelten Ausdrücke sind nur auf Systeme von getrennten materiellen Punkten anwendbar, deren Masse und Lage gegeben ist; wir kommen nun zu den Fällen, in welchen die Wirkung von Systemen

stetig zusammenhängender materieller Punkte untersucht werden soll, und nur die äußere geometrische Begrenzung und das Gesetz, nach welchem sich die geometrische Dichte der einzelnen Punkte mit ihrer Lage ändert, gegeben ist, d. h. zu den Fällen, deren Untersuchung als eigentlicher Zweck dieses Kapitels im Eingang desselben bezeichnet wurde.

Betrachten wir zuerst wieder die Wechselwirkung zwischen einem stetigen System oder Körper von gegebener unveränderlicher Form und Dichte und einem einzelnen materiellen Punkte, dessen Lage in Bezug auf jenes System und dessen Masse bekannt ist. Die Aufgabe wird allgemein als gelöst zu betrachten sein, wenn die Gesetze gefunden sind, nach welchen sich die Intensitäten der gegenseitigen Wirkung oder ihrer rechtwinkligen Componenten mit den Grenzen des Systems ändern, indem sie dann, wie die Aufgaben über den Schwerpunkt, nur noch von Operationen der Integralrechnung abhängt, welche nur für besondere Fälle ausgeführt werden können.

Diese Gesetze sind offenbar nichts anders als die Ausdrücke für die geometrische Wirkung, welche von einem Punkte xyz des Systems auf den gegebenen materiellen Punkt ausgeübt wird, oder ihrer Componenten, und können darnach leicht hergestellt werden; um sie indessen streng abzuleiten, seien wieder a, b, c die Coordinaten des angegriffenen materiellen Punktes in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang wir in dem gegebenen Körper annehmen wollen, und μ die Masse desselben; ferner sei M die Masse eines Theiles von dem gegebenen Körper, welcher von drei zu den Coordinaten-Ebenen parallelen Ebenen in den Abständen: x, y und z von jenen begrenzt wird, und X, Y, Z die rechtwinkligen Componenten der zwischen diesem Theile und jenem Punkte stattfindenden anziehenden oder abstoßenden Wirkung, welche ebenso wie die Masse des so begrenzten Körpertheiles eine Function der drei veränderlichen Coordinaten x, y, z der Begrenzung sein wird.

Läßt man nun diese letztern sich gleichzeitig um die kleinen Größen Δx, Δy, Δz ändern, so wird auch der Rauminhalt und die Masse des eben betrachteten Körpertheiles nach §. 58 eine Aenderung erleiden, welche in Bezug auf jene Veränderlichen von der dritten Ordnung ist und eine Aenderung derselben Ordnung in der Gesammtwirkung des Körpers auf den gegebenen Punkt hervorruft. In Folge dessen werden dann auch die obengenannten Componenten derselben um die entsprechenden Kräfte $\Delta^3 X$, $\Delta^3 Y$, $\Delta^3 Z$ wachsen, deren Intensitäten auszudrücken sind. Dazu bezeichne ich die Coordinaten des Mittelpunktes der Anziehung, welche von dem Zuwachs $\Delta^3 M$ der Masse M ausgeübt wird, mit $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$

und setze zuerst voraus, daß der in Angriff genommene Punkt nicht selbst im System enthalten, sondern ganz von demselben abgesondert ist. In diesem Falle liegt, wie oben bewiesen wurde, jener Mittelpunkt in dem beliebig kleinen Raume $\Delta^3 V$, und es ist deßhalb $x_,$, $y_,$, $z_,$ beziehungsweise immer kleiner als $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ und größer als x, y, z. Sind also α, β, γ, ε Zahlen zwischen 0 und 1, und w, $w-\Delta w$, $w_,$ die Entfernungen der Punkte xyz, $(x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z)$ und $x_, y_, z_,$ von dem angegriffenen Punkte abc, so ist zuerst

$$x_, = x+\alpha\Delta x \quad , \quad y_, = y+\beta\Delta y \quad , \quad z_, = y+\gamma\Delta z \ ,$$

$$w = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2} \ ,$$

$$w-\Delta w = \sqrt{(a-x-\Delta x)^2+(b-y-\Delta y)^2+(c-z-\Delta z)^2},$$

$$w_, = \sqrt{(a-x-\alpha\Delta x)^2+(b-y-\beta\Delta y)^2+(c-z-\gamma\Delta z)^2} \ ,$$

und demnach

$$w_, < w \text{ und } > w-\Delta w \quad , \quad w_, = w-\varepsilon\Delta w \ .$$

Damit erhält man dann nach §. 96 für die neuen Kräfte $\Delta^3 X$, $\Delta^3 Y$, $\Delta^3 Z$ die Werthe:

$$\Delta^3 X = G\mu\Delta^3 M \frac{a-x-\alpha\Delta x}{w-\varepsilon\Delta w} f(w-\varepsilon\Delta w) \ ,$$

$$\Delta^3 Y = G\mu\Delta^3 M \frac{b-y-\beta\Delta y}{w-\varepsilon\Delta w} f(w-\varepsilon\Delta w) \ ,$$

$$\Delta^3 Z = G\mu\Delta^3 M \frac{c-z-\gamma\Delta z}{w-\varepsilon\Delta w} f(w-\varepsilon\Delta w) \ ,$$

und die Verhältnisse dieser Werthe zu dem Producte $\Delta x \Delta y \Delta z$ oder zu der Aenderung des Rauminhaltes, nämlich

$$\frac{\Delta^3 X}{\Delta x \Delta y \Delta z} \ , \quad \frac{\Delta^3 Y}{\Delta x \Delta y \Delta z} \ , \quad \frac{\Delta^3 Z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \ ,$$

geben durch ihre Anfangswerthe die Aenderungsgesetze der Kräfte X, Y, Z in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung der Grenzen x, y, z. Beachtet man nun, daß man nach §. 21 hat

$$\text{Anf:} \ \frac{\Delta^3 M}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{d^3 M}{dx\,dy\,dz} = q \ ,$$

wo q wie früher die geometrische Dichte des Körpers in dem Punkte xyz bezeichnet, und daß für $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=0$

auch Δw und die kleinern Glieder $\alpha\Delta x$, $\beta\Delta y$, $\gamma\Delta z$, $\varepsilon\Delta w$ Null werden, so findet man die Aenderungsgesetze:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^3X}{dx\,dy\,dz} &= G\mu q\frac{a-x}{w}f(w)\\ \frac{d^3Y}{dx\,dy\,dz} &= G\mu q\frac{b-y}{w}f(w)\\ \frac{d^3Z}{dx\,dy\,dz} &= G\mu q\frac{c-z}{w}f(w)\end{aligned}\right\},\qquad (69^a.$$

welche auch, wie leicht zu sehen ist, die Componenten der von dem Punkte xyz auf den gegebenen materiellen Punkt ausgeübten geometrischen Wirkung

$$\frac{d^3R}{dx\,dy\,dz} = G\mu q f(w)$$

vorstellen.

Daraus folgen die Werthe von X, Y, Z selbst als dreifache Integrale zwischen den entsprechenden Grenzen des gegebenen Körpers genommen unter der Form:

$$\left.\begin{aligned}X &= G\mu\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\frac{a-x}{w}f(w)\\ Y &= G\mu\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\frac{b-y}{w}f(w)\\ Z &= G\mu\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\frac{c-z}{w}f(w)\end{aligned}\right\},\qquad (69^b.$$

so daß demnach die Bestimmung der Gesammtwirkung auf den gegebenen Punkt von drei dreifachen Integralen abhängt.

Durch die Variation der Constanten a, b, c können indessen diese drei Integrale von einem einzigen durch Differenziren abgeleitet werden. Betrachtet man nämlich in dem Ausdrucke:

$$w^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

die Coordinaten a, b, c als Veränderliche, so hat man als Aenderungsgesetz von w in Bezug auf die Aenderung von a

$$\frac{\delta w}{\delta a} = \frac{a-x}{w},$$

und die erste der Gleichungen (69^b) nimmt damit die Form an:

$$X = G\mu \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q f(w) \frac{\partial w}{\partial a} ;$$

macht man dann

$$f(w) = \frac{\partial . F(w)}{\partial w} , \quad \Delta . F(w) = \int \partial w . f(w),$$

so wird

$$f(w) \frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial . F(w)}{\partial a} ;$$

man hat demnach

$$X = G\mu \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q \frac{\partial . F(w)}{\partial a} ,$$

und da nach der obigen Voraussetzung, daß der angegriffene Punkt ganz außerhalb des wirkenden Systems liegt, die Dichte q und die Grenzen der Veränderlichen x, y, z von a unabhängig sind, so hat man auch

$$X = G\mu \frac{\partial . \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q F(w)}{\partial a} = G\mu \frac{\partial U}{\partial a} ,$$

wenn zur Abkürzung

$$\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q F(w) = U$$

gesetzt wird. Dehnt man dieses Verfahren nun auch auf die beiden andern Componenten Y und Z aus, indem man beachtet, daß man hat

$$f(w) \frac{b-y}{w} = f(w) \frac{\partial w}{\partial b} = \frac{\partial . F(w)}{\partial b} , \quad f(w) \frac{c-z}{w} = f(w) \frac{\partial w}{\partial c} = \frac{\partial . F(w)}{\partial c} ,$$

und daß die Dichte q und die Grenzen von x, y, z auch von b und c unabhängig sind, so findet man die ähnlichen Ausdrücke:

$$Y = G\mu \frac{\partial . \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q F(w)}{\partial b} = G\mu \frac{\partial U}{\partial b} ,$$

$$Z = G\mu \frac{\partial . \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q F(w)}{\partial c} = G\mu \frac{\partial U}{\partial c} ,$$

und es kann demnach unter der oben gemachten Voraussetzung, daß der angegriffene Punkt außerhalb des wirkenden Systems liegt, daß also sowohl die Dichte q, als namentlich die Grenzen der Veränderlichen x, y, z von den Coordinaten a, b, c des angegriffenen Punktes unabhängig bleiben, jede besondere Aufgabe als gelöst betrachtet werden, wenn das Integral:

$$U = \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q F(w) \qquad (70.$$

für den gegebenen Körper dargestellt werden kann, indem man daraus die Werthe der Componenten X, Y, Z immer mittels der Gleichungen:

$$X = G\mu \frac{\partial U}{\partial a} \quad , \quad Y = G\mu \frac{\partial U}{\partial b} \quad , \quad Z = G\mu \frac{\partial U}{\partial c} \qquad (71.$$

als Aenderungsgesetze der Function U in Bezug auf die Aenderung der Coordinaten a, b, c ableiten wird.

Für unsern besondern Fall: $f(w) = \frac{1}{w^2}$ wird

$$\Delta . F(w) = \int dw . \frac{1}{w^2} = \Delta . - \frac{1}{w} ,$$

und wenn man nun den entsprechenden Werth von U mit V bezeichnet, wodurch man

$$V = -\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{q}{w} = -\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{q}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}} \qquad (72.$$

hat, so ergeben sich die Werthe:

$$X = G\mu \frac{\partial V}{\partial a} \quad , \quad Y = G\mu \frac{\partial V}{\partial b} \quad , \quad Z = G\mu \frac{\partial V}{\partial c} \qquad (73.$$

für die rechtwinkligen Componenten der Gesammtwirkung R.

Bisweilen wird die Berechnung der Componenten X, Y, Z einfacher, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den angegriffenen Punkt verlegt; man darf dann in den Gleichungen (69) nur $a = b = c = 0$ setzen und die Grenzen der Veränderlichen x, y, z dieser Annahme gemäß bestimmen. Darnach ergibt sich einfach

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und die Werthe für die Componenten X, Y, Z nehmen die Form an:

$$74.)\quad \begin{cases} X = -G\mu\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\frac{x}{w}f(w), \\ Y = -G\mu\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\frac{y}{w}f(w), \\ Z = -G\mu\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\frac{z}{w}f(w); \end{cases}$$

diese Componenten müssen aber nun einzeln berechnet und können nicht mehr aus einem einzigen Integral abgeleitet werden.

§. 100.

Die Ableitung der vorhergehenden Ausdrücke ist an die Bedingung geknüpft worden, daß sich die Grenzen des Körpers nicht bis zu dem angegriffenen Punkte erstrecken, wobei seine Ausdehnung in entgegengesetzter Richtung durchaus unbeschränkt ist. Es liegt aber auf der Hand, daß diese Bedingung und damit jede der übrigen, an welche die Ableitung der Werthe der Componenten X, Y, Z gebunden wurde, auch dann noch vollständig erfüllt wird, wenn der Körper den angegriffenen Punkt von mehreren oder von allen Seiten umgibt, ohne daß er jedoch mit diesem in Berührung kommt, also in dem Falle, wo der angegriffene Punkt irgend einen Ort des in einem gegebenen Körper vorhandenen hohlen Raumes einnimmt. Denn der betreffende Punkt wird immer außerhalb einer jeden Aenderung $\Delta^3 M$ liegen, welche die Masse des veränderlichen wirkenden Körpertheiles mit Berücksichtigung der gegebenen Begrenzung erhalten kann; es kann w niemals Null werden, und das Aenderungsgesetz der Function U wird innerhalb der Grenzen der Veränderlichen x, y, z immer bestimmte, endliche Werthe behalten. Endlich wird auch nichts gegen die Ableitung der Werthe von X, Y, Z aus dem der Function U mittels der Variation der Constanten a, b, c zu erinnern sein, da auch hier, wie bei einem ganz außerhalb des Systems liegenden Punkte die Grenzen der Veränderlichen x, y, z unabhängig bleiben von der Lage des angegriffenen Punktes, und daher durch die Integration zwischen den Grenzen des Körpers keine der Größen a, b, c neu eingeführt wird. Unsere vorhergehenden Gleichungen (70) und (71), beziehungsweise (72) und (73) dürfen demnach auch in dem vorliegenden Falle ohne Beschränkung angewendet werden.

Eine solche Beschränkung tritt aber nothwendig ein, wenn sich die Grenzen des wirkenden Systems bis zu dem angegriffenen Punkte erstrecken und dieser selbst dem System angehört. Untersuchen wir zuerst den Fall, wo sich der genannte Punkt in der Begrenzungsfläche des Systems befindet, wobei es gleichgültig sein wird, ob diese eine äußere, das System abschließende, oder eine innere, einen hohlen Raum begrenzende Fläche ist, so werden wir uns leicht überzeugen, daß auch hier die Bedingung, unter welcher die Gleichungen (69) abgeleitet wurden, noch befriedigt wird. Denn man kann sich, wie nahe man auch bei der Aenderung der Grenzen des wirkenden Körpertheiles dem angegriffenen Punkte gekommen sein mag, immer noch als Aenderung dritter Ordnung der Masse ein kleines Parallelepiped denken, welches sich nicht über den angegriffenen Punkt hinaus erstreckt, welches also immer seinen Anziehungs-Mittelpunkt einschließen wird. Ferner wird auch die Integration, insoferne sie nicht näherungsweise ausgeführt werden muß, immer richtige Ergebnisse liefern, wenn auch die Aenderungsgesetze der Werthe von X, Y, Z für den angegriffenen Punkt selbst, also an der einen Grenze der Integrale (69) oder (74) unendlich werden, da ein Zweifel über die Richtigkeit eines Integrals nur dann eintreten kann, wenn die Grenze, für welche das Aenderungsgesetz unendlich wird, überschritten worden ist. Der Anwendung dieser Gleichungen (69) steht also auch in unserm jetzigen Falle kein Bedenken entgegen.

Anders verhält es sich dagegen mit der Ableitung der Componenten X, Y, Z aus der Function U, sobald bei der Herstellung dieser letztern schon auf die besondere Lage des angegriffenen Punktes Rücksicht genommen, dieselbe also unter der Voraussetzung integrirt und reduzirt wird, daß die Coordinaten a, b, c des angegriffenen Punktes Grenzen der Veränderlichen x, y, z sind; denn es werden dadurch offenbar in jene Function von den Constanten a, b, c mehr eingeführt, als ohne diese Voraussetzung vorhanden wären, und die Variation von U in Bezug auf diese Constanten wird dann im Allgemeinen für X, Y, Z unrichtige Werthe liefern. Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß in besondern Fällen auch diese aus der Function U abgeleiteten Werthe mit denen der Gleichungen (69) übereinstimmen, also richtig sein können. Im Allgemeinen aber wird die Ableitung der Componenten X, Y, Z aus der Function U nur dann richtige Werthe geben, wenn die Coordinaten a, b, c des angegriffenen Punktes nicht schon in der Function U als Grenzen von x, y, z eingeführt werden, sondern wenn erst nach der Variation derselben in den Werthen der genannten Componenten ausgedrückt

wird, daß die Umhüllungsfläche des wirkenden Körpers durch den angegriffenen Punkt geht.

Liegt endlich der angegriffene Punkt im Innern der wirkenden Masse selbst, so kann man die Bestimmung der anziehenden Wirkung der letztern auf die vorhergehenden Fälle zurückführen, wenn man den gegebenen Körper durch eine beliebige, durch den angegriffenen Punkt gelegte Fläche, durch eine Ebene oder Kugelfläche, in zwei Theile zerlegt, so daß dieser Punkt auf der Begrenzungsfläche eines jeden dieser Theile enthalten ist, und nach dem Vorhergehenden die von jedem dieser Theile ausgeübte Wirkung bestimmt; die Resultirende dieser beiden Wirkungen wird die gesuchte Gesammtwirkung sein. Es läßt sich aber leicht einsehen, daß diese Gesammtwirkung auch unmittelbar durch die Gleichungen (69) erhalten werden kann, wenn man die Integrale zwischen den Grenzen des wirkenden Körpers nimmt; denn es ist in §. 42 der Einleitung gezeigt worden, daß die Integration zwischen Grenzen der unabhängigen Veränderlichen, welche zu beiden Seiten eines Werthes derselben liegen, für welchen das betreffende Aenderungsgesetz Null oder unendlich wird, unrichtige oder wenigstens mit Vorsicht zu gebrauchende Ergebnissen liefern kann, wenn mit dem Werthe des Integrals ein Begriff verbunden wird, der nach unserer Vorstellung keines Gegensatzes fähig ist, wie die Begriffe: Länge, Fläche, Rauminhalt, Gewicht, u. s. f.; daß aber die Ergebnisse der Integration immer richtig sein müssen, welchen Werth auch das Aenderungsgesetz zwischen den gegebenen Grenzen erhalten mag, wenn die durch das Integral ausgedrückte Größe positive und negative Werthe annehmen kann. In unserm gegenwärtigen Falle drückt das Integral eine anziehende Wirkung aus, und diese ist unserer Vorstellung gemäß allerdings eines Gegensatzes fähig, und es stimmt in der That mit der Natur der Sache überein, daß die Gesammtwirkung zweier Körpertheile, welche zu beiden Seiten des angezogenen Punktes liegen, der algebraischen Summe der Wirkungen, die von diesen Theilen einzeln ausgeübt werden, gleich ist, woraus sofort der Schluß folgt, daß diese Gesammtwirkung in jedem Falle durch die Integration zwischen den Grenzen der wirkenden Masse richtig ausgedrückt wird.

Die Ableitung der Werthe für die Componenten X, Y, Z aus der Function U wird aber hier dieselbe Vorsicht erfordern, wie in dem vorher betrachteten Falle; denn man kann sich hier immer um den angegriffenen Punkt herum einen Körpertheil abgegrenzt denken, dessen anziehende Wirkung Null ist, indem sie sich von zwei entgegengesetzten Seiten her immer aufhebt. Die Größe und Grenze dieses wirkungslosen

Körpertheiles werden aber nothwendig von der Lage jenes Punktes abhängen; es wird sich ferner die mit Bezug auf die besondere Lage integrirte und reduzirte Function U nur auf den noch wirksamen Körpertheil beziehen, dessen Grenzen ebenfalls von den Coordinaten a, b, c abhängen, und die Ableitung der Werthe von X, Y, Z durch Variation dieser Constanten in dem reduzirten Werthe von U wird im Allgemeinen unrichtige Ergebnisse liefern, wobei wieder nicht ausgeschlossen ist, daß dieselben in besondern Fällen auch richtig sein können.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ziehen wir also den Schluß, daß die Gleichungen (69) und (74) für alle Fälle und für jede Lage des angegriffenen Punktes in Bezug auf das wirkende System anwendbar sind, die Gleichungen (70) und (71) aber nur für den Fall, wo der angegriffene Punkt außerhalb des Systems liegt, ihm nicht selbst angehört, oder überhaupt, wenn die Integration ohne besondere Reductionen für die Lage dieses Punktes ausgeführt und erst in den abgeleiteten Werthen von X, Y, Z die weitere Vereinfachung vorgenommen wird.

§. 101.

In manchen Fällen kann die Integration der Werthe von U, X, Y, Z einfacher werden, wenn die Lage eines Punktes durch seine Polarcoordinaten ausgedrückt wird; man hat dann, wenn $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ durch e ersetzt wird, für den angegriffenen Punkt nach §. 13 der Einleitung die Beziehungen:

$$a = e \sin\gamma \cos\varepsilon \quad , \quad b = e \sin\gamma \sin\varepsilon \quad , \quad c = e \cos\gamma \qquad (a.$$

und für einen Punkt des Systems, für welchen $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ ist, (§. 11 der Einl.)

$$x = r \sin\vartheta \cos\omega \quad , \quad y = r \sin\vartheta \sin\omega \quad , \quad z = r \cos\vartheta \ ,$$

also auch

$$w = \sqrt{e^2 + r^2 - 2er\left[\cos\gamma \cos\vartheta + \sin\gamma \sin\vartheta \cos(\varepsilon - \omega)\right]} \ .$$

Ferner hat man nach §. 75

$$\frac{d^3M}{dr\, d\vartheta\, d\omega} = q r^2 \sin\vartheta \ ,$$

und damit ergibt sich nun

75ᵃ.) $$U = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \,.\, \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta \,.\, \int_{r_0}^{r} dr \,.\, q r^2 \sin\vartheta F(w) \,,$$

und für den besondern Fall: $f(w) = \frac{1}{w^2}$

75ᵇ.) $$V = -\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \,.\, \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta \,.\, \int_{r_0}^{r} dr \,.\, \frac{q r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{e^2 + r^2 - 2er[\cos\gamma\cos\vartheta + \sin\gamma\sin\vartheta\cos(\varepsilon - \omega)]}} \,.$$

Um sodann daraus die Werthe von X, Y, Z abzuleiten, wird man beachten, daß U oder V als Functionen von a, b, c, und diese Größen selbst als Functionen von e, γ und ε zu betrachten sind, wonach man zuerst die Aenderungsgesetze erhält:

b.) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial e} &= \frac{\partial U}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial e} + \frac{\partial U}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial e} + \frac{\partial U}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial e} \,, \\ \frac{\partial U}{\partial \gamma} &= \frac{\partial U}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial \gamma} + \frac{\partial U}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial \gamma} + \frac{\partial U}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial \gamma} \,, \\ \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial \varepsilon} \,. \end{aligned}\right.$$

Ferner ergeben sich aus den Gleichungen (a) für die Aenderungsgesetze: $\frac{\partial a}{\partial e}$, $\frac{\partial a}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial a}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial b}{\partial e}$ u. s. f. die Werthe:

$$\frac{\partial a}{\partial e} = \frac{a}{e} = \sin\gamma\cos\varepsilon \,, \quad \frac{\partial b}{\partial e} = \frac{b}{e} = \sin\gamma\sin\varepsilon \,, \quad \frac{\partial c}{\partial e} = \frac{c}{e} = \cos\gamma,$$

$$\frac{\partial a}{\partial \gamma} = e\cos\gamma\cos\varepsilon \,, \quad \frac{\partial b}{\partial \gamma} = e\cos\gamma\sin\varepsilon \,, \quad \frac{\partial c}{\partial \gamma} = -e\sin\gamma,$$

$$\frac{\partial a}{\partial \varepsilon} = -e\sin\gamma\sin\varepsilon \,, \quad \frac{\partial b}{\partial \varepsilon} = e\cos\gamma\cos\varepsilon \,, \quad \frac{\partial c}{\partial \varepsilon} = 0 \,,$$

und wenn diese Ausdrücke in die Gleichungen (b) eingeführt und daraus durch Elimination die Werthe von $\frac{\partial U}{\partial a}$, $\frac{\partial U}{\partial b}$, $\frac{\partial U}{\partial c}$ gezogen werden, so findet man

76.) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a} &= \frac{\partial U}{\partial e}\sin\gamma\cos\varepsilon + \frac{\partial U}{\partial \gamma}\frac{\cos\gamma\cos\varepsilon}{e} - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\frac{\sin\varepsilon}{e\sin\gamma} \,, \\ \frac{\partial U}{\partial b} &= \frac{\partial U}{\partial e}\sin\gamma\sin\varepsilon + \frac{\partial U}{\partial \gamma}\frac{\cos\gamma\sin\varepsilon}{e} - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\frac{\cos\varepsilon}{e\sin\gamma} \,, \\ \frac{\partial U}{\partial c} &= \frac{\partial U}{\partial e}\cos\gamma - \frac{\partial U}{\partial \gamma}\frac{\sin\gamma}{e} \,, \end{aligned}\right.$$

und diese Werthe dürfen nur noch mit $G\mu$ multiplicirt werden, um jene von X, Y, Z zu erhalten.

Die erste der Gleichungen (b) kann aber auch unter die Form:

$$\frac{\delta U}{\delta e} = \frac{\delta U}{\delta a}\frac{a}{e} + \frac{\delta U}{\delta b}\frac{b}{e} + \frac{\delta U}{\delta c}\frac{c}{e}$$

gebracht werden und gibt

$$G\mu\frac{\delta U}{\delta e} = X\frac{a}{e} + Y\frac{b}{e} + Z\frac{c}{e}.$$

Vergleicht man dann diesen Ausdruck mit der Gleichung (12) in §. 12 des ersten Buches, indem man beachtet, daß $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{e}$ die Cosinus der Winkel ausdrücken, welche der zum Punkte abc gezogene Fahrstrahl mit den drei rechtwinkligen Achsen oder mit den Richtungen der drei Componenten X, Y, Z bildet, so wird man einsehen, daß das Aenderungsgesetz: $G\mu\frac{\delta U}{\delta e}$ die nach jenem Fahrstrahl gerichtete Seitenkraft der Gesammtwirkung R vorstellt.

Auf gleiche Weise findet man aus der zweiten der Gleichungen (b), daß $G\mu\,\frac{\delta U}{e\delta\gamma}$ die zu der vorhergehenden senkrechte, in der Ebene des Winkels γ liegende Componente vorstellt, und die dritte jener Gleichungen zeigt, daß die dritte, zu den beiden vorhergehenden rechtwinklige Seitenkraft, welche zur Ebene der xy parallel ist, durch $G\mu\frac{\delta U}{e\sin\gamma\,\delta\varepsilon}$ ausgedrückt wird. Man kann also statt der frühern Seitenkräfte X, Y, Z die zuletzt erhaltenen:

$$\mathfrak{A} = G\mu\frac{\delta U}{\delta e}\ ,\quad \mathfrak{C} = G\mu\frac{\delta U}{e\delta\gamma}\ ,\quad \mathfrak{S} = G\mu\frac{\delta U}{e\sin\gamma\,\delta\varepsilon} \quad (77.$$

aus den Functionen U oder V ableiten, wenn sie durch Polarcoordinaten ausgedrückt sind, und mittels ihrer die Resultirende R wie gewöhnlich bestimmen.

Für den Fall, daß der angegriffene Punkt selbst als Anfangspunkt der Polarcoordinaten genommen werden soll, wird einfach

$$w = r,$$

also die geometrische Wirkung für einen Punkt, dessen Coordinaten ω, ϑ, r sind,

$$\frac{d^3R}{d\omega\, d\vartheta\, dr} = G\mu q r^2 \sin\vartheta\, f(r) \; ;$$

die zu den Achsen der x, y, z parallelen Componenten dieser Wirkung sind daher

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^3X}{d\omega\, d\vartheta\, dr} &= G\mu q r^2 \sin^2\vartheta \cos\omega\, f(r) \; , \\ \frac{d^3Y}{d\omega\, d\vartheta\, dr} &= G\mu q r^2 \sin^2\vartheta \sin\omega\, f(r) \; , \\ \frac{d^3Z}{d\omega\, d\vartheta\, dr} &= G\mu q r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, f(r) \; . \end{aligned}\right.$$

Die Ausdrücke für die entsprechenden Componenten der Gesammtwirkung werden demnach

$$78^a.)\quad \left\{\begin{aligned} X &= G\mu \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . r^2 f(r) \sin^2\vartheta \cos\omega \; , \\ Y &= G\mu \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . r^2 f(r) \sin^2\vartheta \sin\omega \; , \\ Z &= G\mu \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . r^2 f(r) \sin\vartheta \cos\vartheta \; . \end{aligned}\right.$$

Für den in der Natur stattfindenden Fall ist aber $f(r) = \frac{1}{r^2}$; für diesen hat man also einfacher

$$78^b.)\quad \left\{\begin{aligned} X &= G\mu \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . \sin^2\vartheta \cos\omega \; , \\ Y &= G\mu \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . \sin^2\vartheta \sin\omega \; , \\ Z &= G\mu \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . \sin\vartheta \cos\vartheta \; , \end{aligned}\right.$$

und diese Ausdrücke werden in solchen Fällen Anwendung finden, wo sich die Grenzen von r einfach in Function von ϑ und ω ausdrücken lassen.

§. 102.

Um das Vorhergehende durch einige Beispiele zu beleuchten und wie bei dem Schwerpunkte mit dem Einfachsten anzufangen, sei zuerst die Wirkung einer materiellen geraden Linie auf einen gegebenen materiellen Punkt zu untersuchen, und zwar unter der Voraussetzung des in der Natur stattfindenden Falles, daß die gegenseitige Anziehung zweier Atome dem Quadrate ihrer Entfernung verkehrt proportional ist, daß also

$$f(w) = \frac{1}{w^2}.$$

Nehmen wir diese Gerade als Achse der x an, so hat man

$$V = -\int_0^l dx \cdot \frac{q}{w},$$

wenn q die geometrische Dichte, l die Länge der gegebenen Geraden bezeichnet, und diese ihren einen Endpunkt im Anfang der Coordinaten hat. Ist dann q constant, und wird die Ebene der xy durch den angegriffenen Punkt gelegt, dessen Lage in dieser Ebene durch die Coordinaten a und b bestimmt sei, so wird

$$w = \sqrt{(a-x)^2+b^2} = \sqrt{b^2+x'^2}$$

und demnach

$$\Delta V = q\int dx' \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+x'^2}} = \frac{1}{2} q \Delta \cdot \text{logn}\left(x'+\sqrt{b^2+x'^2}\right)^2,$$

indem man für $\int dz \cdot \frac{1}{z}$ das allgemeinere, auch für negative Werthe von z gültige Integral $\frac{1}{2}\Delta \cdot \text{logn}\, z^2$ nimmt. Zwischen den entsprechenden Grenzen $x' = a - l$ für $x = l$, $x' = a$ für $x = 0$ hat man daher

$$V = \frac{1}{2} q \,\text{logn}\left(\frac{a-l+\sqrt{b^2+(a-l)^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$$

und

$$X = G\mu \frac{\partial V}{\partial a} = G\mu q\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+(a-l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

was sich indessen ebenso leicht direct aus dem Integral:

$$X = G\mu q \int_0^l dx . \frac{a-x}{\sqrt{[(a-x)^2+b^2]^3}}$$

ergeben hätte. Ferner findet man

$$Y = G\mu \frac{\delta V}{\delta b} = G\mu q b \left(\frac{1}{[a-l+\sqrt{b^2+(a-l)^2}]\sqrt{b^2+(a-l)^2}} - \frac{1}{(a+\sqrt{a^2+b^2})\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Für $a = \frac{1}{2} l$, also wenn der angegriffene Punkt von beiden Enden der Geraden gleich weit entfernt ist, wird

$$X = 0,$$

$$Y = R = \frac{G\mu q b}{\sqrt{\frac{1}{4}l^2+b^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}l^2+b^2} - \frac{1}{2}l} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}l^2+b^2}+\frac{1}{2}l} \right)$$

$$= G\mu q l . \frac{1}{\sqrt{b^2(\frac{1}{4}l^2+b^2)}}.$$

Die Wirkung ist demnach dieselbe, als wenn die ganze Masse ql der Linie in der Entfernung $W_{,} = \sqrt[4]{b^2(\frac{1}{4}l^2+b^2)}$ von jenem Punkte vereinigt wäre. Wenn also AB, Fig. 76, die gegebene Linie vorstellt, C ihre Mitte und M der angegriffene Punkt ist, so hat man $MC = b$, $AM = \sqrt{\frac{1}{4}l^2+b^2}$, und folglich ist $W_{,} = OM$ die mittlere geometrische Proportionale zwischen AM und CM, wonach die Construction keiner weitern Erklärung bedürfen wird.

Liegt der angegriffene Punkt in der Richtung der wirkenden Geraden, so hat man $b = 0$ und $Y = 0$; die allgemeinen Werthe von V und X dagegen nehmen die Form an:

$$V = \frac{1}{2} q \,\mathrm{logn}\left(\frac{a-l+\sqrt{(a-l)^2}}{2a}\right)^2, \quad X = G\mu q \left(\frac{1}{\sqrt{(a-l)^2}} - \frac{1}{a}\right),$$

und man findet für den Fall, wo der angegriffene Punkt in der Verlängerung jener Geraden liegt, also $a = l + c$ gesetzt werden kann, die Werthe:

$$V = q \,\mathrm{logn}\frac{c}{l+c}, \quad X = G\mu q \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{l+c}\right) = G\mu \frac{\delta V}{\delta a}$$

$$= G\mu q l \frac{1}{c(l+c)},$$

aus deren letztem sogleich

$$w_{,} = \sqrt{c(1+c)}$$

folgt, so daß in diesem Falle der Anziehungsmittelpunkt O, Fig. 77, von M um die mittlere geometrische Proportionale zwischen AM oder $1+c$ und $BM = c$ entfernt liegt.

Hat man dagegen $a = 1 - c$, Fig. 78, liegt also der angegriffene Punkt auf der wirkenden Geraden selbst, so wird

$$V = \frac{1}{2} q \operatorname{logn} \left(\frac{-c + \sqrt{(-c)^2}}{2(1-c)} \right)^2 = q \operatorname{logn} 0 ,$$

$$X = G\mu q \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1-c} \right) = G\mu q (1 - 2c) \frac{1}{(1-c)c}, \,^{*)}$$

und der Werth von X zeigt, daß die Wirkung in diesem Falle dieselbe ist, als wenn blos das Stück $AD = AB - 2BC$ vorhanden wäre, wie dieses von selbst als einzig richtiges Ergebniß einleuchtet. Mit diesem Werthe von X würde aber der aus V abgeleitete $G\mu \frac{\partial V}{\partial a}$ nicht

*) Aus den obigen Ergebnissen ergibt sich, daß man für den Fall, wo $b = 0$ ist, der angegriffene Punkt also in der Richtung der wirkenden Geraden liegt, nicht geradezu

$$X = G\mu q \int_0^1 dx \cdot \frac{1}{(a-x)^2} = G\mu q \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} \right)$$

nehmen darf, wenn dieser Ausdruck allen Lagen jenes Punktes entsprechen soll; in der That sieht man, daß das allgemeine Aenderungsgesetz von X, nämlich $\frac{dX}{dx} = \frac{a-x}{w} \cdot \frac{1}{w^2}$ das Zeichen ändert, wenn $x = a$ wird, was aber nicht mehr der Fall ist, wenn man in der obigen Voraussetzung einfach $\frac{a-x}{w} = 1$ setzt. Man müßte vielmehr dem Werthe von X die Form geben:

$$\Delta X = - G\mu q \int dw \cdot \frac{w}{\sqrt{w^4}} = - \frac{1}{2} G\mu q \int du \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2}} ,$$

worin $u = w^2$ ist, und woraus sich zwischen den Grenzen 1 und 0 für x die anziehende Wirkung X wie oben ergibt, nämlich

$$X = G\mu q \left(\frac{1}{\sqrt{(a-1)^2}} - \frac{1}{a} \right) .$$

mehr übereinstimmen, wie es gemäß der oben gegebenen Erläuterung nicht wohl anders sein kann.

Wird endlich $a = 1$, $c = 0$, so ergibt sich $X = \infty$, also $w_{,} = 0$, d. h. der Mittelpunkt der Anziehung fällt mit dem Endpunkt der gegebenen Geraden, in dem sich auch der angegriffene Punkt befindet, zusammen.

§. 103.

Sei ferner eine materielle Kreislinie gegeben, und deren Wirkung auf einen beliebig gelegenen Punkt zu suchen.

Die Ebene des Kreises werde als die der xy, sein Mittelpunkt O, Fig. 79, als Anfangspunkt der Coordinaten angenommen, und die Achse der x durch den Fußpunkt P der von dem angegriffenen Punkte M auf die Ebene des Kreises gefällten Senkrechten MP gelegt, so daß die Lage dieses Punktes durch die Coordinaten $OP = a$ und $MP = c$ bestimmt ist. Sind dann $ON = r$ und Winkel $NOP = \omega$ die Polarcoordinaten eines beliebigen Punktes N der Kreislinie, $NM = w$ die Entfernung desselben von dem Punkte M, so hat man zuerst

$$w^2 = a^2 + c^2 + r^2 - 2r\sqrt{a^2+c^2}\cos\widehat{MON},$$

und da in dem rechtwinkligen spärischen Dreiecke NAQ

$$\cos\widehat{NQ} = \cos\widehat{MON} = \cos\widehat{NA}\cos\widehat{AQ} = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\cos\omega,$$

so wird

$$w^2 = a^2 + r^2 + c^2 - 2ar\cos\omega.$$

Ferner hat man allgemein

$$\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{r\,d\omega} = q, \quad V = -\int_0^{2\pi} d\omega \, . \, \frac{rq}{w},$$

und demnach für eine constante Dichte

$$V = -qr\int_0^{2\pi} d\omega \, . \, \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2+c^2-2ar\cos\omega}}.$$

Setzt man nun

$$a^2 + r^2 + c^2 = m^2 + n^2,$$
$$2ar = 2mn$$

so zieht man daraus die Werthe:

$$m + n = \sqrt{(a+r)^2 + c^2}\ ;$$
$$m - n = \sqrt{(a-r)^2 + c^2}\ ,$$

durch welche auch m und n bekannt sind, und der Ausdruck für V nimmt die Form an:

$$V = -\, qr \int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\omega}}\ .$$

Ich mache nun ferner

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$$

und leite daraus ab

$$\frac{d\omega}{du} = \sqrt{\frac{m-n}{m+n}}\ \frac{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}u}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega}\ ;$$

mit dem vorstehenden Werthe und der Beziehung:

$$\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}u}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}u} = \cos u$$

folgt dann

$$\frac{d\omega}{du} = \sqrt{m^2 - n^2}\ \frac{1}{m + n\cos u}\ .$$

Auf gleiche Weise ergibt sich nach und nach

$$m^2 + n^2 - 2mn\cos\omega = m^2 + n^2 - 2ma\,\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\omega}$$
$$= (m^2 - n^2)\,\frac{m - n\cos u}{m + n\cos u}\ ,$$

und mit diesen Substitutionen wird nun

$$V = -\,qr\int_0^{2\pi} du\,.\,\frac{1}{\sqrt{m^2 - n^2\cos^2 u}} = -\,\frac{qr}{m}\int_0^{2\pi} du\,.\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2}\cos^2 u}}\ ,$$

wenn man beachtet, daß 2π und 0 auch die Grenzen von u sind. Zuletzt wird man sich aus dem Vorhergehenden leicht überzeugen, daß im Allgemeinen m immer größer ist als n, daß man also die Wurzelgröße im Nenner des vorstehenden Integrals in eine convergirende Reihe nach den aufsteigenden Potenzen von $\frac{n^2}{m^2}\cos^2 u$ entwickeln kann; man findet so

$$\left(1-\frac{n^2}{m^2}\cos^2 u\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\frac{n^2}{m^2}\cos^2 u+\frac{1.3}{2.4}\frac{n^4}{m^4}\cos^4 u+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{n^6}{m^6}\cos^6 u+\text{etc.};$$

das allgemeine Glied des Werthes von V hat daher die Form:

$$-\frac{qr}{m}\int_0^{2\pi} du \,.\, \frac{1.3.5\ldots\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots\ldots\;2\nu}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\nu}\cos^{2\nu} u$$

und giebt durch Ausführung der Integration ein Glied von der Form:

$$-\frac{qr}{m}\,\frac{1.3.5\ldots\ldots 2\nu-1}{2.4.6\ldots\ldots\;2\nu}\left(\frac{n}{m}\right)^{2\nu}.\frac{2\nu-1}{2\nu}.\frac{2\nu-3}{2\nu-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}.\frac{1}{2}2\pi$$

oder

$$-2\pi\frac{qr}{m}\left[\frac{1.3.5\ldots\ldots(2\nu-1)}{2.4.6\ldots\ldots\;2\nu\;.}\right]^2\left(\frac{n}{m}\right)^{2\nu}.$$

Man hat demnach

$$V=-2\pi\frac{qr}{m}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{n}{m}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{n}{m}\right)^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{n}{m}\right)^6+\text{etc.}\right],$$

und dieser Werth gilt für jede Lage des angegriffenen Punktes. Aus ihm ergeben sich dann die beiden Componenten X und Z (Y ist offenbar Null) als Aenderungsgesetze in Bezug auf a und c. Dazu hat man bekanntlich

$$\frac{\partial V}{\partial a}=\frac{\partial V}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial a}\quad,\qquad\frac{\partial V}{\partial c}=\frac{\partial V}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial c}+\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial c}$$

und erhält demnach einmal

$$X=G\mu\frac{\partial V}{\partial a}=2\pi G\mu qr\left[\frac{\partial m}{\partial a}\cdot\frac{1}{m^2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{n}{m}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{n}{m}\right)^4+\text{etc.}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{m^3}\left(m\frac{\partial n}{\partial a}-n\frac{\partial m}{\partial a}\right)\left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{n}{m}+4\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{n}{m}\right)^3+\text{etc.}\right\}\right]$$

und dann für Z einen ganz ähnlichen Ausdruck, in welchem nur ∂c für ∂a steht. Die obigen Werthe von $m+n$ und $m-n$ geben aber

$$\frac{\partial m}{\partial a}=\frac{1}{2}\frac{a+r}{m+n}+\frac{1}{2}\frac{a-r}{m-n}\quad\frac{\partial n}{\partial a}=\frac{1}{2}\frac{a+r}{m+n}-\frac{1}{2}\frac{a-r}{m-n},$$

$$\frac{\partial m}{\partial c}=\frac{1}{2}c\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}\right)\quad\frac{\partial n}{\partial c}=\frac{1}{2}c\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}\right),$$

und damit folgt weiter

$$\frac{\partial m}{\partial a}=\frac{ma-nr}{m^2-n^2}, \quad m\frac{\partial n}{\partial a}-n\frac{\partial m}{\partial a}=-\frac{2mna-(m^2+n^2)r}{m^2-n^2},$$

$$\frac{\partial m}{\partial c}=\frac{mc}{m^2-n^2}, \quad m\frac{\partial n}{\partial c}-n\frac{\partial m}{\partial c}=-\frac{2mnc}{m^2-n^2},$$

wodurch dann die Werthe von X und Z die Formen annehmen:

$$X=\frac{2\pi G\mu qr}{m^2(m^2-n^2)}\Big[(ma-nr)\Big\{1+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big(\frac{n}{m}\Big)^2+\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\Big(\frac{n}{m}\Big)^4+\text{etc.}\Big\}$$

$$+\frac{2mna-(m^2+n^2)r}{m}\Big\{2\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\frac{n}{m}+4\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\Big(\frac{n}{m}\Big)^3+\text{etc.}\Big\}\Big];$$

$$Z=\frac{2\pi G\mu qrc}{m(m^2-n^2)}\Big[1+5\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big(\frac{n}{m}\Big)^2+9\Big(\frac{1.3}{2.4}\Big)^2\Big(\frac{n}{m}\Big)^4+13\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\Big)^2\Big(\frac{n}{m}\Big)^6+\text{etc.}\Big].$$

In einigen besondern Fällen lassen sich diese Werthe auf einfachere Ausdrücke zurückführen.

Sei zuerst $a=0$, so daß der angegriffene Punkt senkrecht über dem Mittelpunkte des Kreises liegt; es wird dann $m=\sqrt{r^2+c^2}$, $n=0$, und man hat einmal, wie sich von selbst versteht, $X=0$ und dann

$$Z=\frac{2\pi G\mu qrc}{m^3}=\frac{2\pi G\mu qrc}{\sqrt{(r^2+c^2)^3}}.$$

Beachtet man dabei, daß $2\pi qr$ die Masse der anziehenden Kreislinie ist, so findet man die Gleichung

$$w_{,}^2=(r^2+c^2)\sqrt{\frac{r^2+c^2}{c^2}}$$

zur Bestimmung der Entfernung des Anziehungsmittelpunktes von dem angegriffenen Punkte. Für $c=r$ gibt dieselbe $w_{,}=r\sqrt[4]{8}=1{,}681\ldots r$ und allgemein, für $c=kr$, $w_{,}=r\sqrt[4]{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$.

Nehmen wir dagegen an, daß der angegriffene Punkt in der Ebene des Kreises selbst liegt oder daß $c=0$ ist, so wird auch, wie es sein muß, $Z=0$, und für den Werth von X können wir nun zwei Fälle unterscheiden, nämlich ob der angegriffene Punkt außerhalb des Kreises liegt, also $a>r$ ist, oder ob er sich innerhalb desselben befindet, also $a<r$ ist. Im ersten Falle, wenn $a>r$ ist, haben wir

$$m=\frac{1}{2}(a+r)+\frac{1}{2}(a-r)=a\ , \qquad ma-nr=m^2-n^2\ ,$$

$$n=\frac{1}{2}(a+r)-\frac{1}{2}(a-r)=r, \quad \frac{2mna-(m^2+n^2)r}{m}\frac{n}{m}=(m^2-n^2)\frac{r}{a}$$

und demnach auch nach einigen weitern Reductionen

$$X=\frac{2\pi G\mu qr}{a^2}\left[1+3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2+5\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^4+7\left(\frac{1.3\,5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^6+\text{etc.}\right].$$

Im zweiten Falle, wenn der Punkt von der Kreislinie umschlossen ist, und $a < r$, haben wir

$$m=\frac{1}{2}(a+r)+\frac{1}{2}(r-a)=r\ , \qquad ma-nr=0\ ,$$

$$n=\frac{1}{2}(a+r)-\frac{1}{2}(r-a)=a\ , \quad \frac{2mna-(m^2+n^2)r}{m}=n^2-m^2\ ;$$

folglich wird nun

$$X=-\frac{2\pi G\mu qr}{r^2}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a}{r}+4\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^3+6\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^5+\text{etc.}\right]$$

$$=-\frac{\pi G\mu qa}{r^2}\left[1+2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^2+3\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^4+\text{etc.}\right]\ .$$

Im ersten Falle wird daher

$$w_{,}=\frac{a}{\left[1+3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2+5\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^4+\text{etc.}\right]^{\frac{1}{2}}}\ ,$$

und man schließt daraus, daß in diesem Falle der Anziehungsmittelpunkt immer zwischen dem Mittelpunkte des Kreises und demjenigen Halbkreise liegt, welcher dem angegriffenen Punkte zugewendet ist; denn es ist jedenfalls $w_{,}$ kleiner als a und größer als $a-r$. Im zweiten Falle ist X negativ, der Anziehungsmittelpunkt liegt folglich auf der entgegengesetzten Seite des angegriffenen Punktes und zwar wie leicht zu sehen außerhalb des Kreises; denn man hat für $a=0$ auch $X=0$ und $w_{,}=-\infty$; sowie sich dann der angegriffene Punkt von dem Mittelpunkt des Kreises entfernt, oder a wächst, wird

$$w_{,}=-\frac{r}{\left[\frac{a}{2r}\left\{1+2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^2+3\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2\left(\frac{a}{r}\right)^4+\text{etc.}\right\}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

dem absoluten Werthe nach kleiner und erst, wie wir sogleich sehen werden, gleich Null, wenn $a = r$ geworden ist.

Für diesen besondern Fall, wo der angegriffene Punkt ein Punkt der Kreislinie selbst ist, hat man $\frac{a}{r} = \frac{r}{a} = 1$, und die vorhergehenden Werthe von X convergiren nicht mehr, sondern entsprechen einem unbegrenzten Zahlenwerthe. Man überzeugt sich auch leicht durch den allgemeinen unmittelbaren Werth von X, nämlich

$$X = G\mu q r \int_0^{2\pi} d\omega \, . \frac{a - r\cos\omega}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega)^3}} ,$$

daß dieser für $a = r$, und wenn $\omega = 2\omega'$ gesetzt wird, die Form:

$$X = G\mu q \int_0^{\pi} d\omega' . \frac{1}{\sin\omega'} = G\mu q \overset{\pi}{\underset{0}{\Delta}} . \operatorname{logn} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega'$$

annimmt, und X demnach in diesem Falle unendlich, **W**, also Null wird.

§. 104.

Um die Wirkung einer materiellen Kreisfläche auf einen materiellen Punkt zu berechnen, hat man für eine gleiche Lage des Coordinaten-Systems, wie im vorhergehenden Falle, und mit gleicher Bezeichnung der Coordinaten des angegriffenen Punktes die Beziehungen:

$$\frac{d^2M}{dr\,d\omega} = rq \quad , \quad w^2 = a^2 + r^2 + c^2 - 2ar\cos\omega ,$$

in welchen nun r veränderlich ist, und damit folgt für eine Ringfläche, welche von zwei concentrischen Kreisen begrenzt wird, deren Halbmesser R und r_0 sind, die Function:

$$V = -\int_{r_0}^{R} dr . \int_0^{2\pi} d\omega . \frac{rq}{\sqrt{a^2 + r^2 + c^2 - 2ar\cos\omega}} .$$

Wenn die Dichte q nur eine Function von r ist, sich also vom Mittelpunkt gegen den Umfang hin in jeder Richtung auf gleiche Weise ändert und für eine concentrische Kreislinie constant ist, hat man daher auch den Ausdruck:

$$V = -\int_{r_0}^{R} dr \,.\, rq \int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 + c^2 - 2ar\cos\omega}} \,,$$

worin das innere Integral ganz mit dem im vorhergehenden §. behandelten übereinstimmt. Die dortige Entwicklung dürfte aber hier wegen der noch auszuführenden Integration in Bezug auf r nicht zweckmäßig sein; man wird jetzt besser $a^2 + r^2 + c^2$ durch m^2, $2ar$ durch n^2 ersetzen und das obige Integral unter die Form bringen:

$$V = -\int_{r_0}^{R} dr \,.\, \frac{rq}{m} \int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2}\cos\omega}} \,.$$

Die Entwickelung der Wurzelgröße, worin $\frac{n^2}{m^2}$ immer kleiner als 1 ist, gibt dann die convergirende Reihe:

$$\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\cos\omega\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1.3}{2.4}\frac{n^4}{m^4}\cos^2\omega + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{n^8}{m^8}\cos^4\omega + \text{etc.}$$
$$+ \frac{n^2}{2m^2}\cos\omega\left(1 + \frac{3.5}{4.6}\frac{n^4}{m^4}\cos^2\omega + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\frac{n^8}{m^8}\cos^4\omega + \text{etc.}\right)$$

und mit der Beachtung, daß für jeden ganzen positiven Werth von ν

$$\int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \cos\omega \,.\, \cos^{2\nu}\omega = 0 \,,$$

daß also der ganze zweite Theil der vorstehenden Entwickelung bei der Integration wegfällt, findet man für V den angenäherten Werth:

$$V = -\,2\pi\int_{r_0}^{R} dr \,.\, \frac{qr}{m}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}\frac{n^4}{m^4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{5.7}{6.8}\frac{n^8}{m^8} + \text{etc.}\right].$$

Die weitere Ausführung dieses Integrals ist immer möglich, wenn q durch eine rationale Function von r ausgedrückt ist, aber selbst für eine constante Dichte nicht mehr einfach. Beschränken wir uns daher für die weitere Untersuchung auf die beiden einfachern Fälle, wo entweder a oder c Null und q constant ist.

Wenn $a = 0$ ist, der angegriffene Punkt also wieder senkrecht über dem Mittelpunkt der anziehenden Fläche liegt, hat man unmittelbar

$$V = -2\pi q \int_{r_0}^{R} dr \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+c^2}} = -2\pi q\left(\sqrt{R^2+c^2} - \sqrt{r_0^2+c^2}\right),$$

und damit folgt

$$Z = G\mu\frac{\partial V}{\partial c} = 2\pi G\mu q c\left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2+c^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+c^2}}\right)$$

als Intensität der anziehenden Wirkung einer Ringfläche auf einen Punkt in der Normalen ihres Mittelpunktes. Setzt man hier $r_0 = 0$, so hat man für die Wirkung einer ganzen Kreisfläche auf einen solchen Punkt den Ausdruck:

$$Z = 2\pi G\mu q\left(1 - \frac{c}{\sqrt{R^2+c^2}}\right) = 2\pi G\mu q R^2\left(\frac{1}{R^2} - \frac{c}{R^2\sqrt{R^2+c^2}}\right),$$

und man sieht, daß in beiden Fällen der Werth für W, nicht einfach werden kann. *)

In dem andern Falle, wo $c = 0$ ist, der angegriffene Punkt also in der Ebene des Kreises selbst liegt, wird man am einfachsten auf die im vorhergehenden §. dargestellte Entwickelung des innern Integrals der Function V zurückkommen, da diese für den gegenwärtigen Fall ein-

*) Wenn in dem Ausdruck für Z, welcher der vollen Kreisfläche entspricht, $c = 0$ gesetzt wird, so ergibt sich der sonderbare Werth: $Z = 2\pi G\mu q$, während man offenbar $Z = 0$ erhalten sollte, wie für eine Ringfläche; für diese wird auch $Z = 0$ unabhängig von r_0, und wie klein dieses sein mag, also auch wenn $r_0 = 0$ ist, wie überhaupt Z immer Null sein muß, wenn $c = 0$ ist. Jene Sonderbarkeit liegt in der Beschaffenheit der Function $z = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$, welche mit der obigen $\frac{c}{\sqrt{r_0^2+c^2}}$ übereinkommt, wenn r_0 und c veränderlich genommen werden. Diese Function erhält nämlich für $x = 0$ und $y = 0$ alle möglichen Werthe zwischen 0 und a; denn setzt man zuerst $y = 0$, so wird $z = a$ für jeden Werth von x; nimmt man dagegen zuerst $x = 0$, so wird $z = 0$ für jeden Werth von y, also auch für $y = 0$. Dieses sind aber nur die Grenzwerthe; denn macht man $y = mx$, so wird $z = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}$ und nimmt nun für jedes x alle Werthe an zwischen a und 0, wenn man m von Null bis ∞ wachsen läßt. Für $x = 0$ sind diese Werthe gleichsam in einer einzigen Ordinate vereinigt.

facher ist, als die obige nach Potenzen von $\frac{2ar}{a^2+r^2}$ fortschreitende Reihe; man muß aber dabei wieder zwei Fälle unterscheiden, nämlich den Fall, wo der angegriffene Punkt ganz außerhalb des wirkenden Kreises liegt, wo also a größer ist als R oder als der größte Werth von r, und dann den Fall, wo derselbe innerhalb des Ringes liegt, oder wo a kleiner ist als r_0, also kleiner als der kleinste Werth von r.

Für den ersten Fall ist $\frac{r}{a}$ für die ganze Ausdehnung des Integrals kleiner als 1, und man hat für V die convergirende Reihe:

$$V=-2\pi\frac{q}{a}\int_{r_0}^{R}dr.r\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^6+\text{etc.}\right],$$

weil für $a>r$ das im vorigen §. mit $\frac{n}{m}$ bezeichnete Verhältniß auf $\frac{r}{a}$ zurückkommt. Man zieht daraus durch weitere Integration

$$V=-2\pi q\left[\frac{1}{2}\frac{R^2-r_0^2}{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{R^4-r_0^4}{a^3}+\frac{1}{5}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{R^6-r_0^6}{a^5}+\text{etc.}\right]$$

und dann durch die Variation von a für X den entsprechenden Werth:

$$X=2\pi G\mu q\left[\frac{1}{2}\frac{R^2-r_0^2}{a^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{R^4-r_0^4}{a^4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{R^6-r_0^6}{a^6}+\text{etc.}\right]$$

oder für eine volle Kreisfläche einfacher

$$X=\pi G\mu q\frac{R^2}{a^2}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2+\frac{1.3.3}{2.4.4}\left(\frac{R}{a}\right)^4+\frac{1.3.3.5.5}{2.4.4.6.6}\left(\frac{R}{a}\right)^6+\text{etc.}\right].$$

Man schließt daraus mit der Beachtung, daß πqR^2 die Masse der anziehenden Fläche ausdrückt, für **w**, den Werth:

$$\mathbf{w}, = \frac{a}{\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{R}{a}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{R}{a}\right)^4+\text{etc.}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

dessen Nenner offenbar kleiner ist, als der des entsprechenden Werthes bei der Kreislinie, welcher also selbst größer ist als jener Werth von **w**, und zeigt, daß im jetzigen Falle der Anziehungsmittelpunkt dem Mittelpunkte des Kreises näher liegt als dort.

Für den zweiten Fall, wo a immer kleiner als r ist, hat man

$$V = -2\pi q \int_{r_0}^{R} dr. \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^6 + \text{etc.}\right]$$

$$= -2\pi q \left[R - r_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 a^4 \left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{R^3}\right) + \text{etc.}\right]$$

und zieht daraus mit dem Aenderungsgesetze in Bezug auf a den Ausdruck:

$$X = -\pi G\mu q \left[\frac{a}{r_0} - \frac{a}{R} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{a^3}{r_0^3} - \frac{a^3}{R^3}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2 \left(\frac{a^5}{r_0^5} - \frac{a^5}{R^5}\right) + \text{etc.}\right]$$

für die Intensität der anziehenden Wirkung einer Ringfläche auf einen materiellen Punkt, welcher sich in der innern Kreisebene befindet.

Für $a = 0$, wenn der angegriffene Punkt der Mittelpunkt des Ringes ist, wird, wie es sein muß, auch $X = 0$, wie klein auch r_0 sein mag. Liegt der angegriffene Punkt auf der innern Begrenzung der Ringfläche selbst, so wird $r_0 = a$, also hat man für X den Ausdruck:

$$X = -\pi G\mu q \left[1 - \frac{a}{R} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2 \left(1 - \frac{a^5}{R^5}\right) + \text{etc.}\right]$$

$$= -\pi G\mu q \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2 + \text{etc.} \right.$$

$$\left. - \frac{a}{R}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{a^2}{R^2} + \frac{3}{5}\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2 \frac{a^4}{R^4} + \text{etc.}\right\}\right],$$

dessen erste Zeile eine nicht mehr convergirende Reihe ist, und der nun auch nicht mehr Null wird, wenn man $a = 0$ setzt.

Man wird ebenso finden, daß auch der frühere Werth von X für den außerhalb liegenden Punkt nicht mehr convergirt, wenn $a = R$ wird; es läßt sich deßhalb auch durch Verbindung dieses und des zuletzt gefundenen Werthes von X nichts Gewisses für den Fall bestimmen, wo der angegriffene Punkt innerhalb der wirkenden Kreisfläche selbst liegt. Untersuchen wir daher diesen Fall noch auf einem andern Wege.

Zu dem Ende legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den angegriffenen Punkt, die Achse der x durch den Mittelpunkt des Kreises und drücken die geometrische Wirkung eines Punktes der Kreisfläche durch die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes aus. Man hat dann für diesen Punkt

$$q = \frac{d^2M}{dxdy}, \quad w = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{d^2X}{dxdy} = G\mu q \frac{x}{w^3} =$$

und demnach für ein constantes q

$$X = G\mu q \int_{-R}^{+R} dy . \int_{a-\sqrt{R^2-y^2}}^{a+\sqrt{R^2-y^2}} dx \; . \; \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \; ;$$

denn die Gleichung des Kreises erhält nun die Form:

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2 \; ,$$

und die Grenzen von x als Functionen von y werden

$$a + \sqrt{R^2-y^2} \quad \text{und} \quad a - \sqrt{R^2-y^2} \; .$$

Man zieht daraus als erstes Integral den Ausdruck:

$$X = G\mu q \int_{-R}^{+R} dy . \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2-2a\sqrt{R^2-y^2}}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+R^2+2a\sqrt{R^2-y^2}}} \right] ,$$

oder wenn man darin $y = R \sin u$ setzt und beachtet, daß $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ die Grenzen von u sind, welche den Grenzen $+R$ und $-R$ von y entsprechen,

$$X = G\mu q \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} du . \cos u \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta \cos u}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta \cos u}} \right) ,$$

worin noch zur Abkürzung β für $\frac{2aR}{a^2+R^2}$ steht. Dieser Bruch ist immer kleiner als 1, ob a größer oder kleiner als R ist; man kann daher die beiden Wurzelgrößen nach Potenzen von $\beta \cos u$ in convergirende Reihen entwickeln und findet so

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta\cos u}} - \frac{1}{\sqrt{1+\beta\cos u}} = 2\left(\frac{1}{2}\beta\cos u + \frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3\cos^3 u + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\beta^5\cos^5 u + \text{etc.} \right).$$

Der Werth von X hängt demnach zuletzt von dem Integral:

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} du . \cos^{2m} u = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

ab und wird darnach

$$X = -G\mu \frac{2\pi q R}{\sqrt{a^2+R^2}} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \beta + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6}\beta^3 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{7.9}{8.10}\beta^5 + \text{etc.} \right]$$

oder in anderer Form, worin die Masse der wirkenden Kreisfläche hervortritt, und woraus sich leicht $\mathbf{w}_{,}$ ergibt,

$$X = -G\mu q\pi R^2 \frac{a}{\sqrt{(a^2+R^2)^3}}\left[1+\frac{3.3.5}{4.4.6}\beta^2+\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2\frac{7.9}{8.10}\beta^4+\text{etc.}\right]. \quad (a.$$

Dieser Ausdruck gilt nun sowohl für den Fall, wo der angegriffene Punkt innerhalb, als für den Fall, wo er außerhalb des Kreises liegt, und gibt immer einen angenäherten Werth mit der einzigen Ausnahme, wo $a = R$, $\beta = 1$ wird.

In diesem Falle hat man aber, wenn $\frac{y}{R} = u$ gesetzt wird,

$$X = -\frac{G\mu q}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1} du.\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-u^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-u^2}}}\right),$$

und wenn man die beiden Integrale trennt, in dem einen $\sqrt{1-u^2}=1-v_1$, in dem andern $\sqrt{1-u^2} = v_2-1$ setzt, wodurch sich

$$\frac{du}{dv_1} = \frac{1-v_1}{\sqrt{(2-v_1)v_1}}, \qquad \frac{du}{dv_2} = \frac{1-v_2}{\sqrt{(2-v_2)v_2}}$$

ergibt, und wenn man beachtet, daß die Grenzen von v_1 und v_2 für beide Grenzen von u gleich werden, daß man also das vorstehende Integral mit 2 multiplicirt zwischen den Grenzen 0 und 1 in Bezug auf u und die daraus abgeleiteten Integrale in Bezug auf v zwischen denselben Grenzen nehmen muß, so findet man

$$X = -\frac{2G\mu q}{\sqrt{2}}\left[\int_0^1 dv_1.\left(\frac{1}{v_1\sqrt{2-v_1}} - \frac{1}{\sqrt{2-v_1}}\right) + \int_1^2 dv_2.\left(\frac{1}{v_2\sqrt{2-v_2}} - \frac{1}{\sqrt{2-v_2}}\right)\right]$$

$$= -\frac{2G\mu q}{\sqrt{2}}\int_0^2 dv.\left(\frac{1}{v\sqrt{2-v}} - \frac{1}{\sqrt{2-v}}\right)$$

$$= -\frac{2G\mu q}{\sqrt{2}}\overset{2}{\underset{0}{\Delta}}.\left(2\sqrt{2-v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{logn}\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2-v}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-v}}\right),$$

also in diesem Falle unzweifelhaft für X einen unendlich großen Werth oder $\mathbf{w}_{,} = 0$.

Nach der Gleichung (a) läßt sich leicht der allgemeine Werth für eine Ringfläche ableiten; man darf nämlich von dem Werthe (a) nur einen ähnlichen abziehen, worin der Halbmesser r_0 des innern begrenzenden statt des Halbmessers R steht; man erhält so für jede Lage des angegriffenen Punktes den Ausdruck:

$$\text{b.)}\left\{\begin{aligned}X = \pi G \mu q \Bigg[& \frac{a r_0^2}{\sqrt{(a^2+r_0^2)^3}} \left\{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{5}{6}\beta_0^2+\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2 \frac{7.9}{8.10}\beta_0^4+\text{etc.}\right\} \\ & -\frac{a R^2}{\sqrt{(a^2+R^2)^3}} \left\{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{5}{6}\beta^2+\left(\frac{3.5}{4.6}\right)^2 \frac{7.9}{8.10}\beta^4+\text{etc.}\right\}\Bigg],\end{aligned}\right.$$

worin β_0 für $\frac{2 a r_0}{a^2+r_0^2}$ steht; es ist indessen zu bemerken, daß die Werthe (a) und (b) weniger rasch convergiren, als die frühern für einzelne Fälle abgeleiteten Werthe von X.

§. 105.

Die Entwickelungen der beiden vorhergehenden §§. werden nun hinreichende Mittel darbieten, um auch die Wirkung einer begrenzten Cylinderfläche und eines Cylinders, wenn deren senkrechter Querschnitt ein Kreis ist, zu berechnen. Man wird dazu die Achse der Cylinderfläche als Achse der z nehmen und die Lage eines Punktes derselben durch seine Entfernung z von der Ebene der xy und durch den Winkel ω bestimmen, welchen der zu ihm gezogene Halbmesser r mit der durch den angegriffenen Punkt gelegten Ebene der xz bildet. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{d^2M}{dz\,d\omega} = rq \quad , \quad w = \sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2-2ar\cos\omega}$$

und demnach für eine senkrecht begrenzte Cylinderfläche von constanter Dichte

$$V = -rq\int_0^h dz.\int_0^{2\pi} d\omega.\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2-2ar\cos\omega}}.$$

Diesen Ausdruck wird man am besten in der Art integriren, daß man wie im vorhergehenden §. die Wurzelgröße auf die Form:

$$\sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2}.\sqrt{1-\frac{n^2}{m^2}\cos\omega} \;,\; \frac{n^2}{m^2}=\frac{2ar}{a^2+r^2+(c-z)^2},$$

bringt, womit man nach dem Vorhergehenden als erstes Integral die annähernde Entwickelung erhält:

$$V = -2\pi qr \int_0^h dz. \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2}} \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4}\frac{n^4}{m^4}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5.7}{6.8}\frac{n^8}{m^8}+\text{etc.}\right].$$

Setzt man dann darin nach dem gewöhnlichen Verfahren, um die Glieder rational zu machen, $a^2 + r^2 + (c - z)^2 = (c - z + \sqrt{u})^2$, so wird

$$V = -2\pi qr \int_{u_0}^{u_1} du . \frac{1}{2u} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} \frac{64\, a^2\, r^2\, u^2}{(a^2 + r^2 - u)^4} + \text{etc.}\right],$$

und als Grenzen von u hat man

$$u_1 = \left[\sqrt{a^2+r^2+(c-h)^2}+h-c\right]^2 \quad , \quad u_0 = \left[\sqrt{a^2+r^2+c^2}-c\right]^2 .$$

Die Ausführung des vorstehenden Integrals, so wie die Ableitung der für alle Lagen des gegebenen Punktes gültigen Werthe der Componenten X und Z als Aenderungsgesetze von V in Bezug auf a und c haben dann keine Schwierigkeit mehr als die Länge der Rechnung.

Die Werthe von V, X und Z werden nur einfach, wenn $a = 0$ ist, also wenn der angegriffene Punkt in der Achse der Cylinderfläche liegt; man hat dann offenbar $X = 0$, der vorhergehende Werth von V kommt auf das erste Glied zurück und gibt

$$V = -2\pi qr . \frac{1}{2} \operatorname{logn} \left[\frac{\sqrt{r^2 + (c-h)^2} + h - c}{\sqrt{r^2 + c^2} - c}\right]^2,$$

woraus sofort für Z der Werth:

$$Z = G\mu \frac{\delta V}{\delta c} = 2\pi G\mu qr \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (c-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}\right]$$

hervorgeht. Liegt der angegriffene Punkt im Endpunkt der Achse, so wird $c = h$, und demnach

$$Z = 2\pi G\mu qr\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right) \quad , \quad W_{,}^{2} = hr \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{\sqrt{r^2 + h^2} - r},$$

da die Masse der Cylinderfläche durch $2\pi qrh$ ausgedrückt wird. Derselbe Werth, nur mit entgegengesetztem Zeichen ergibt sich auch, wenn man $c = 0$ setzt, wie dies als nothwendig einleuchten wird.

Ist ferner h sehr groß gegen r und c, so nähert sich die Intensität der anziehenden Wirkung dem Werthe:

$$Z = -2\pi G\mu q r h \frac{1}{h\sqrt{r^2+c^2}} = -G\mu M \frac{1}{h\sqrt{r^2+c^2}},$$

worin M die Masse der Cylinderfläche ist, und für $c = 0$ hat man noch einfacher

$$Z = -G\mu M.\frac{1}{rh}\quad,\qquad w_{,} = \sqrt{rh}\;;$$

man schließt daraus, daß der Anziehungsmittelpunkt einer im Verhältniß zu ihrem Halbmesser sehr langen Cylinderfläche für einen materiellen Punkt, welcher an dem einen Ende ihrer Achse liegt, um die mittlere geometrische Proportionale zu dem Halbmesser und der Länge von dem gegebenen Punkte entfernt ist.

Zuletzt findet man noch für $c = \frac{1}{2}h$, $Z = 0$, wie vorauszusehen war.

Noch schwieriger wird die Berechnung der Wirkung eines Cylinders, da dieselbe von der Auflösung eines dreifachen Integrals abhängt. Für diesen haben wir nämlich unter denselben Voraussetzungen wie vorher

$$\frac{d^3M}{dz\,dr\,d\omega} = qr\quad,\qquad w = \sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2-2ar\cos\omega}\;;$$

es wird nun auch r veränderlich, und die Function V nimmt für einen von zwei concentrischen Cylinderflächen und senkrecht zu seiner Achse begrenzten Cylinder die Form an:

$$V = -q\int_0^h dz.\int_{r_0}^R dr.\int_0^{2\pi} d\omega.\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2-2ar\cos\omega}}.$$

Daraus zieht man wie vorher

$$V = -2\pi q\int_0^h dz.\int_{r_0}^R dr.\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}\frac{n^4}{m^4}+\text{etc.}\right]$$

oder, wenn $\sqrt{a^2+r^2+(c-z)^2} = m$ durch u ersetzt wird,

$$V = -2\pi q\int_0^h dz.\int_{u_0}^u du.\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}\frac{4a^2[u^2-a^2-(c-z)^2]}{u^4}+\text{etc.}\right],$$

und man sieht hieraus, daß durch die Integration in Bezug auf die Veränderliche u, deren Grenzen $\sqrt{R^2+a^2+(c-z)^2}$ und $\sqrt{r_0{}^2+a^2+(c-z)^2}$ sind, eine Reihe von algebraischen Gliedern zum Vorschein kommt, deren Integration in Bezug auf z kein Hinderniß entgegensteht.

Wenn $a=0$ ist, der angegriffene Punkt also wieder in der Achse des Cylinders liegt, hat man einfacher und unmittelbar für einen hohlen Cylinder, und zwar sowohl wenn $c>h$ als wenn $c<h$ ist,

$$Z=G\mu q\int_0^{2\pi} d\omega.\int_0^h dz.\int_{r_0}^R dr.\frac{r(c-z)}{\sqrt{[r^2+(c-z)^2]^3}}$$

$$=-2\pi G\mu q\int_0^h dz.\left[\frac{c-z}{\sqrt{R^2+(c-z)^2}}-\frac{c-z}{\sqrt{r_0{}^2+(c-z)^2}}\right]$$

$$=2\pi G\mu q\left[\sqrt{R^2+(c-h)^2}-\sqrt{R^2+c^2}-\sqrt{r_0{}^2+(c-h)^2}+\sqrt{r_0{}^2+c^2}\right];$$

für einen vollen Cylinder folgt daraus, wenn $c>h$,

$$Z=2\pi G\mu q\left[h+\sqrt{R^2+(c-h)^2}-\sqrt{R^2+c^2}\right];$$

ist dagegen $c<h$, so hat man

$$Z=2\pi G\mu q\left[2c-h+\sqrt{R^2+(c-h)^2}-\sqrt{R^2+c^2}\right],$$

und wenn $c=h$ ist,

$$Z=2\pi G\mu q\left(R+h-\sqrt{R^2+h^2}\right).$$

Setzt man endlich h sehr groß voraus gegen R, so ergibt sich der Näherungswerth:

$$Z=2\pi G\mu qh\left[1+\frac{R}{h}-\left(1+\frac{R^2}{2h^2}-\text{etc.}\right)\right]$$

$$=2\pi G\mu qR\left(1-\frac{R}{2h}+\text{etc.}\right),$$

und man findet als erste Annäherung, wenn M die Masse des Cylinders bedeutet,

$$Z=G\mu M\frac{2}{Rh}\quad,\qquad w_{,}=\frac{1}{2}\sqrt{2Rh}\,.$$

Für einen cylindrischen Stab, der sehr dünn ist im Verhältniß zu seiner Länge, liegt demnach der Mittelpunkt der Anziehung in Bezug auf den

Endpunkt seiner Achse nahe um die Hälfte der mittleren geometrischen Proportionale zwischen seinem Durchmesser und seiner Länge von jenem Endpunkt entfernt.

§. 106.

Die Kugelfläche läßt eine sehr einfache Behandlung zu und dürfte allein von allen Flächen zu einem einfachen Werthe für die anziehende Wirkung führen; denn hier kann man immer ohne Nachtheil für die Einfachheit der Gleichung der Fläche die Achse der x durch den Mittelpunkt der wirkenden Masse und durch den angegriffenen Punkt legen; es wird dann offenbar auch die Richtung der Gesammtwirkung in diese Achse fallen, also die Componente X selbst diese Wirkung der ganzen Kugelfläche vorstellen.

Auf diese Weise findet man wieder

$$w = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ax} \quad , \qquad \frac{d^2 M}{d\omega\, dx} = rq \, ,$$

und wenn q constant ist, wird

$$V = -qr\int_0^{2\pi} d\omega \, . \int_{-r}^{+r} dx \, . \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ax}} = -2\pi qr \int_{-r}^{+r} dx \, . \frac{1}{\sqrt{a^2+r^2-2ax}} \, ,$$

also mit Beachtung der Anmerkung in §. 102

$$V = 2\pi qr \frac{\sqrt{(a-r)^2} - (a+r)}{a} \, .$$

Differenzirt man dann allgemein unter Beibehaltung der Wurzelgröße $\sqrt{(a-r)^2}$, so ergibt sich daraus für alle Fälle

$$X = G\mu \frac{\delta V}{\delta a} = 2\pi G\mu q \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{a - r + \sqrt{(a-r)^2}}{\sqrt{(a-r)^2}} \, .$$

Liegt nun der angegriffene Punkt außerhalb der Kugelfläche, so ist immer $a > r$, $\sqrt{(a-r)^2} = a - r$, und daher

$$V = -4\pi q r^2 \frac{1}{a} \quad , \qquad X = 4\pi G\mu q r^2 \frac{1}{a^2} = \frac{G\mu M}{a^2} \, ,$$

da $4\pi q r^2 = M$ die Masse der ganzen Kugelfläche ausdrückt. Es fällt demnach für jeden außerhalb liegenden Punkt der Mittelpunkt der Anziehung mit dem Mittelpunkte der Kugelfläche zusammen.

Befindet sich der angegriffene Punkt dagegen innerhalb des von der Kugelfläche begrenzten Raumes, so hat man $a < r$, $\sqrt{(a-r)^2} = r - a$ und damit noch übereinstimmend

$$V = -4\pi q r \quad , \qquad X = G\mu \frac{\partial V}{\partial a} = 0 \, ,$$

da V von a ganz unabhängig geworden ist. Es ist demnach gleichgültig, an welchem Orte im Innern der Kugelfläche sich der angegriffene Punkt befindet; die anziehende Wirkung dieser letztern ist immer Null, oder die von allen Seiten gerichteten geometrischen Wirkungen heben sich vollständig auf, wie in dem evidenten Falle, wo der angegriffene Punkt selbst den Mittelpunkt der Kugelfläche einnimmt. Man kann sich davon eine nähere Einsicht durch folgende Betrachtung verschaffen. Denkt man sich den Anfangspunkt der Coordinaten in den angegriffenen Punkt M, Fig. 80, verlegt und die Lage eines Punktes N der Kugelfläche durch Polarcoordinaten ausgedrückt, deren Achse (auch die der z) durch den Mittelpunkt O derselben gelegt sei, so wird die Entfernung w gleich dem Fahrstrahl r, und man hat als geometrische Wirkung eines Punktes N der Kugelfläche auf den Punkt M

$$\frac{d^2 R}{d\omega \, d\vartheta} = G\mu \frac{d^2 M}{d\omega \, d\vartheta} \cdot \frac{1}{r^2} = - G\mu q \sin\vartheta \, ,$$

weil man sich leicht überzeugen wird (§§. 54 u. 75), daß man auch hat

$$\frac{d^2 M}{d\omega \, d\vartheta} = q r^2 \sin\vartheta \, .$$

Die zur Achse der z parallele Componente dieser Wirkung wird demnach durch

$$\frac{d^2 Z}{d\omega \, d\vartheta} = G\mu q \sin\vartheta \cos\vartheta$$

ausgedrückt, und es ergeben sich daraus für die geometrische Wirkung $\frac{dZ}{d\vartheta}$ der Kreise NN′ und PP′, welche durch den Durchschnitt der Kegelfläche PP′MNN′ mit unserer Kugelfläche gebildet werden, die Werthe:

$$2\pi G\mu q \sin\vartheta \cos\vartheta \quad \text{und} \quad 2\pi G\mu q \sin(\pi - \vartheta) \cos(\pi - \vartheta) \, .$$

Diese zeigen, daß die Wirkungen zweier solcher Kreise immer gleich und entgegengesetzt sind, sich also gegenseitig aufheben, welches auch der Winkel ϑ sein mag, und es leuchtet nun ein, daß sich auch die Wirkungen der beiden durch die Ebene der xy gebildeten Abschnitte der

Kugelfläche gegenseitig aufheben und eine Gesammtwirkung Null geben müssen.

Ist endlich der angegriffene Punkt ein Punkt der Fläche selbst, so wird $a = r$, und der obige allgemeine Werth von X erscheint unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, welche sich hier auf die gewöhnliche Weise nicht beseitigen läßt. Für diesen Fall erhält man aber aus dem unmittelbaren Ausdruck für X, nämlich

$$X = 2\pi G\mu q r \int_{-r}^{+r} dx . \frac{a - x}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ax)^3}} ,$$

wenn darin $a = r$ gesetzt wird, den Werth:

$$X = \frac{\pi G\mu q}{\sqrt{2r}} \int_{-r}^{+r} dx . \frac{1}{\sqrt{r - x}} = 2\pi G\mu q = G\mu M \frac{1}{2r^2} ,$$

$$w_{\prime} = r\sqrt{2} .$$

Für diesen Fall liegt demnach der Mittelpunkt der Anziehung um 1,414...r von dem angegriffenen und um 0,414...r vom Mittelpunkte der Kugelfläche entfernt. Man kann dieses Ergebniß aber auch so ausdrücken: die Wirkung einer Kugelfläche auf einen ihr angehörigen Punkt ist dieselbe, als wenn die halbe Masse derselben im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Vergleicht man den oben gefundenen Werth mit dem obigen allgemeinen Werthe von X, so ergibt sich daraus die bemerkenswerthe Beziehung:

$$\frac{a - r + \sqrt{(a-r)^2}}{\sqrt{(a-r)^2}} = 1 \quad , \quad \text{wenn} \quad a = r .$$

Ebenso dürfte es noch als bemerkenswerth erscheinen, daß von keinem der drei Werthe von X zu dem zunächst liegenden ein stetiger Uebergang stattfindet; denn befindet sich der angegriffene Punkt auf der Kugelfläche, so führt die denkbar kleinste Verrückung desselben nach Außen den ersten Fall herbei, die geringste nach Innen den zweiten, und es gibt für die Kraft X nur die drei genannten sehr verschiedenen Werthe für alle mögliche Lagen des angegriffenen Punktes.

§. 107.

Unter den Körpern ist ebenfalls die Kugel der einzige, welcher ein einfaches Ergebniß zuläßt, und auch diese nur dann, wenn die geometrische Dichte eines Punktes blos von seiner Entfernung vom Mittelpunkte abhängt, also eine Function der Veränderlichen r ist.

Betrachten wir also, um sogleich alle Fälle zu umfassen, eine hohle Kugel, die von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzt wird, deren Halbmesser R und r_0 sind. Die Lage eines Punktes derselben drücken wir wieder durch die Polarcoordinaten r, ϑ, ω aus, und legen deßhalb die Achse der z durch den gegebenen materiellen Punkt, auf welchen die Kugelmasse wirkt, und dessen Abstand vom Anfang der Coordinaten, dem Mittelpunkte der beiden begrenzenden Kugelflächen durch c bezeichnet werde. Die Componente Z wird dann offenbar zugleich Resultirende des ganzen Systems, und man hat

$$w^2 = r^2 + c^2 - 2rc\cos\vartheta ,$$

also auch als Aenderungsgesetz von w in Bezug auf ϑ den Ausdruck:

$$\frac{dw}{d\vartheta} = \frac{rc\sin\vartheta}{w} .$$

Ferner ist, wie in §. 75 abgeleitet wurde,

$$\frac{d^3M}{dr\,d\vartheta\,d\omega} = qr^2\sin\vartheta ,$$

und damit wird

$$V = -\int_0^{2\pi} d\omega . \int_{r_0}^{R} dr . \int_0^{\pi} d\vartheta . \frac{qr^2\sin\vartheta}{w} = -\frac{2\pi}{c}\int_{r_0}^{R} dr . \int_0^{\pi} d\vartheta . qr\frac{dw}{d\vartheta} ,$$

oder unter der oben gemachten Voraussetzung für die Dichte q

$$V = -\frac{2\pi}{c}\int_{r_0}^{R} dr . qr \int_{\sqrt{(r-c)^2}}^{\sqrt{(r+c)^2}} dw . 1 = -\frac{2\pi}{c}\int_{r_0}^{R} dr . qr\left[r + c - \sqrt{(r-c)^2}\right] ,$$

indem man mit Berücksichtigung der frühern Bemerkung beachtet, daß die Grenzen von w, in Bezug auf ϑ als Veränderliche genommen, sind:

$$\sqrt{(r-c)^2} \text{ für } \vartheta = 0 \quad , \quad r + c \text{ für } \vartheta = \pi .$$

1) Ist nun c größer als jeder Werth, den r erhalten kann, mithin

auch größer als R, liegt also der angegriffene Punkt ganz außerhalb der Kugel, so wird immer $\sqrt{(r-c)^2} = c - r$ sein, und man findet

$$V = -\frac{4\pi}{c}\int_{r_0}^{R} dr \,.\, qr^2 = -\frac{M}{c},$$

da das Integral $4\pi\int_{r_0}^{R} dr \,.\, qr^2$ die Masse M der Kugel ausdrückt; daraus folgt

$$Z = G\mu\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{G\mu M}{c^2},$$

und dieser Werth zeigt, daß in diesem Falle die Wirkung dieselbe ist, als wenn die ganze Masse des Körpers in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre. Dieses Ergebniß ist natürlich unabhängig von der Grenze r_0 und demnach auch gültig für $r_0 = 0$ oder für eine volle Kugel; bei einer vollen oder hohlen Kugel, deren Dichte entweder constant oder mit der Entfernung eines Punktes vom Centrum veränderlich ist, fällt demnach auch nach dem in der Natur stattfindenden Gesetze der Anziehung der Mittelpunkt dieser Wirkung in Bezug auf einen außerhalb liegenden Punkt mit dem Schwerpunkte zusammen. *)

2) Liegt der angegriffene Punkt im hohlen Raume der Kugel, in welchem Falle $c < r_0$, und $\sqrt{(r-c)^2} = r - c$ ist, so hat man

$$V = -4\pi\int_{r_0}^{R} dr \,.\, qr \quad , \quad Z = 0 ,$$

wie bei der Kugelfläche, woraus dann folgt, daß auch die anziehende Wirkung einer hohlen Kugel auf einen Punkt in ihrem hohlen Raume für jede Lage desselben Null ist, wie in dem Falle, wo er sich im Mittelpunkte befindet.

Der allgemeine Werth von Z, aus dem von V abgeleitet, ist

*) In §. 95 wurde gezeigt, daß unter der Voraussetzung: $f(w) = w$ der Mittelpunkt der Anziehung für jeden Körper mit dessen Schwerpunkt zusammenfallen würde.

$$Z = 2\pi G\mu \left[\frac{1}{c^2}\int_{r_0}^{R} dr.qr[r+c-\sqrt{(r-c)^2}] - \frac{1}{c}\int_{r_0}^{R} dr.qr\frac{\sqrt{(r-c)^2}+r-c}{\sqrt{(r-c)^2}}\right]$$

$$= 2\pi G\mu \int_{r_0}^{R} dr.\frac{qr^2}{c^2}\left[1 - \frac{r-c}{\sqrt{(r-c)^2}}\right]$$

und gibt für die beiden vorhergehenden Fälle dieselben Werthe, wie die oben abgeleiteten. Derselbe zeigt ferner,

3) daß für $c = R$, d. h. wenn sich der angegriffene Punkt auf der äußern Umhüllungsfläche der Kugelschale befindet, noch der erste, und wenn er auf der innern Fläche liegt, also $c = r_0$ ist, der zweite Fall stattfindet.

4) Befindet sich endlich der materielle Punkt in der Kugelmasse selbst, so daß $c > r_0$ und $< R$ ist, so zerlegt man jedes der obigen Integrale in zwei Theile, von denen der eine die Grenzen R und c, der andere die Grenzen c und r_0 erhält, und findet dadurch mit der Beachtung, daß der erste Theil dem zweiten, der zweite dem ersten der vorhergenannten Fälle entspricht, einmal

$$V = -4\pi\int_{c}^{R} dr.qr - \frac{4\pi}{c}\int_{r_0}^{c} dr.qr^2$$

und dann, damit offenbar zufällig übereinstimmend, sei es daß man die Integration wirklich ausführt oder nicht,

$$Z = G\mu\frac{\delta V}{\delta c} = \frac{4\pi G\mu}{c^2}\int_{r_0}^{c} dr.qr^2 ;$$

die Wirkung ist sonach dieselbe, wie die einer Kugelschale, deren äußere begrenzende Fläche durch den angegriffenen Punkt geht. Nimmt man z. B. wie in §. 76

$$q = D_0 + \frac{r}{R}(D - D_0)$$

und ersetzt unter dem Integralzeichen c durch R_0, so findet man für die Masse einer vollen Kugel, deren Halbmesser R_0 ist,

$$M' = 4\pi\int_{0}^{R_0} dr.r^2\left[D_0 + \frac{r}{R}(D - D_0)\right] = \frac{1}{3}\pi\frac{R_0^3}{R}[D_0(4R - 3R_0) + 3DR_0]$$

und für die Wirkung einer vollen Kugel von beliebigem Halbmesser R auf einen Punkt in ihrem Innern, welcher um $c = R_0$ von ihrem Mittelpunkte entfernt ist,

$$Z = \frac{1}{3}\pi G\mu \frac{R_0^3}{Rc^2}[D_0(4R - 3R_0) + 3DR_0] = \frac{G\mu M'}{c^2}.$$

Bei gleichförmiger Dichte hat man $D = D_0$, und da $c = R_0$ ist,

$$Z = \frac{4}{3}\pi G\mu D_0 R_0 ;$$

die anziehende Kraft ist dann der Entfernung des angegriffenen Punktes vom Mittelpunkte proportional.

Betrachtet man z. B. die Erde als eine Kugel von durchaus gleicher Dichte und bezeichnet ihre anziehende Wirkung auf einen materiellen Punkt oder einen Körper von sehr kleinen Ausdehnungen im Vergleich zum Durchmesser der Erde, dessen Masse $= \mu$ ist, wenn er sich auf der Oberfläche derselben befindet, also den Ausdruck $\frac{4}{3}\pi G\mu D R$, der das Gewicht jenes materiellen Punktes oder kleinen Körpers mißt, mit P, so wird die Wirkung in einer Tiefe h unter der Oberfläche durch

$$Z = P\frac{R-h}{R} = P - P\frac{h}{R}$$

ausgedrückt werden. Für einen Punkt außerhalb der Erde dagegen, in einer Höhe h über der Oberfläche hat man

$$Z = P\frac{R^2}{(R+h)^2},$$

wobei die Dichte der Erde nicht mehr constant sein darf, sondern nur eine willkürliche Function der Entfernung r vom Mittelpunkte, so daß die Erde aus concentrischen Schichten von beliebiger Dichte bestehen kann.

§. 108.

In §. 97 wurde für ein nicht stetig zusammenhängendes System nachgewiesen, daß bei einer sehr großen Entfernung des angegriffenen Punktes von dem wirkenden System, im Vergleich zu der Ausdehnung des letztern, der Mittelpunkt der Anziehung dem Schwerpunkte des Systems sehr nahe kommt, beziehungsweise mit demselben zusammenfällt; die Function V kann uns nun dazu dienen, diesen Satz bei dem in der Natur stattfindenden Gesetze der Anziehung auch für ein stetiges System nachzuweisen und dabei die Größe der dabei stattfindenden Annäherung darzuthun.

Legt man nämlich den Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt des gegebenen Systems und die Achse der x durch den

angegriffenen Punkt, bezeichnet die Entfernung des letztern von jenem mit e und bestimmt die Lage eines der Punkte in dem gegebenen System durch die Abscisse x und den Fahrstrahl r, die zu unserm Zwecke hinreichen, so wird

$$w = \sqrt{e^2 - 2ex + r^2},$$

und man hat

$$V = -\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{q}{w} = -\frac{1}{e}\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q\left(1 - 2\frac{x}{e} + \frac{r^2}{e^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

worin $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ als Function der drei Veränderlichen x, y, z zu betrachten ist. Entwickelt man dann den Factor: $\left(1 - 2\frac{x}{e} + \frac{r^2}{e^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, so erhält man eine Reihe, welche nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{x}{e}$ und $\frac{r}{e}$ fortschreitet, und deren Glieder daher um so rascher abnehmen, je kleiner r gegen e ist, da x jedenfalls noch kleiner als r sein wird, und wenn man beachtet, daß man nach §. 22 hat

$$\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . qx = MX = 0,$$

wo M die Masse des ganzen Systems und X die Abscisse seines Schwerpunktes bezeichnet, der nun der Anfangspunkt ist, so wird die Entwickelung von V

$$V = -\frac{1}{e}\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q - \frac{1}{2e^3}\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q(3x^2 - r^2) - \text{etc.}.$$

Kann man also ohne bedeutenden Fehler den größten Werth von $\frac{r^2}{e^3}$ gegen $\frac{1}{e}$ vernachlässigen, so hat man einfach

$$V = -\frac{1}{e}\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q = -\frac{M}{e},$$

und wenn man nun dem Coordinaten-System, dessen Anfang immer der Schwerpunkt bleibt, eine beliebige Richtung gibt und die Coordinaten des angegriffenen Punktes mit a, b, c bezeichnet, wonach $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ wird, allgemeiner

$$V = -\frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Daraus zieht man aber mit der Beachtung, daß $\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial a} = \frac{a}{e} \frac{\partial V}{\partial e}$ ist, für die drei Componenten der anziehenden Wirkung des Systems die Werthe:

$$X = G\mu M \frac{a}{e^3} \quad , \quad Y = G\mu M \frac{b}{e^3} \quad , \quad Z = G\mu M \frac{c}{e^3},$$

welche zeigen, daß die Richtung der Resultirenden selbst durch den Anfangspunkt geht und daß zugleich $w_{\prime} = e$ ist, daß also dieser Anfangspunkt oder der Schwerpunkt des Systems der Mittelpunkt der Anziehung ist.

Auf ein gleiches Ergebniß wird man auf demselben Wege für irgend eine andere Function von w kommen, welche der in §. 94 für die Function f(w) abgeleiteten Form entspricht, und der eben bewiesene Satz demnach für jedes Gesetz der Anziehung gültig sein.

§. 109.

Die Function V besitzt eine bemerkenswerthe Eigenschaft, welche man in der Mechanik des Weltgebäudes der Untersuchung über die anziehende Wirkung eines Sphäroids und über die Gestalt der Himmelskörper zu Grunde gelegt hat, und welche sich in nachstehender Weise ableiten läßt.

Aus dem allgemeinen Werthe von w, nämlich

$$w = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$$

zieht man die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\partial . \frac{1}{w}}{\partial a} = \frac{x-a}{w^3} \quad , \quad \frac{\partial . \frac{1}{w}}{\partial b} = \frac{y-b}{w^3} \quad , \quad \frac{\partial . \frac{1}{w}}{\partial c} = \frac{z-c}{w^3},$$

$$\frac{\partial^2 . \frac{1}{w}}{\partial a^2} = \frac{3(x-a)^2}{w^5} - \frac{1}{w^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 . \frac{1}{w}}{\partial b^2} = \frac{3(y-b)^2}{w^5} - \frac{1}{w^3},$$

$$\frac{\partial^2 . \frac{1}{w}}{\partial c^2} = \frac{3(z-c)^2}{w^5} - \frac{1}{w^3},$$

und die Summe der drei letztern gibt

$$\frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta b^2} + \frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta c^2} = 0 . \qquad (c.$$

Man hat aber auch wie in §. 99 unter der Voraussetzung, daß nicht nur die Dichte q nicht Function von den Coordinaten a, b, c des angegriffenen Punktes ist, sondern daß auch die Grenzen des wirkenden Systems durchaus unabhängig von diesen Größen bleiben,

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} = - \frac{\delta^2 . \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{q}{w}}{\delta a^2} = - \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q \frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta a^2} ,$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta b^2} = - \frac{\delta^2 . \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{q}{w}}{\delta b^2} = - \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q \frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta b^2} ,$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta c^2} = - \frac{\delta^2 . \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{q}{w}}{\delta c^2} = - \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q \frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta c^2} ,$$

und da die Summe dieser drei Ausdrücke dem Integral:

$$- \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q \left(\frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta b^2} + \frac{\delta^2 . \frac{1}{w}}{\delta c^2} \right)$$

gleich ist, also vermöge der Gleichung (c) Null wird, so hat man auch

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta b^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta c^2} = 0 , \qquad (79^a.$$

wodurch die betreffende Eigenschaft der Function V ausgesprochen ist.

Nach der vorstehenden Ableitung und der ihr zu Grunde gelegten Bedingung ist es einleuchtend, daß die Anwendung des eben gefundenen Ausdrucks an dieselben Beschränkungen geknüpft ist, die oben für die Ableitung der Werthe der Componenten X, Y und Z aus der allgemeinen Function U genannt wurden; denn die Gleichung (79^a) wird

im Allgemeinen nicht mehr stattfinden, wenn die Integration zwischen Grenzen ausgeführt wird, welche von den Coordinaten a, b, c des angegriffenen Punktes abhängen, also wie früher gezeigt wurde, nicht mehr, wenn dieser Punkt im Innern des wirkenden Körpers liegt, sei es in der Masse selbst oder in einem eingeschlossenen hohlen Raume, wodurch indessen nicht ausgeschlossen wird, daß die genannte Gleichung in besondern Fällen auch bei dieser Lage des angegriffenen Punktes befriedigt werden kann.

Es ist daher durchaus unrichtig, wenn behauptet wird, daß die Gleichung (79^a) deßwegen nicht befriedigt werde, wenn der angegriffene Punkt in der Masse des Körpers enthalten sei, weil für diesen Punkt w Null und das Aenderungsgesetz: $\frac{q}{w}$ unendlich werde. Man scheint auf diese Ansicht durch den besondern Fall, wo der anziehende Körper eine Kugel ist, geführt worden zu sein, die wir deßwegen näher betrachten wollen.

Ersetzt man nämlich im 4ten Fall, den wir in §. 107 bei der Kugel untersucht haben, die Entfernung e des angegriffenen Punktes vom Mittelpunkte der Kugel durch

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} ,$$

so nimmt der Werth von V für diesen Fall und eine volle Kugel die Form an:

$$V = -4\pi \int_e^R dr \,.\, qr - \frac{4\pi}{e} \int_0^e dr \,.\, qr^2 ,$$

wobei q als eine Function von r vorausgesetzt ist. Macht man also $\int dr \,.\, qr = f'(r) = \frac{d \,.\, f(r)}{dr}$ und beachtet, daß man hat

$$\int dr \,.\, qr^2 = r \int dr \,.\, qr - \int dr \,.\, \int dr \,.\, qr$$

$$= r f'(r) - \int dr \,.\, f'(r) ,$$

so wird

$$V = -4\pi \left(f'(R) - \frac{1}{e} f(e) \right)$$

und demnach, übereinstimmend mit dem Werthe von Z an dem genannten Orte,

$$R = G\mu \frac{\delta V}{\delta e} = 4\pi G\mu \left[\frac{1}{e}\int_0^e dr \,.\, qr - \frac{1}{e^2}\int_0^e dr \,.\, f'(r)\right]$$

$$= \frac{4\pi G\mu}{e}\left(f'(e) - \frac{1}{e} f(e)\right),$$

oder, da $\frac{\delta e}{\delta a} = \frac{a}{e}$ u. s. f.,

$$X = G\mu \frac{\delta V}{\delta a} = 4\pi G\mu \frac{a}{e^2}\left(f'(e) - \frac{1}{e} f(e)\right),$$

$$Y = G\mu \frac{\delta V}{\delta b} = 4\pi G\mu \frac{b}{e^2}\left(f'(e) - \frac{1}{e} f(e)\right),$$

$$Z = G\mu \frac{\delta V}{\delta c} = 4\pi G\mu \frac{c}{e^2}\left(f'(e) - \frac{1}{e} f(e)\right).$$

Geht man dann weiter und nimmt die zweiten Aenderungsgesetze von V in Bezug auf a, b, c, so findet man

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} = 4\pi\left[\frac{a^2}{e^3} f''(e) + \left(\frac{1}{e^2} - \frac{3a^2}{e^4}\right) f'(e) - \left(\frac{1}{e^3} - \frac{3a^2}{e^5}\right) f(e)\right],$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta b^2} = 4\pi\left[\frac{b^2}{e^3} f''(e) + \left(\frac{1}{e^2} - \frac{3b^2}{e^4}\right) f'(e) - \left(\frac{1}{e^3} - \frac{3b^2}{e^5}\right) f(e)\right],$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta c^2} = 4\pi\left[\frac{c^2}{e^3} f''(e) + \left(\frac{1}{e^2} - \frac{3c^2}{e^4}\right) f'(e) - \left(\frac{1}{e^3} - \frac{3c^2}{e^5}\right) f(e)\right],$$

und damit ergibt sich, wenn man beachtet, daß

$$f''(e) = \frac{\delta \,.\, f'(e)}{\delta e} = \frac{\delta \,.\, \int_0^e dr \,.\, qr}{\delta e} = qe$$

ist, die Summe:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta b^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta c^2} = 4\pi \frac{f''(e)}{e} = 4\pi q \,. \qquad (79^b.$$

Dieser besondere Werth der Summe: $\frac{\delta^2 V}{\delta a^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta b^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta c^2}$, der, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, für jede beliebige Function von r gültig ist, durch welche die Dichte q ausgedrückt werden soll, und der sehr leicht für den Fall gefunden wird, wo q constant, also

$$V = -4\pi q\left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{6}e^2\right),$$

$$K.)\quad \frac{\partial V}{\partial a} = \frac{4}{3}\pi q a\ ,\quad \frac{\partial V}{\partial b} = \frac{4}{3}\pi q b\ ,\quad \frac{\partial V}{\partial c} = \frac{4}{3}\pi q c\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = \frac{4}{3}\pi q$$

wird, ist es, welcher zu der obengenannten Ansicht geführt zu haben scheint, daß die Gleichung (79^a) nicht mehr stattfinde, wenn der angegriffene Punkt in der wirkenden Masse selbst enthalten sei, während doch der Ausdruck (79^b) nur in Folge der in dem allgemeinen Werthe von V vorgenommenen Reductionen in Bezug auf e, wodurch dieser der jenem Ausdrucke zu Grunde liegenden Bedingung entrückt wird, zum Vorschein kommt. Denn nehmen wir diesen allgemeinen Werth von V selbst, welcher für alle Lagen des angegriffenen Punktes gültig ist, nämlich

$$V = -\frac{2\pi}{e}\int_{r_0}^{R} dr\,.\,qr\left(r + e - \sqrt{(r-e)^2}\right),$$

und ersetzen den eingeklammerten Factor: $r + e - \sqrt{(r-e)^2}$ wieder durch w, das Aenderungsgesetz desselben in Bezug auf e:

$$\frac{\partial w}{\partial e} = 1 + \frac{r-e}{\sqrt{(r-e)^2}} \quad \text{durch} \quad w'\ ,$$

so finden wir zuerst

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{2\pi a}{e^2}\left[\int_{r_0}^{R} dr\,.\,qr\frac{w}{e} - \int_{r_0}^{R} dr\,.\,qrw'\right],$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{2\pi b}{e^2}\left[\int_{r_0}^{R} dr\,.\,qr\frac{w}{e} - \int_{r_0}^{R} dr\,.\,qrw'\right],$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{2\pi c}{e^2}\left[\int_{r_0}^{R} dr\,.\,qr\frac{w}{e} - \int_{r_0}^{R} dr\,.\,qrw'\right],$$

und diese Ausdrücke kommen wieder auf die obigen Werthe zurück, wenn man wie früher jedes Integral in zwei zerlegt, von denen das erste zwischen den Grenzen R und e, das zweite zwischen den Grenzen e und 0 genommen wird, und beachtet, daß zwischen den beiden ersten

Grenzen $w = 2e$, $w' = 2$, zwischen den beiden letzten dagegen $w = 2r$ und $w' = 0$ ist.

Ferner zieht man daraus mit der Beachtung, daß für alle Fälle $\frac{\partial w'}{\partial e} = 0$ ist, die zweiten Aenderungsgesetze:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = 2\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3a^2}{e^5}\right)\int_{r_0}^{R} dr.qrw - 2\pi\left(\frac{1}{e^2} - \frac{3a^2}{e^4}\right)\int_{r_0}^{R} dr.qrw',$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = 2\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3b^2}{e^5}\right)\int_{r_0}^{R} dr.qrw - 2\pi\left(\frac{1}{e^2} - \frac{3b^2}{e^4}\right)\int_{r_0}^{R} dr.qrw',$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 2\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3c^2}{e^5}\right)\int_{r_0}^{R} dr.qrw - 2\pi\left(\frac{1}{e^2} - \frac{3c^2}{e^4}\right)\int_{r_0}^{R} dr.qrw',$$

deren Summe unabhängig von jedem besondern Werthe von w Null gibt, also auch, wenn der angegriffene Punkt in der Kugelmasse selbst liegt. Diese letztern Ausdrücke lassen sich aber auch durch die vorher genannte Zerlegung nicht mehr auf die frühern besondern Werthe von $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}$ zurückbringen; denn man findet durch dieselbe

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = 2\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3a^2}{e^5}\right)\int_{e}^{R} dr.2qer - 2\pi\left(\frac{1}{e^2} - \frac{3a^2}{e^4}\right)\int_{e}^{R} dr.2qr$$
$$+ 2\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3a^2}{e^5}\right)\int_{0}^{e} dr.2qr^2$$

oder, da die beiden ersten Glieder der rechten Seite gleich sind und sich aufheben, was auch bei den beiden andern Gleichungen der Fall ist,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = 4\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3a^2}{e^5}\right)\int_{0}^{e} dr.qr^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = 4\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3b^2}{e^5}\right)\int_{0}^{e} dr.qr^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c^2} = 4\pi\left(\frac{1}{e^3} - \frac{3c^2}{e^5}\right)\int_{0}^{e} dr.qr^2,$$

und die Summe dieser drei Gleichungen wird immer wieder Null sein. Die Gleichung (79[a]) ist also für alle Lagen des angegriffenen Punktes gültig, wenn die Grenzen der Integrale der Function V unabhängig von den Coordinaten jenes Punktes gehalten werden.

Der besondere Werth: $4\pi q$ des Ausdruckes: $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial c^2}$ für den Fall, daß der angegriffene Punkt in der anziehenden Masse selbst enthalten ist, wurde oben insbesondere für die aus concentrischen Schichten gebildete Kugel gefunden und kann demnach nicht als allgemeiner Werth jener Function für alle Körper gelten, und nicht einmal für eine Kugel mehr, wenn die Dichte nicht blos von r, sondern auch von ϑ und ω abhängt. Es findet jedoch, wie wir bald sehen werden, für ein homogenes Ellipsoid eine ähnliche Beziehung statt.

III. Anziehende Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen materiellen Punkt.

§. 110.

Der allgemeine Ausdruck der Function V:

$$V = -\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{q}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}$$

oder in Polarcoordinaten ausgedrückt

$$V = -\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . \frac{q r^2 \sin\vartheta}{\sqrt{e^2+r^2-2er[\cos\gamma\cos\vartheta+\sin\gamma\sin\vartheta\cos(\varepsilon-\omega)]}}$$

führt selbst für ein constantes q und die einfachsten geometrischen Formen, die Kugel ausgenommen, auf gewöhnlichem Wege zu keinem geschlossenen Ausdrucke, da die aufeinanderfolgenden Integrationen selbst für einen Würfel, bei welchem die Grenzen der Veränderlichen unabhängig von einander sind, nicht ohne Entwickelung in Reihen durchgeführt werden können, und die Schwierigkeiten noch viel größer werden, wenn ein Körper der Untersuchung unterstellt wird, der von einer krummen Fläche begrenzt wird, bei dem also die Grenzen der Veränderlichen gemäß

der Gleichung dieser Fläche in gegenseitiger Abhängigkeit stehen. Auf gleiche Weise verhält es sich mit der Berechnung der Componenten der von einem solchen Körper ausgeübten Wirkung; man ist jedoch für das homogene Ellipsoid durch eine Reihe sehr schöner Entdeckungen zu der vollständigen Auflösung der hier gestellten Aufgabe gelangt, indem man die Werthe jener Componenten für eine besondere Lage des angegriffenen Punktes, nämlich für einen Punkt auf der Oberfläche des Ellipsoids darstellt und mittels sehr merkwürdiger Lehrsätze über die Wirkungen ähnlicher Ellipsoide aus den so erhaltenen Ergebnissen die Wirkung auf einen außerhalb liegenden Punkt ableitet.

Dazu versetzt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den angegriffenen Punkt, legt ihre Achsen parallel zu den Hauptachsen des Ellipsoids und drückt die Lage eines Punktes in demselben durch Polar-Coordinaten aus. Sind also A, B, C die drei Halbachsen des Ellipsoids, demnach

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$$

seine Gleichung auf Mittelpunkt und Achsen bezogen, und wie bisher a, b, c die Coordinaten des angegriffenen Punktes in Bezug auf dasselbe System oder die Coordinaten des Mittelpunktes jenes Körpers in Bezug auf die neuen Coordinaten-Achsen, so erhält man zwischen den obigen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und den Polarcoordinaten r, ω, ϑ in Bezug auf das neue System die Beziehungen:

$$x=a+r\sin\vartheta\cos\omega\ ,\quad y=b+r\sin\vartheta\sin\omega\ ,\quad z=c+r\cos\vartheta\ ,$$

und durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung des Ellipsoids nimmt diese die Form an:

$$\mathfrak{n}r^2+2\mathfrak{p}r=\mathfrak{q}\ , \tag{d.}$$

worin zur Abkürzung

$$\frac{\sin^2\vartheta\cos^2\omega}{A^2}+\frac{\sin^2\vartheta\sin^2\omega}{B^2}+\frac{\cos^2\vartheta}{C^2}=\mathfrak{n}$$

$$\frac{a\sin\vartheta\cos\omega}{A^2}+\frac{b\sin\vartheta\sin\omega}{B^2}+\frac{c\cos\vartheta}{C^2}=\mathfrak{p}$$

$$1-\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}-\frac{c^2}{C^2}=\mathfrak{q}=1-\mathfrak{l}$$

gesetzt wurde. Ferner hat man nun nach §. 101 (78^b) für die drei rechtwinkligen, zu den Hauptachsen parallelen Componenten der anziehenden Wirkung eines homogenen Ellipsoids die Ausdrücke:

$$X = G\mu q\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . \sin^2\vartheta \cos\omega \ ,$$

$$Y = G\mu q\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . \sin^2\vartheta \sin\omega \ ,$$

$$Z = G\mu q\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . \sin\vartheta \cos\vartheta \ ,$$

welche sich sowohl in Bezug auf r wie auf ω zum erstenmal ganz leicht integriren lassen. Da sich aber für die letztere Veränderliche keine einfachen Grenzwerthe aus der obigen Gleichung (d) ergeben, so bleibt man bei der Veränderlichen r stehen und findet zuerst als Grenzwerthe derselben die beiden Wurzeln der genannten Gleichung:

$$-r_{,} = \frac{\mathfrak{p}+\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{n}\mathfrak{q}}}{\mathfrak{n}} \ , \quad -r_0 = \frac{\sqrt{\left(\mathfrak{p}-\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{n}\mathfrak{q}}\right)^2}}{\mathfrak{n}} \ ;$$

damit nehmen dann die Werthe der drei Componenten die Form an:

$$e.) \left\{ \begin{aligned} X &= -G\mu q\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . (r_{,}-r_0)\sin^2\vartheta\cos\omega \ , \\ Y &= -G\mu q\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . (r_{,}-r_0)\sin^2\vartheta\sin\omega \ , \\ Z &= -G\mu q\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . (r_{,}-r_0)\sin\vartheta\cos\vartheta \ . \end{aligned} \right.$$

Je nachdem nun der angegriffene Punkt außerhalb des Ellipsoids oder auf der Oberfläche oder in der Masse desselben liegt, hat man, wie die Mittelpunktsgleichung zeigt,

$$1-\frac{a^2}{A^2}-\frac{b^2}{B^2}-\frac{c^2}{C^2} = \mathfrak{q} < 0 \ , \quad = 0 \ , \quad > 0 \ ,$$

und demnach folgt beziehungsweise

$$\sqrt{p^2+nq} < p \;, \quad = p \;, \quad > p\,;$$

im ersten Falle wird daher

$$r_{\prime} - r_0 = \frac{p+\sqrt{p^2+nq}}{n} - \frac{p-\sqrt{p^2+nq}}{n} = 2\frac{\sqrt{p^2+nq}}{n} \,,$$

im zweiten

$$r_{\prime} - r_0 = \frac{p+\sqrt{p^2}}{n} - \frac{p-\sqrt{p^2}}{n} = \frac{2p}{n}$$

und im dritten

$$r_{\prime} - r_0 = \frac{p+\sqrt{p^2+nq}}{n} - \frac{\sqrt{p^2+nq}-p}{n} = 2\frac{p}{n} \,.$$

Man sieht daraus, daß für die beiden letzten Fälle die obigen Werthe von X, Y, Z rationale Formen erhalten und weiter integrirt werden können, während sie im ersten Falle unter einer irrationalen Form erscheinen, welche der Integration beinahe unübersteigliche Hindernisse entgegensetzt. Man hat jedoch, wie schon bemerkt, Mittel gefunden, die Integration dieser Ausdrücke zu umgehen und die Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen außerhalb liegenden Punkt mittels des zweiten Falles, wo derselbe auf der Umhüllungsfläche desselben liegt, zu bestimmen, so daß die Auflösung der vorliegenden Aufgabe immerhin als vollständig gelöset zu betrachten ist.

§. 111.

Bevor ich jedoch zur Integration der Gleichungen (e) in den beiden letzten Fällen übergehe, wollen wir noch einen andern Fall betrachten, in welchem sich die Wirkung ohne weitere Integration aus den Gleichungen (e) ableiten läßt, nämlich den, wo der angegriffene Punkt im leeren Raume eines hohlen Ellipsoids liegt, dessen beiden Begrenzungsflächen concentrisch und ähnlich sind und auf ähnliche Weise liegen, so daß ihre entsprechenden Achsen der Richtung nach zusammenfallen.

Drückt man nämlich die Gleichung der innern Fläche durch

$$p' r'^2 + 2p' r' = q' \qquad \text{(d'.}$$

aus, indem man die Halbachsen derselben mit A', B', C' bezeichnet und

$$\frac{\sin^2\vartheta'\cos^2\omega'}{A'^2}+\frac{\sin^2\vartheta'\sin^2\omega'}{B'^2}+\frac{\cos^2\vartheta'}{C'^2}=\mathfrak{n}'$$

$$\frac{a\sin\vartheta'\cos\omega'}{A'^2}+\frac{b\sin\vartheta'\sin\omega'}{B'^2}+\frac{c\cos\vartheta'}{C'^2}=\mathfrak{p}'$$

$$1-\frac{a^2}{A'^2}-\frac{b^2}{B'^2}-\frac{c^2}{C'^2}=\mathfrak{q}'=1-\mathfrak{l}'$$

setzt und beachtet, daß man wegen der Aehnlichkeit der beiden begrenzenden Ellipsoide

$$A'=kA\quad,\quad B'=kB\quad,\quad C'=kC$$

hat, wo k einen beliebigen constanten Coeffizient zwischen 0 und 1 bezeichnet, so wird man leicht finden, daß

$$k^2\mathfrak{n}'=\mathfrak{n}\quad,\quad k^2\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}\quad,\quad k^2\mathfrak{l}'=\mathfrak{l}$$

wird, daß also die Wurzeln der Gleichung (d'), ebenfalls negativ genommen, für einen Punkt im Innern des kleinen Ellipsoids die Formen annehmen:

$$r_{,}'=\frac{\mathfrak{p}+\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{n}(k^2-\mathfrak{l})}}{\mathfrak{n}}\quad,\quad r_0'=\frac{\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{n}(k^2-\mathfrak{l})}-\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}},$$

und daß man dadurch unabhängig von k

$$r_{,}'-r_0'=\frac{2\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}}=r_{,}-r_0$$

erhält. Ferner hat man für die zur Achse der z parallele Seitenwirkung

$$Z=-G\mu q\left[\int_{\omega_0}^{\omega}d\omega.\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}d\vartheta.(r_{,}-r_0)\sin\vartheta\cos\vartheta-\int_{\omega_0}^{\omega'}d\omega'.\int_{\vartheta_0}^{\vartheta'}d\vartheta'(r_{,}'-r_0')\sin\vartheta'\cos\vartheta'\right],$$

oder da in unserm Falle die Grenzen für ϑ und ϑ', ω und ω' dieselben sind in beiden Integralen, nämlich 0 und π für jeden dieser Winkel, wonach man ϑ für ϑ', ω für ω' setzen kann,

$$Z=-G\mu q\int_0^{\pi}d\omega.\int_0^{\pi}d\vartheta.\sin\vartheta\cos\vartheta[r_{,}-r_0-(r_{,}'-r_0')]\;;$$

man findet demnach mit dem vorher für den betreffenden Fall erhaltenen

Werthe von $r_, - r_0$ und $r_,' - r_0'$, und indem man dasselbe Verfahren auch auf die beiden andern Componenten anwendet,

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad Z = 0$$

als Werth dieser Seitenkräfte.

Die Wirkung eines von zwei ähnlichen, concentrisch und ähnlich liegenden Flächen begrenzten hohlen Ellipsoids auf einen Punkt, welcher sich irgendwo im hohlen Raume oder auch auf der innern Fläche desselben befindet, ist demnach Null, und der für die hohle Kugel gefundene Satz ist nur ein besonderer Fall von dem eben ausgesprochenen.

Es folgt daraus ferner, wie bei der Kugel, daß die Wirkung eines vollen Ellipsoids auf einen Punkt seiner Masse derjenigen eines concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoids gleich ist, dessen Begrenzungsfläche durch den angegriffenen Punkt gelegt ist, und daß es demnach und zufolge der am Ende des vorigen §. gemachten Bemerkung hinreicht, die Wirkung eines Ellipsoids auf einen Punkt seiner Oberfläche zu kennen, um die Wirkung für jede andere Lage des angegriffenen Punktes bestimmen zu können.

§. 112.

Aus den im vorletzten §. erhaltenen Werthen der Differenz $r_, - r_0$ geht übrigens hervor, daß die Ausdrücke für die Componenten X, Y und Z ganz dieselben sind, ob sich der angegriffene Punkt in der Masse des Ellipsoids oder auf der Oberfläche desselben befindet; sie nehmen in beiden Fällen die Formen an:

$$\left.\begin{aligned} X &= -2G\mu q \int_0^\pi d\omega . \int_0^\pi d\vartheta . \frac{p}{n} \sin^2\vartheta \cos\omega , \\ Y &= -2G\mu q \int_0^\pi d\omega . \int_0^\pi d\vartheta . \frac{p}{n} \sin^2\vartheta \sin\omega , \\ Z &= -2G\mu q \int_0^\pi d\omega . \int_0^\pi d\vartheta . \frac{p}{n} \sin\vartheta \cos\vartheta ; \end{aligned}\right\} \quad (f.$$

denn es ist nicht schwer zu sehen, daß auch in beiden Fällen die Grenzen der Winkel ϑ und ω dieselben sind, nämlich 0 und π, wie oben.

Für den Fall, daß der angegriffene Punkt oder der Anfang der Coordinaten in dem Körper liegt, bedarf dieses keines nähern Nachweises; im andern Falle, wenn er sich auf der Begrenzungsfläche des Ellipsoids befindet, sei die Ellipse MPO, Fig. 81, der Durchschnitt des gegebenen Ellipsoids mit einer Ebene, welche durch die Achse der z gelegt ist und mit der Ebene der xz den Winkel ω bildet, also der Durchschnitt des Ellipsoids mit der Ebene des Winkels ϑ, und TMT' die durch den angegriffenen Punkt M gezogene Tangente dieses Durchschnitts; es ist dann augenscheinlich, daß durch die in den Winkel ZMT fallenden Werthe von ϑ alle Lagen des von M ausgehenden Fahrstrahls r bestimmt werden können, die dem Segmente MZ'O angehören, während die Werthe von ϑ, die zwischen ZMT und ZMZ' liegen, allen möglichen Richtungen jenes Fahrstrahls in dem Segmente MPZ' entsprechen. Es werden demnach sämmtliche Werthe von r, oder $\frac{2\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}}$, da $r_0 = 0$ ist, welche einem gegebenen Winkel ω und seinem Gegenwinkel $\pi + \omega$ zugehören können, durch die zwischen 0 und π liegenden Werthe von ϑ ausgedrückt, woraus dann zugleich folgt, daß es zur Bestimmung aller möglichen Lagen und Werthe des Fahrstrahls r, genügt, wenn auch der Winkel ω zwischen den Grenzen 0 und π genommen wird. Man sieht aber auch daraus, daß man in beiden Fällen den Winkel ϑ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ nehmen kann, wenn ω von 0 bis 2π ausgedehnt wird. Die Werthe der Componenten X, Y, Z können sich mithin in beiden Fällen blos durch die Werthe der Coordinaten a, b, c des angegriffenen Punktes in Bezug auf Mittelpunkt und Achsen des Ellipsoids unterscheiden, ihre allgemeine Form bleibt dieselbe.

Ersetzt man nun in der letzten der Gleichungen (f) die Größe $\mathfrak{p}$ durch ihren Werth, so folgt

$$Z = -2G\mu q\left[\frac{a}{A^2}\int_0^\pi d\omega \,.\int_0^\pi d\vartheta \,.\, \frac{\sin^2\vartheta \cos\vartheta \cos\omega}{\mathfrak{n}} + \frac{b}{B^2}\int_0^\pi d\omega \,.\int_0^\pi d\vartheta \,.\, \frac{\sin^2\vartheta \cos\vartheta \sin\omega}{\mathfrak{n}} + \frac{c}{C^2}\int_0^\pi d\omega \,.\int_0^\pi d\vartheta \,.\, \frac{\sin\vartheta \cos^2\vartheta}{\mathfrak{n}}\right],$$

und wenn man nun in den beiden ersten Gliedern dieses Ausdruckes $\sin\vartheta = x$ setzt und beachtet, daß die Grenzen der Winkel ω und ϑ von einander unabhängig sind und x sowohl für $\vartheta = 0$ wie für $\vartheta = \pi$ Null wird, so können diese Glieder unter die Formen:

$$\int_0^\pi d\omega \,.\, \cos\omega \int_0^0 dx \,.\, f(x^2) \quad , \quad \int_0^\pi d\omega \,.\, \sin\omega \int_0^0 dx \,.\, f(x^2)$$

gebracht werden, worin $f(x^2)$ die mit dem Werthe von n sich ergebende rationale Function:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{C^2} + \left(\frac{\cos^2\omega}{A^2} + \frac{\sin^2\omega}{B^2} - \frac{1}{C^2}\right)x^2}$$

vertritt, und werden demnach nothwendig Null, so daß der Ausdruck für Z auf das dritte Glied allein zurückkommt.

Aehnliche Glieder kommen auch in den Ausdrücken für X und Y vor, und man findet daher, wenn man die Ordnung in der Integration ändert und die Grenzen 2π und 0 für ω, $\frac{1}{2}\pi$ und 0 für ϑ nimmt,

$$\left.\begin{aligned}
Z &= -\,2G\mu q\,\frac{c}{C^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, \sin\vartheta\cos^2\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \frac{1}{n} \\
Y &= -\,2G\mu q\,\frac{b}{B^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, \sin^3\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \frac{\sin^2\omega}{n} \\
X &= -\,2G\mu q\,\frac{a}{A^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, \sin^3\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \frac{\cos^2\omega}{n}
\end{aligned}\right\} \,. \qquad (g.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß jede der drei Componenten der parallelen Coordinate des angegriffenen Punktes proportional ist und demnach denselben Werth behält für alle Punkte, die in einer zu der entsprechenden Achse senkrechten Ebene liegen, daß sich also die Wirkungen eines homogenen Ellipsoids auf zwei Punkte seiner Masse, welche in derselben durch den Mittelpunkt gehenden Geraden liegen, wie deren Abstände vom Mittelpunkte verhalten.

Ferner zieht man aus den vorhergehenden Gleichungen die Summe:

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}=-2G\mu q\int_0^{2\pi} d\omega.\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta.\frac{\sin\vartheta}{n}\left(\frac{\sin^2\vartheta\cos^2\omega}{A^2}+\frac{\sin^2\vartheta\sin^2\omega}{B^2}+\frac{\cos^2\vartheta}{C^2}\right)$$

oder mit Beachtung des Werthes von n und nach ausgeführter Integration

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}=4\pi G\mu q.$$

Betrachtet man endlich die Werthe von $\frac{X}{G\mu}$, $\frac{Y}{G\mu}$, $\frac{Z}{G\mu}$ als erste Aenderungsgesetze einer Function V in Bezug auf die Aenderung der Coordinaten a, b, c, so ist offenbar

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2}=\frac{X}{G\mu a}\quad,\quad\frac{\delta^2 V}{\delta b^2}=\frac{Y}{G\mu b}\quad,\quad\frac{\delta^2 V}{\delta c^2}=\frac{Z}{G\mu c},$$

und demnach ähnlich wie bei der Kugel

$$\frac{\delta^2 V}{\delta a^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta b^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta c^2}=4\pi q;$$

dieser Werth ist aber hier nur für ein constantes q erwiesen, und es folgt aus dem Vorhergehenden durchaus nicht, daß diese angenommene Function V mit der frühern gleichbedeutend ist.

§. 113.

Ich bringe nun den Divisor n in den Gleichungen (g) unter die Form:

$$\left(\frac{\sin^2\vartheta}{A^2}+\frac{\cos^2\vartheta}{C^2}\right)\cos^2\omega+\left(\frac{\sin^2\vartheta}{B^2}+\frac{\cos^2\vartheta}{C^2}\right)\sin^2\omega,$$

oder, C als die kleinste Achse des Ellipsoids vorausgesetzt,

$$\frac{1}{A^2}\left(1+\frac{A^2-C^2}{C^2}\cos^2\vartheta\right)\cos^2\omega+\frac{1}{B^2}\left(1+\frac{B^2-C^2}{C^2}\cos^2\vartheta\right)\sin^2\omega$$

und mache zur Abkürzung zuerst

$$\frac{A^2-C^2}{C^2}=\lambda_1^2\quad,\quad\frac{B^2-C^2}{C^2}=\lambda_2^2$$

und dann für die erste Integration in Bezug auf ω

$$\frac{1}{A^2}(1+\lambda_1^2\cos^2\vartheta)=h\quad,\quad\frac{1}{B^2}(1+\lambda_2^2\cos^2\vartheta)=k;$$

dadurch nimmt der Werth von Z die Form an:

$$Z = 2G\mu q \frac{c}{C^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, \sin\vartheta \cos^2\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega \,.\, \frac{1}{h\cos^2\omega + k\sin^2\omega},$$

und wenn man die Integration in Bezug auf ω ausführt, indem man $\tan g\,\omega = u$ setzt, wodurch

$$\int d\omega \,.\, \frac{\frac{1}{\cos^2\omega}}{h + k\,\tan g^2\omega} = \int du \,.\, \frac{\frac{1}{h}}{1 + \frac{k}{h}u^2} = \frac{\Delta.\text{arctang}:\sqrt{\frac{k}{h}}\tan g\,\omega}{\sqrt{hk}}$$

wird, und beachtet, daß $\text{arc tang}:\sqrt{\frac{k}{h}}\tan g\,\omega$ für $\omega = 0$ auch Null, für $\omega = \frac{1}{2}\pi$ auch $\frac{1}{2}\pi$, für $\omega = \pi$ ebenso π und für $\omega = 2\pi$ demnach auch 2π wird, so erhält man

$$Z = -4\pi G\mu q \frac{c}{C^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{\sqrt{hk}},$$

oder wenn die Werthe von h und k wieder eingeführt werden,

$$Z = -4\pi G\mu q c \frac{AB}{C^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\vartheta \,.\, \frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta}{\sqrt{(1+\lambda_1^2\cos^2\vartheta)(1+\lambda_2^2\cos^2\vartheta)}}.$$

Das Integral dieses Werthes kann, wie man sieht, leicht in eine Function von $\cos\vartheta$ umgewandelt werden; ersetzt man also $\cos\vartheta$ durch die Veränderliche z, deren Grenzen 1 und 0 sind, und bezeichnet die Masse des Ellipsoids durch M, wodurch sich

$$4\pi q AB = 3\frac{M}{C}$$

ergibt, so wird

$$Z = G\mu M \frac{3c}{C^3}\int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2 z^2}\sqrt{1+\lambda_2^2 z^2}}.$$

Die Werthe der beiden andern Componenten X und Y können auf demselben Wege ebenfalls auf einfache Integrale zurückgeführt werden; es ist jedoch einfacher, sie aus dem vorstehenden Werthe von Z nach den Regeln der Symmetrie abzuleiten. Denn wie dieser nur von

der Ordinate c und den drei Achsen abhängt, so wird X nur eine Funktion von a und diesen Achsen sein, von denen nun aber C und A ihre Stellungen gegenseitig vertauschen, gerade so, als wenn der Winkel ϑ, dessen Grenzen immer dieselben bleiben, von der Achse der x aus bis zu dem Fahrstrahl r gemessen und ω in der Ebene der yz genommen würde. Dasselbe läßt sich auch auf den Ausdruck für Y anwenden, und man findet auf diese Weise, wenn

$$\frac{B^2-A^2}{A^2}=\lambda_3^2 \quad , \quad \frac{C^2-A^2}{A^2}=\lambda_4^2$$

$$\frac{A^2-B^2}{B^2}=\lambda_5^2 \quad , \quad \frac{C^2-B^2}{B^2}=\lambda_6^2 \, ,$$

gesetzt, und cos ϑ für die Achsen der x und y zur Unterscheidung beziehungsweise durch die Veränderlichen x und y vorgestellt wird,

$$X=G\mu M\frac{3a}{A^3}\int_0^1 dx\,.\,\frac{x^2}{\sqrt{1+\lambda_3^2x^2}\sqrt{1+\lambda_4^2x^2}}\,,$$

$$Y=G\mu M\frac{3b}{B^3}\int_0^1 dy\,.\,\frac{y^2}{\sqrt{1+\lambda_5^2y^2}\sqrt{1+\lambda_6^2y^2}}\,.$$

Macht man ferner

$$x=\frac{Az}{C\sqrt{1+\lambda_1^2z^2}} \quad , \quad y=\frac{Bz}{C\sqrt{1+\lambda_2^2z^2}}\,,$$

wodurch sich

$$\frac{dx}{dz}=\frac{A}{C\sqrt{(1+\lambda_1^2z^2)^3}} \quad , \quad \frac{dy}{dz}=\frac{B}{C\sqrt{(1+\lambda_2^2z^2)^3}}$$

ergibt, bringt dann die Größen unter den Integralzeichen in den vorstehenden Werthen von X und Y unter die Formen:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\lambda_3^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\lambda_4^2}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\lambda_5^2}\sqrt{\frac{1}{y^2}+\lambda_6^2}}$$

und beachtet, daß

$$\lambda_1^2+\frac{A^2}{C^2}\lambda_3^2=\lambda_2^2 \quad , \quad \lambda_2^2+\frac{B^2}{C^2}\lambda_5^2=\lambda_1^2$$

$$\lambda_1^2+\frac{A^2}{C^2}\lambda_4^2=0 \quad , \quad \lambda_2^2+\frac{B^2}{C^2}\lambda_6^2=0$$

und daß die Grenzen von x und y dieselben sind, wie die von z, so findet man

$$X = G\mu M \frac{3a}{C^3} \int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{\sqrt{(1+\lambda_1^2 z^2)^3}\sqrt{1+\lambda_2^2 z^2}},$$

$$Y = G\mu M \frac{3b}{C^3} \int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2 z^2}\sqrt{(1+\lambda_2^2 z^2)^3}},$$

und man sieht daraus, daß wenn

$$\int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2 z^2}\sqrt{1+\lambda_2^2 z^2}} = L \qquad (80.$$

gesetzt wird, die Integrale in den beiden letzten Ausdrücken sich durch Variation der Constanten λ_1 und λ_2 in den Functionen $\lambda_1 L$ und $\lambda_2 L$ ergeben; denn man hat, wie leicht zu sehen ist,

$$\frac{\delta \lambda_1 L}{\delta \lambda_1} = \int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{\sqrt{(1+\lambda_1^2 z^2)^3}\sqrt{1+\lambda_2^2 z^2}}, \quad \frac{\delta \lambda_2 L}{\delta \lambda_2} = \int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2 z^2}\sqrt{(1+\lambda_2^2 z^2)^3}},$$

und damit können nun die Werthe der Componenten X, Y, Z durch die einfachen Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} Z &= G\mu M \frac{3c}{C^3} L \\ Y &= G\mu M \frac{3b}{C^3} \cdot \frac{\delta \,.\, \lambda_2 L}{\delta \lambda_2} \\ X &= G\mu M \frac{3a}{C^3} \cdot \frac{\delta \,.\, \lambda_1 L}{\delta \lambda_1} \end{aligned}\right\} \qquad (81.$$

vorgestellt werden, so daß nun die weitere Entwickelung dieser Werthe nur noch von der Entwickelung der Function L abhängt.

§. 114.

Die Form dieser Function L zeigt, daß dieselbe im Allgemeinen nur durch Entwickelung einer der beiden Wurzelgrößen des Nenners in eine Reihe integrirt werden kann, und daß sie dann nur einen bestimmten Werth erhält, wenn sich diese Reihe bei einer größern Ausdehnung einem bestimmten Grenzwerthe nähert. In dem besondern Falle dagegen, daß zwei der drei Achsen des Ellipsoids gleich werden, dieses

also ein Umdrehungskörper ist, läßt sich der Werth der Function L in einem geschlossenen Ausdrucke darstellen.

Ist nämlich die kleinere Achse C die geometrische Drehungsachse, also A = B, so wird $\lambda_2 = \lambda_1$, und demnach mit Weglassung des Inder

$$L = \int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{1+\lambda^2 z^2} = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda - \text{arc tang}\,\lambda) \,.$$

In diesem besondern Falle ist dann aber die Ableitung $\frac{\delta \,.\, \lambda L}{\delta \lambda}$ aus dem integrirten Werthe nicht mehr zuläßig; nehmen wir daher den allgemeinen Werth dieses Aenderungsgesetzes, so gibt derselbe für $\lambda_2 = \lambda_1$ den Ausdruck:

$$\int_0^1 dz \,.\, \frac{z^2}{(1+\lambda^2 z^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) ,$$

und man findet damit für die drei Componenten der Wirkung, welche ein an seinen Polen abgeplattetes Ellipsoid auf einen Punkt seiner Oberfläche ausübt, die Werthe:

82.) $$\left\{\begin{aligned} Z &= G\mu M \frac{3c}{C^3\lambda^3}(\lambda - \text{arc tang}\,\lambda) \,, \\ Y &= G\mu M \frac{3b}{2C^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) , \\ X &= G\mu M \frac{3a}{2C^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) . \end{aligned}\right.$$

Soll dagegen die Umdrehungsachse die größere von beiden Achsen der erzeugenden Ellipse sein, so daß das Ellipsoid ein spindelförmiges wird, und nehmen wir die Achse A als diese Umdrehungsachse an, wodurch B = C und $\lambda_2 = 0$ wird, so erhalten wir zuerst

$$L = \int_0^1 dz. \frac{z^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2 z^2}} = \frac{\delta . \lambda_2 L}{\delta . \lambda_2} = \frac{1}{2\lambda_1^3}\left[\lambda_1\sqrt{1+\lambda_1^2} - \text{logn}\left(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}\right)\right] ;$$

daraus folgt sodann

$$\frac{\delta \,.\, \lambda_1 L}{\delta \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1^3}\left[\text{logn}\left(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}\right) - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\right] ,$$

und die Ausdrücke für die drei Seitenwirkungen werden mit Weglassung des Index von λ

$$\left.\begin{aligned} X &= G\mu M \frac{3a}{C^3\lambda^3}\left[\operatorname{logn}\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right] \\ Y &= G\mu M \frac{3b}{2C^3\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2}-\operatorname{logn}\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)\right] \\ Z &= G\mu M \frac{3c}{2C^3\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2}-\operatorname{logn}\left(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}\right)\right] \end{aligned}\right\} . \quad (83.$$

Wird endlich $\lambda = 0$, so geht in beiden Fällen das Ellipsoid in eine Kugel über, und es nehmen dann sowohl die Gleichungen (82) als die Werthe (83) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; sie kommen jedoch durch das gewöhnliche Verfahren, indem man die abgeleiteten Functionen von Zähler und Nenner dieser Ausdrücke in Bezug auf λ nimmt, auf die für die Kugel gefundenen, in §. 109 abgeleiteten Werthe (K) zurück. Denselben Zweck erreicht man übrigens auch durch Entwickelung der Functionen von λ in Reihen nach aufsteigenden Potenzen dieser Größe, wenn man darin nach vorgenommener Reduction λ Null setzt.

§. 115.

Die im vorhergehenden §. für das Umdrehungsellipsoid gefundenen Ausdrücke (82) wollen wir noch für den Fall betrachten, wo dieser Körper von der Kugelgestalt nur sehr wenig abweicht, wo also λ ziemlich klein ist, wie z. B. bei der Erde, wo man das Verhältniß $A:C = 301:300$ hat und sich $\lambda^2 = \frac{A^2 - C^2}{C^2}$ nahezu gleich $\frac{1}{150}$ oder 0,00668 berechnet.

Setzen wir für diesen Fall

$$\operatorname{arc\,tang}\lambda = \lambda - \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{5}\lambda^5$$

und vernachlässigen überall die siebente und die höhern Potenzen von λ*), so lassen sich die obengenannten Werthe für die drei Componenten X, Y, Z auf folgende Ausdrücke zurückführen:

*) Es ist nämlich leicht zu sehen, daß die Annahme: $\operatorname{arc\,tang}\lambda = \lambda - \frac{1}{3}\lambda^3$ für die Werthe von X, Y, Z dasselbe Ergebniß liefern würde, als wenn man $\lambda = 0$ setzt.

$$X=\frac{G\mu M}{C^2}\frac{a}{C}\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right),\ Y=\frac{G\mu M}{C^2}\frac{b}{C}\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right),\ Z=\frac{G\mu M}{C^2}\frac{c}{C}\left(1-\frac{3}{5}\lambda^2\right),$$

und man sieht, daß sich die beiden ersten zu einer einzigen Kraft S vereinigen lassen, welche senkrecht zur Umdrehungsachse gerichtet ist und deren Werth dieselbe Form hat; denn setzt man $\sqrt{a^2+b^2}=r$, wo r den Halbmesser des Parallelkreises bezeichnet, dessen Ebene um die Ordinate c von der Ebene des Aequators entfernt liegt, so ergibt sich

$$S=\frac{G\mu M}{C^2}\frac{r}{C}\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right).$$

Für einen Punkt im Aequator hat man demnach, da hier $c=0$ und $r=A$ ist,

$$S=\frac{G\mu M}{C^2}\frac{A}{C}\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right)\quad,\qquad Z=0\,,$$

und für einen Punkt an einem der beiden Pole, wo $r=0$, $c=C$ ist,

$$S=0\quad,\qquad Z=\frac{G\mu M}{C^2}\left(1-\frac{3}{5}\lambda^2\right).$$

Man zieht daraus für die anziehenden Wirkungen P_0 und $P_{,}$ des Ellipsoids auf einen materiellen Punkt seiner Oberfläche, je nachdem sich derselbe im Aequator oder am Pol befindet, das Verhältniß:

$$P_0:P_{,}=A\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right):C\left(1-\frac{3}{5}\lambda^2\right),$$

oder da $A=C\sqrt{1+\lambda^2}=C(1+\frac{1}{2}\lambda^2)$ ist,

$$P_0:P_{,}=\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right)\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\right):1-\frac{3}{5}\lambda^2$$
$$=1-\frac{7}{10}\lambda^2:1-\frac{6}{10}\lambda^2\,.$$

Darnach müßte also die Intensität der Schwere am Aequator der Erde um $\frac{1}{10}\lambda^2$ oder $\frac{1}{1500}$ kleiner sein als am Pol; die Beobachtungen geben aber, wie im ersten Buche (§. 104) bei der Lehre vom Pendel gezeigt worden ist, für das Verhältniß der anziehenden Wirkungen P_0' und $P_{,}'$ bei bewegter Erde nahezu

$$P_0':P_{,}'=1:1{,}00519\,,$$

und daraus folgt nach Abrechnung der Verminderung der Schwere

durch den von der Achsendrehung herrührenden dynamischen Druck, welcher am Aequator (§. 97 desselben Buches) $\frac{1}{288,5}$ oder 0,00347 von der Schwere beträgt, das Verhältniß der Kräfte P_0 und $P_,$:

$$P_0 : P_, = 1,00347 : 1,00519.$$

oder nahezu

$$P_0 : P_, = 1 : 1,0017 .$$

Die anziehende Kraft der Erde ist folglich am Aequator nahe um $\frac{1}{600}$ oder um $\frac{1}{4}\lambda^2$ kleiner als am Pol, und diese Abweichung von dem obigen Ergebniß der Theorie deutet darauf hin, daß die Erde nicht homogen ist, daß namentlich der äußere Wulst, welcher die durch die Pole gelegte Kugelfläche umgibt, eine geringere Dichte besitzt, als die innerhalb dieser Kugelfläche enthaltene Masse, und daher auch eine verhältnißmäßig kleinere Anziehung ausübt, wodurch die Veränderung in der Intensität der Schwere vom Pol zum Aequator so groß wird, als wenn die Erde $2\frac{1}{4}$ mal stärker abgeplattet wäre.

Für irgend einen Punkt der Oberfläche, dessen zur Umdrehungsachse parallele Ordinate c ist, ergibt sich die Intensität P der Anziehung

$$P = \frac{G\mu M}{C^2}\cdot\frac{1}{C}\sqrt{r^2\left(1-\frac{6}{5}\lambda^2\right)^2 + c^2\left(1-\frac{3}{5}\lambda^2\right)^2}$$

oder da man nach der Gleichung der erzeugenden Ellipse hat

$$\frac{r^2}{A^2}+\frac{c^2}{C^2} = 1 \quad , \quad r^2 = A^2\left(1-\frac{c^2}{C^2}\right) = C^2(1+\lambda^2)\left(1-\frac{c^2}{C^2}\right),$$

nach einigen Reductionen, wobei λ^4 vernachlässigt wird,

$$P = \frac{G\mu M}{C^2}\sqrt{1-\frac{7}{5}\lambda^2+\frac{1}{5}\lambda^2\frac{c^2}{C^2}} = \frac{G\mu M}{C^2}\left(1-\frac{7}{10}\lambda^2+\frac{1}{10}\lambda^2\frac{c^2}{C^2}\right).$$

Auf der Erde drückt man gewöhnlich die Intensität der Schwere in einem Punkte ihrer Oberfläche durch dessen geographische Breite aus, d. h. durch den Winkel β, welchen die Normale in dem betreffenden Punkte mit der Ebene des Aequators bildet. Man findet dann mittels der voranstehenden Gleichung der erzeugenden Ellipse

$$\tang\beta = \frac{A^2 c}{C^2 r} = \frac{c}{r}(1+\lambda^2) = (1+\lambda^2)\tang\omega,$$

und damit ergibt sich nach und nach

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(1+\lambda^2)^2 \tan^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\omega+2\lambda^2\tan^2\omega}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\omega}\sqrt{1+2\lambda^2\sin^2\omega}} = \cos\omega\,(1-\lambda^2\sin^2\omega),$$

$$\sin\beta = \sin\omega\,(1+\lambda^2\cos^2\omega)\,,$$

worin ω den vom Fahrstrahl r mit der Ebene des Aequators gebildeten Winkel bezeichnet. Ferner hat man durch die Gleichung der Ellipse und mit Vernachlässigung der 4ten Potenz von λ

$$r^2\left(\frac{\cos^2\omega}{A^2}+\frac{\sin^2\omega}{C^2}\right)=1,\; r=C\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2\sin^2\omega}}=C\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\cos^2\omega\right),$$

$$\frac{c^2}{C^2}=\frac{c^2}{r^2}\left(1+\frac{1}{2}\lambda^2\cos^2\omega\right)^2=\sin^2\omega\,(1+\lambda^2\cos^2\omega)=\frac{\sin^2\beta}{1+\lambda^2\cos^2\omega},$$

und damit folgt in gleichem Grade der Annäherung

$$P=\frac{G\mu M}{C^2}\left(1-\frac{7}{10}\lambda^2+\frac{1}{10}\lambda^2\sin^2\beta\right),$$

wonach die Zunahme der Intensität der Schwere dem Quadrat des Breitesinus proportional ist.

Endlich kann man noch die anziehende Wirkung des Sphäroids mit derjenigen einer Kugel von gleicher Masse und Dichte vergleichen, deren Halbmesser $r_{,}$ also durch die Bedingung:

$$\frac{4}{3}\pi q r_{,}^3 = \frac{4}{3}\pi q A^2 C \quad , \qquad r_{,}^3 = C^3(1+\lambda^2)$$

bestimmt wird; er ist offenbar kleiner als A und größer als C und gleich dem Fahrstrahl r, für welchen man hat

$$\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2\sin^2\omega}} = \sqrt[3]{1+\lambda^2} \quad \text{oder} \quad \sin^2\omega = \frac{1}{3}\,,$$

so daß die geographische Breite seines Endpunktes oder Parallelkreises durch die Gleichung:

$$\sin^2\beta = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}\lambda^2\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{3}\lambda^2\right)$$

gegeben ist, woraus man als erste Annäherung

$$\sin^2\beta = \frac{1}{3}$$

zieht. Man hat dann ferner

$$C^2 = \frac{r_,^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{r_,^2}{1+\frac{1}{3}\lambda^2}$$

und

$$P = \frac{4}{3}\pi G\mu q r_, \left[1 + \frac{1}{10}\lambda^2\left(\sin^2\beta - \frac{1}{3}\right)\right],$$

woraus folgt, daß für $\sin^2\beta = \frac{1}{3}$, $P = \frac{4}{3}\pi G\mu q r$, wird, daß also für einen Punkt des Parallelkreises, für welchen das Quadrat des Breitesinus $= \frac{1}{3}$ ist, die anziehende Wirkung des Sphäroids nahe dieselbe ist, als wenn die Masse desselben in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Dieser Satz wird sich auch noch auf die Erde anwenden lassen, obgleich sie nicht homogen ist, da die Veränderung der Schwere doch nur ein sehr kleiner Theil der mittleren Intensität dieser Kraft ist.

§. 116.

Wenden wir uns nun zu der Untersuchung des ersten der in §. 110 genannten Fälle, nämlich desjenigen, wo die Wirkung eines homogenen Ellipsoids auf einen außerhalb liegenden materiellen Punkt zu bestimmen ist.

Nehmen wir dazu die ursprünglichen Werthe (69) in §. 99 der drei Componenten X, Y, Z und beachten, daß sich aus dem Werthe von w

$$w = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{a-x}{w}, \quad \frac{dw}{dy} = -\frac{b-y}{w}, \quad \frac{dw}{dz} = -\frac{c-z}{w}$$

ergeben, so können wir dieselben unter die Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}
X &= -G\mu\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.\int_{w_{x_0}}^{w_x} dw.qf(w) \\
Y &= -G\mu\int_{x_0}^{x} dx.\int_{z_0}^{z} dz.\int_{w_{y_0}}^{w_y} dw.qf(w) \\
Z &= -G\mu\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{w_{z_0}}^{w_z} dw.qf(w)
\end{aligned}\right\},$$

worin w_x und w_{x_0} die Grenzen von w bedeuten, die den Grenzen x und x_0 von x entsprechen, w_y und w_{y_0} die Grenzwerthe für $y = y$ und $y = y_0$, und w_z, w_{z_0} die Werthe jener Veränderlichen für die Grenzen z und z_0 von z, wobei jedesmal die beiden andern Veränderlichen constant bleiben. Führt man dann die Integrationen in Bezug auf w aus und bezeichnet den Werth von $\int dw.f(w)$ durch $\Delta.F(w)$, so erhält man für einen homogenen Körper

$$\text{h.)} \quad \begin{cases} X = G\mu q\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.[F(w_{x_0}) - F(w_x)] \\ Y = G\mu q\int_{x_0}^{x} dx.\int_{z_0}^{z} dz.[F(w_{y_0}) - F(w_y)] \\ Z = G\mu q\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.[F(w_{z_0}) - F(w_z)] \end{cases}$$

und man sieht daraus, daß in unserm Falle, wo die Gleichung der begrenzenden Fläche des Ellipsoids, nämlich

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

ganz symmetrisch ist in Bezug auf die drei Veränderlichen, die zu den Achsen der y und z parallelen Kräfte Y und Z aus dem Werthe von X durch entsprechende Vertauschung der Halbachsen A, B, C gefunden werden können.

Ich beschäftige mich deßhalb vorerst mit der ersten der Gleichungen (h) allein und setze in derselben

$$x = Ax', \quad y = By', \quad z = Cz',$$

so daß die Gleichung des Ellipsoids die einfache Form:

$$\text{i.)} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

annimmt, und die genannte Gleichung wird

$$X = G\mu qBC\int_{y_0'}^{y'} dy'.\int_{z_0'}^{z'} dz'.[F(w_{x_0}) - F(w_x)].$$

Als Grenzwerthe von w findet man dadurch, und da $x_0 = -x$ ist,

$$w_x^2 = (a - Ax')^2 + (b - By')^2 + (c - Cz')^2 \ ,$$
$$w_{x_0}^2 = (a + Ax')^2 + (b - By')^2 + (c - Cz')^2 \ ,$$

worin noch der Grenzwerth von x' in Function von y' und z', nämlich

$$x' = \sqrt{1 - y'^2 - z'^2}$$

einzuführen wäre, wenn die Integration weiter fortgesetzt werden sollte, was indessen für den gewöhnlichen Fall: $f(w) = \frac{1}{w^2}$ auf directem und einfachem Wege nicht möglich, für unsern Zweck übrigens auch nicht nothwendig ist.

Für ein anderes homogenes Ellipsoid, dessen Halbachsen A', B', C' sind, dessen Gleichung demnach die Formen:

$$\frac{x^2}{A'^2} + \frac{y^2}{B'^2} + \frac{z^2}{C'^2} = 1 \quad , \qquad x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1$$

erhält, worin $x'' = \frac{x}{A'}$, u. s. f. ist und welches dieselbe Dichte q besitzt, wie das gegebene, hat man als Werth der zur Achse der x parallelen Componenten X' seiner anziehenden Wirkung auf einen Punkt, dessen Coordinaten a', b', c' sind und dessen Masse ebenfalls μ ist, den Ausdruck:

$$X' = G\mu q B' C' \int_{y_0''}^{y''} dy'' . \int_{z_0''}^{z''} dz'' . [F(w_{x_0}') - F(w_x')]$$

und zur Bestimmung der beiden Grenzwerthe w_x' und w_{x_0}', welche den Grenzen x und x_0 von x entsprechen, die Gleichungen:

$$w_x'^2 = (a' - A'x'')^2 + (b' - B'y'')^2 + (c' - C'z'')^2 \ ,$$
$$w_{x_0}'^2 = (a' + A'x'')^2 + (b' - B'y'')^2 + (c' - C'z'')^2 \ ,$$

worin x'' selbst noch durch $\sqrt{1 - y''^2 - z''^2}$ zu ersetzen ist.

Ich nehme nun das zweite Ellipsoid so an, daß es mit dem ersten gegebenen den Mittelpunkt und die Brennpunkte gemeinschaftlich hat und durch den angegriffenen Punkt $a b c$ geht, so daß man hat

$$\frac{a^2}{A'^2} + \frac{b^2}{B'^2} + \frac{c^2}{C'^2} = 1 \ . \qquad (k.$$

Bezeichnet man dann die absoluten Excentrizitäten zweier Hauptschnitte der beiden Ellipsoide mit den Ebenen der xy und der xz mit E_1 und E_2, so hat man auch

$$B^2 = A^2 - E_1^2 \quad , \quad B'^2 = A'^2 - E_1^2$$
$$C^2 = A^2 - E_2^2 \quad , \quad C'^2 = A'^2 - E_2^2$$

und folglich

$$\text{l.)} \qquad B'^2 - B^2 = C'^2 - C^2 = A'^2 - A^2 \,.$$

Ferner nehme man an, daß der von dem zweiten Ellipsoid angegriffene Punkt $a'b'c'$ auf der Oberfläche des ersten liege und zwar so, daß seine Coordinaten durch die Beziehungen:

$$\text{m.)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a' : a = A : A' \\ b' : b = B : B' \\ c' : c = C : C' \end{array} \right.$$

bestimmt werden, daß sich also die Coordinaten der beiden angegriffenen Punkte wie die dazu parallelen Achsen der anziehenden Ellipsoide verhalten, oder daß die beiden angegriffenen Punkte entsprechende Punkte der Begrenzungsflächen dieser Körper sind.

Beachtet man dann, daß die Gleichungen der beiden Ellipsoide mit den Veränderlichen x', y', z' und x'', y'', z'' ganz identisch sind, daß ebenso die Grenzen dieser Veränderlichen dieselben Werthe haben, nämlich für x' und x'' die bereits angegebenen, für z' und z'' bei der zweiten Integration $\pm\sqrt{1-y'^2}$ und $\pm\sqrt{1-y''^2}$ und für y' und y'' bei der letzten Integration ± 1, so wird man einsehen, daß in dem Werthe von X' die Veränderlichen x', y', z' statt der Veränderlichen x'', y'', z'' gesetzt werden können, wodurch nun die Werthe von w_x^2 und $w_x'^2$ mit Beachtung der aus den Proportionen (m) sich ergebenden Werthe von a', b', c' und $a'A'$, $b'B'$, $c'C'$ die Formen annehmen:

$$w_x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(aAx' + bBy' + cCz') + A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2 ,$$

$$w_x'^2 = a^2\frac{A^2}{A'^2} + b^2\frac{B^2}{B'^2} + c^2\frac{C^2}{C'^2} - 2(aAx' + bBy' + cCz')$$
$$+ A'^2x'^2 + B'^2y'^2 + C'^2z'^2 \,.$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke gibt demnach mit Berücksichtigung der Gleichungen (l)

$$w_x^2 - w_x'^2 = (A'^2 - A^2)\left[\frac{a^2}{A'^2} + \frac{b^2}{B'^2} + \frac{c^2}{C'^2} - (x'^2 + y'^2 + z'^2)\right]$$

und zufolge der Gleichungen (i) und (k)

$$w_x^2 - w_x'^2 = 0 \quad , \qquad w_x = w_x' \,;$$

unabhängig von jedem besondern Werthe von A und A'. Auf gleichem Wege ergibt sich $w_{x_0} = w_{x_0}'$, also auch

$$F(w_x') = F(w_x) \quad , \quad F(w_{x_0}') = F(w_{x_0})$$

und folglich

$$\int_{y_0}^{y'} dy' . \int_{z'_0}^{z'} dz' . [F(w_x) - F(w_{x_0})] = \int_{y_0''}^{y''} dy'' . \int_{z_0''}^{z''} dz'' . [F(w_x') - F(w_{x_0}')] .$$

Bezeichnet man also den Werth dieser Integrale zur Abkürzung mit J, so findet man

$$X = G\mu q BC . J \quad , \quad X' = G\mu q B'C' . J$$

und demnach für jede beliebige Function $f(w)$ von w

$$X : X' = BC : B'C' .$$

Für die beiden andern Componenten hat man dann zufolge der obengemachten Bemerkung in Betreff der Symmetrie ihrer Werthe

$$Y : Y' = AC : A'C',$$

$$Z : Z' = AB : A'B',$$

und diese drei Proportionen drücken den merkwürdigen Satz aus, daß die anziehenden Wirkungen, welche zwei homogene Ellipsoide von gleicher Dichte und mit gemeinschaftlichen Mittel- und Brennpunkten gegenseitig auf zwei entsprechende Punkte ihrer Oberflächen parallel zu einer der Achsen ausüben, sich wie die Producte der beiden andern Achsen oder wie die Flächeninhalte der zu jener Achse senkrechten Hauptschnitte verhalten, und zwar bei jedem beliebigen Gesetze der gegenseitigen Anziehung zweier materiellen Punkte.

§. 117.

Bezeichnen wir nun weiter mit X'', Y'', Z'' die drei Componenten der anziehenden Wirkung, welche von dem zweiten Ellipsoid auf den in seiner Begrenzungsfläche liegenden Punkt abc ausgeübt wird; es verhalten sich dann nach §. 112 (g) für den Fall $f(w) = \frac{1}{w^2}$ die Seitenwirkungen X'', Y'', Z'' und X', Y', Z' dieses Körpers auf die beiden Punkte abc und a'b'c' wie die parallelen Coordinaten derselben, stehen also wie diese Coordinaten selbst im umgekehrten Verhältnisse

der parallelen Achsen der beiden Ellipsoide, auf denen sie liegen; man hat daher

$$\left\{\begin{array}{l} X' : X'' = a' : a = A : A' , \\ Y' : Y'' = b' : b = B : B' , \\ Z' : Z'' = c' : c = C : C' , \end{array}\right.$$

und wenn man diese drei Proportionen Glied für Glied mit denen des vorigen §. multiplicirt, so folgt

$$\text{n.)} \quad X : X'' = Y : Y'' = Z : Z'' = ABC : A'B'C' = M : M' .$$

Man schließt daraus, daß die Wirkungen der beiden Ellipsoide auf den Punkt abc, der auf der Oberfläche des zweiten liegt, in demselben Verhältnisse stehen, wie die Producte der drei Achsen oder wie die Massen M und M' jener Körper.

Nehmen wir endlich noch ein drittes homogenes Ellipsoid von gleicher Dichte, wie die vorigen, welches mit diesen beiden ebenfalls Mittelpunkt und Brennpunkte gemeinschaftlich hat, dessen Halbachsen $A_,$, $B_,$, $C_,$ seien und dessen Wirkung auf den Punkt abc durch die rechtwinkligen Componenten $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ ausgedrückt wird, so haben wir in gleicher Weise wie vorher

$$X_, : X'' = Y_, : Y'' = Z_, : Z'' = A_,B_,C_, : A'B'C' = M_, : M' ,$$

und die Vergleichung dieser fortlaufenden Proportion mit der vorhergehenden (n) gibt die neue:

$$X : X_, = Y : Y_, = Z : Z_, = ABC : A_,B_,C_, = M : M_, .$$

Es geht daraus der ebenfalls bemerkenswerthe Satz hervor, daß die Wirkungen, welche von irgend zwei gleich dichten und homogenen Ellipsoiden mit gemeinschaftlichen Mittel- und Brennpunkten auf denselben außerhalb ihrer Masse liegenden Punkt ausgeübt werden, in demselben Verhältnisse stehen, wie die Massen dieser Körper, wobei jedoch nicht zu übersehen ist, daß dieser Satz nicht wie der vorhergehende für jedes Gesetz der Anziehung gilt, sondern nur für das in der Natur stattfindende bewiesen ist.

§. 118.

Der durch die fortlaufende Proportion (n) ausgedrückte Satz führt uns nun zur Auflösung unserer Aufgabe. Denn die in §. 113 gefundenen allgemeinen Ausdrücke (80) und (81) geben für die Werthe der Seitenkräfte X″, Y″, Z″, welche die Wirkung eines Ellipsoids, dessen Achsen A′ B′ C′ sind, auf einen Punkt a b c seiner Oberfläche vorstellen, indem man für die Größen λ_1 und λ_2 ihre jetzigen Werthe:

$$\lambda_1^2 = \frac{A'^2 - C'^2}{C'^2} \quad , \qquad \lambda_2^2 = \frac{B'^2 - C'^2}{C'^2}$$

einführt, die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
X'' &= G\mu M' \frac{3a}{C'^3} \int_0^1 dz' . \frac{z'^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{A'^2 - C'^2}{C'^2} z'^2\right)^3} \sqrt{1 + \frac{B'^2 - C'^2}{C'^2} z'^2}} \\
Y'' &= G\mu M' \frac{3b}{C'^3} \int_0^1 dz' . \frac{z'^2}{\sqrt{1 + \frac{A'^2 - C'^2}{C'^2} z'^2} \sqrt{\left(1 + \frac{B'^2 - C'^2}{C'^2} z'^2\right)^3}} \\
Z'' &= G\mu M' \frac{3c}{C'^3} \int_0^1 dz' . \frac{z'^2}{\sqrt{1 + \frac{A'^2 - C'^2}{C'^2} z'^2} \sqrt{1 + \frac{B'^2 - C'^2}{C'^2} z'^2}}
\end{aligned}\right\}.$$

Macht man dann $\frac{z'}{C'} = \frac{z}{C}$, woraus sich $z = 0$ für $z' = 0$, $z = \frac{C}{C'}$ für $z' = 1$ ergibt, beachtet die Gleichungen (1) unter der Form:

$$A'^2 - C'^2 = A^2 - C^2 \quad , \qquad B'^2 - C'^2 = B^2 - C^2$$

und multiplicirt jeden der drei vorhergehenden Ausdrücke mit $\frac{M}{M'}$, so findet man zufolge der Proportionen (n) und indem man wieder

$$\frac{A^2 - C^2}{C^2} \text{ durch } \lambda_1^2 \quad , \qquad \frac{B^2 - C^2}{C^2} \text{ durch } \lambda_2^2$$

ersetzt, die Ausdrücke:

$$84.)\quad \begin{cases} X = G\mu M \dfrac{3a}{C^3}\displaystyle\int_0^{\frac{C}{C'}} dz\,.\,\frac{z^2}{\sqrt{(1+\lambda_1^2 z^2)^3}\,\sqrt{1+\lambda_2^2 z^2}}\,, \\ Y = G\mu M \dfrac{3b}{C^3}\displaystyle\int_0^{\frac{C}{C'}} dz\,.\,\frac{z^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2 z^2}\,.\sqrt{(1+\lambda_2^2 z^2)^3}}\,, \\ Z = G\mu M \dfrac{3c}{C^3}\displaystyle\int_0^{\frac{C}{C'}} dz\,.\,\frac{z^2}{\sqrt{1+\lambda_1^2 z^2}\,\sqrt{1+\lambda_2^2 z^2}}\,, \end{cases}$$

oder wenn man den Werth des letzten Integrals mit L' bezeichnet, wie früher die Ausdrücke:

$$85.)\quad \begin{cases} Z = G\mu M \dfrac{3c}{C^3} L' \\ Y = G\mu M \dfrac{3b}{C^3}\,.\,\dfrac{\delta\,.\,\lambda_2 L'}{\delta\lambda_2} \\ X = G\mu M \dfrac{3a}{C^3}\,.\,\dfrac{\delta\,.\,\lambda_1 L'}{\delta\lambda_1} \end{cases}$$

als Werthe der drei Seitenwirkungen X, Y, Z des gegebenen Ellipsoids auf den gegebenen außerhalb liegenden Punkt.

Die vollständige Auflösung der Aufgabe hängt demnach noch von der Bestimmung der Achse C' ab, und diese erfolgt aus der Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{a^2}{C'^2 + A^2 - C^2} + \frac{b^2}{C'^2 + B^2 - C^2} + \frac{c^2}{C'^2} = 1\,,$$

welche mit der Gleichung (k) gleichbedeutend ist. Diese Gleichung ist in Bezug auf C'^2 vom dritten Grade und gibt für diese Größe jedenfalls eine positive Wurzel, da ihre linke Seite, wenn sie auf Null gebracht ist, zwischen $C'^2 = 0$ und $C'^2 = \infty$ das Zeichen wechselt, und wie leicht zu sehen, auch nur eine; die negativen Wurzeln geben natürlich imaginäre Werthe für C', die keinem Ellipsoid angehören können.

Liegt der angegriffene Punkt wieder auf der Oberfläche des gegebenen

Ellipsoids, so hat man $C' = C$, $\frac{C}{C'} = 1$, also $L' = L$, und die Gleichungen (85) gehen wieder in die Ausdrücke (81) über.

§. 119.

Aus den vorhergehenden Ergebnissen ist nun in Betreff der beiden Umdrehungs-Ellipsoide leicht zu schließen, daß die entsprechenden Ausdrücke für die drei Componenten ihrer anziehenden Wirkung auf einen außerhalb liegenden Punkt aus den für einen Punkt auf der Oberfläche gefundenen Werthen (82) und (83) einfach dadurch hervorgehen, daß man daselbst in den eingeklammerten Factoren $\frac{C}{C'}\lambda$ statt λ setzt. Denn macht man in unsern zuletzt erhaltenen Gleichungen (84), nachdem man entweder $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$ oder $\lambda_2 = 0$ angenommen hat, je nachdem die Achse C oder die Achse A die Umdrehungsachse ist, $\lambda z = u$, so werden die Grenzen von u offenbar 0 und $\lambda \frac{C}{C'}$, und man erhält im ersten Falle

$$Z = G\mu M \frac{3c}{C^3\lambda^3}\int_0^{\frac{C}{C'}\lambda} du . \frac{u^2}{1+u^2},$$

im zweiten

$$Z = G\mu M \frac{3c}{C^3\lambda^3}\int_0^{\frac{C}{C'}\lambda} du . \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Für ein abgeplattetes Sphäroid nehmen demnach die Werthe der drei Seitenwirkungen auf einen außerhalb liegenden Punkt die Formen an:

$$\left.\begin{aligned} X &= G\mu M \frac{3a}{2C^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\frac{C\lambda}{C'} - \frac{CC'\lambda}{C'^2 + C^2\lambda^2}\right) \\ Y &= G\mu M \frac{3b}{2C^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\frac{C\lambda}{C'} - \frac{CC'\lambda}{C'^2 + C^2\lambda^2}\right) \\ Z &= G\mu M \frac{3c}{C^3\lambda^3}\left(\frac{C\lambda}{C'} - \text{arc tang}\frac{C\lambda}{C'}\right) \end{aligned}\right\}, \quad (86.$$

und für ein spindelförmiges Umdrehungsellipsoid werden sie

$$87.)\left\{\begin{aligned}
X&=G\mu M\frac{3a}{C^3\lambda^3}\left[\log n\left(\frac{C\lambda}{C'}+\sqrt{1+\frac{C^2\lambda^2}{C'^2}}\right)-\frac{\frac{C\lambda}{C'}}{\sqrt{1+\frac{C^2\lambda^2}{C'^2}}}\right],\\
Y&=G\mu M\frac{3b}{2C^3\lambda^3}\left[\frac{C\lambda}{C'}\sqrt{1+\frac{C^2\lambda^2}{C'^2}}-\log n\left(\frac{C\lambda}{C'}+\sqrt{1+\frac{C^2\lambda^2}{C'^2}}\right)\right],\\
Z&=G\mu M\frac{3c}{2C^3\lambda^3}\left[\frac{C\lambda}{C'}\sqrt{1+\frac{C^2\lambda^2}{C'^2}}-\log n\left(\frac{C\lambda}{C'}+\sqrt{1+\frac{C^2\lambda^2}{C'^2}}\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

Der Werth von C' wird für den ersten Körper durch die Gleichung:

$$\frac{a^2+b^2}{C'^2+A^2-C^2}+\frac{c^2}{C'^2}=1 \text{ oder } C'^4-C'^2(e^2-E^2)-E^2c^2=0$$

gegeben, für den zweiten Körper dagegen aus der Gleichung:

$$\frac{a^2}{C'^2+A^2-C^2}+\frac{b^2+c^2}{C'^2}=1 \text{ oder } C'^4-(e^2-E^2)-E^2(b^2+c^2)=0$$

gezogen, welche wie die erstere nur noch vom zweiten Grade in Bezug auf C'^2 ist und worin $a^2+b^2+c^2$ durch e^2, A^2-C^2 durch E^2 ersetzt wurde.

Wird $A=C=R$, $E=0$, so gehen beide Körper in die Kugelgestalt über, und die vorhergehenden Gleichungen geben

$$C'=e \quad , \quad C'=0\,;$$

die Werthe der Componenten X, Y, Z dagegen nehmen wieder die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, und man findet auf die obenbemerkte Weise und mit dem Werthe $C'=e$ in beiden Fällen für die Resultirende derselben den in §. 107 für die Kugel erhaltenen Ausdruck wieder.

Der zweite Werth $C'=0$ macht nach demselben Verfahren die Werthe von X, Y, Z unendlich; sucht man aber den wahren Werth von $\frac{\lambda^2}{C'^2}$, welcher für unsern Fall sich unter der Form $\frac{0}{0}$ zeigt, indem man $\frac{E^2}{C^2}$ für λ^2 und für C^2 die Wurzel:

$$C'^2 = \frac{e^2 - E^2 - \sqrt{(e^2 - E^2)^2 + 4E^2 c^2}}{2}$$

der ersten der obigen Gleichungen einführt, welche auch die entsprechende Wurzel der zweiten der Form nach vertreten kann, nimmt dann das Aenderungsgesetz vom Zähler und Nenner des dadurch entstehenden Bruches:

$$\frac{\lambda^2}{C'^2} = \frac{2E^2}{C^2\left[e^2 - E^2 - \sqrt{(e^2 - E^2)^2 + 4E^2 c^2}\right]}$$

in Bezug auf E als Veränderliche und setzt endlich $E = 0$, so findet man für beide Ellipsoide

$$\frac{\lambda^2}{C'^2} \text{ entweder } = -\frac{2}{C^2 c^2} \quad , \quad \text{oder } = -\frac{2}{C^2 (b^2 + c^2)},$$

und es wird demnach $\frac{\lambda}{C'}$ in jedem Falle imaginär.

§. 120.

Die vorausgegangenen Erörterungen schließe ich mit einer bemerkenswerthen Folgerung, welche aus dem am Ende des §. 116 ausgesprochenen Satze in Bezug auf die anziehende Wirkung zweier concentrischen Kugeln gezogen werden kann.

Bezeichnen wir nämlich diese Kugeln mit K und k, ihre Halbmesser mit R und r, die Wirkung der ersten größern auf einen Punkt in der Oberfläche der zweiten kleinern mit P, die Wirkung der zweiten auf einen Punkt in der Oberfläche der erstern mit p, so haben wir unter der Voraussetzung, daß beide Kugeln homogen sind und gleiche Dichte haben, nach dem angeführten Satze

$$P : p = R^2 : r^2 ,$$

d. h. die genannten Wirkungen verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder wie die Oberflächen der beiden Kugeln.

Aus dieser Proportion zieht man die Gleichungen:

$$P = p\frac{R^2}{r^2} \quad , \quad p = P\frac{r^2}{R^2},$$

durch welche die Intensität der Wirkung einer Kugel auf einen außerhalb liegenden Punkt bestimmt werden kann, wenn die auf einen im

Innern liegenden bekannt ist, und umgekehrt, und zwar für jedes beliebige Gesetz der Anziehung.

Sollen z. B. diese Wirkungen unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß die Wirkung einer Kugel auf einen im Innern liegenden Punkt von dem Halbmesser R der Kugel unabhängig sei, so wird P nur eine Function des Abstandes r des angegriffenen Punktes von dem Mittelpunkte der Kugel sein und demnach diese anziehende Kraft durch

$$P = G\mu\varphi(r)$$

ausgedrückt werden, worin $\varphi(r)$ irgend eine Function von r bezeichnet. Ebenso wird die Wirkung P′ einer andern Kugel, deren Halbmesser R′ größer als R ist, auf einen Punkt in der Entfernung r von ihrem Mittelpunkte in derselben Voraussetzung durch $G\mu\varphi(r)$ gemessen werden, also $P' = P$ sein. Die Wirkung der Kugelschale, welche von dieser letzteren Kugel übrig bleibt, wenn die erstere weggenommen wird, und in deren hohlem Raume sich dann der angegriffene Punkt befindet, ist aber offenbar auch dem Unterschiede der Wirkungen beider Kugeln gleich; diese Wirkung ist folglich nach unserer Voraussetzung immer Null.

Nach dem obigen Satze erhält man ferner für die Wirkung p der Kugel k vom Halbmesser r auf einen Punkt außerhalb derselben in der Entfernung R vom Mittelpunkte den Werth:

$$p = G\mu\varphi(r)\frac{r^2}{R^2};$$

bezeichnet man dann die Masse der Kugel vom Halbmesser r mit m und die Entfernung des Mittelpunktes der Anziehung dieser Masse von dem angegriffenen Punkte, wie früher, mit $\mathfrak{w}_{,}$, so hat man jedenfalls auch

$$p = G\mu m f(\mathfrak{w}_{,}),$$

worin die Function $f(\mathfrak{w}_{,})$ wieder das Gesetz der Anziehung zweier materiellen Punkte ausdrückt. Die Vergleichung dieser beiden Werthe von p gibt

$$m f(\mathfrak{w}_{,}) R^2 = r^2\varphi(r)$$

oder, da $m = \frac{4}{3}\pi q r^3$ ist und demnach $\frac{r^2\varphi(r)}{m} = \psi(r)$ gesetzt werden kann,

$$f(\mathfrak{w}_{,}) = \frac{\psi(r)}{R^2}.$$

Aus diesem Ausdrucke läßt sich aber die Form der Function $f(w_{,})$ oder das Gesetz der gegenseitigen Anziehung nicht bestimmen. Setzen wir deßhalb noch die Bedingung, daß der Mittelpunkt der Kugel zugleich Mittelpunkt der Anziehung, daß also $w_{,} = R$ sei, so hat man

$$f(w_{,}) = f(R) = \frac{\psi(r)}{R^2},$$

und da man immer $f(1) = 1$ haben muß, so folgt

$$\psi(r) = 1 \quad , \quad f(R) = \frac{1}{R^2} \quad , \quad \varphi(r) = \frac{4}{3}\pi q r \, ,$$

und damit erhält man

$$P = G\mu m \frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\mu q r \quad , \quad p = G\mu m \frac{1}{R^2} \, .$$

Das Gesetz der Natur ist demnach das einzige, nach welchem gleichzeitig der Mittelpunkt einer homogenen Kugel Mittelpunkt der Anziehung und die Wirkung einer homogenen Kugelschale auf einen in ihrem hohlen Raume befindlichen Punkt Null ist.

IV. Gegenseitige Wirkung zweier stetigen Systeme.

§. 121.

Bezeichnen wir wieder, wie früher (§. 98) die Coordinaten eines Punktes des angreifenden Körpers mit x, y, z in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt vorerst beliebig angenommen werden kann, und mit t, u, v die Coordinaten eines Punktes in dem angegriffenen Körper in Bezug auf dieselben Achsen, so erhalten wir nach dem Vorhergehenden (§. 99) für die drei rechtwinkligen Componenten $P\cos\widehat{Px}$, $P\cos\widehat{Py}$, $P\cos\widehat{Pz}$ der von dem ersten System oder Körper auf den materiellen Punkt tuv des zweiten ausgeübten Wirkung P, wenn die Masse dieses letztern Punktes einstweilen wieder durch μ und das Gesetz der gegenseitigen Anziehung zweier Punkte durch $f(w)$ vorgestellt wird, die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned}
P\cos\widehat{Px} &= G\mu\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.\,q_1\,\frac{t-x}{w}\,f(w)\,,\\
P\cos\widehat{Py} &= G\mu\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.\,q_1\,\frac{u-y}{w}\,f(w)\,,\\
P\cos\widehat{Pz} &= G\mu\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.\,q_1\,\frac{v-z}{w}\,f(w)\,,
\end{aligned}\right.$$

in welchen q_1 die Dichte in dem Punkte xyz des wirkenden Systems vorstellt und als eine Function der Veränderlichen x, y, z zu betrachten ist. Diese Wirkung P kann nun wieder in eine fördernde Wirkung P von gleicher Intensität und Richtung zerlegt werden, von welcher die vorstehenden Werthe demnach ebenfalls die rechtwinkligen Componenten ausdrücken, und in ein Moment M_P, dessen rechtwinkliche Componenten M_X, M_Y, M_Z wieder die bekannten Werthe:

$$M_Z = t\,.\,P\cos\widehat{Py} - u\,.\,P\cos\widehat{Px}$$

$$M_Y = v\,.\,P\cos\widehat{Px} - t\,.\,P\cos\widehat{Pz}$$

$$M_X = u\,.\,P\cos\widehat{Pz} - v\,.\,P\cos\widehat{Py}$$

erhalten werden, die mit Berücksichtigung der obigen Gleichungen die Formen annehmen:

$$\left\{\begin{aligned}
M_Z &= G\mu\left[t\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.q_1\frac{u-y}{w}f(w) - u\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.q_1\frac{t-x}{w}f(w)\right],\\
M_Y &= G\mu\left[v\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.q_1\frac{t-x}{w}f(w) - t\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.q_1\frac{v-z}{w}f(w)\right],\\
M_X &= G\mu\left[u\int_{x_0}^{x} dv.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.q_1\frac{v-z}{w}f(w) - v\int_{x_0}^{x} dx.\int_{y_0}^{y} dy.\int_{z_0}^{z} dz.q_1\frac{u-y}{w}f(w)\right].
\end{aligned}\right.$$

Beachtet man nun, daß nach den bisherigen Ergebnissen die Werthe für die Componenten der Wirkung eines Punktes auf einen andern zugleich die Aenderungsgesetze der Seitenwirkungen ausdrücken, welche von einem stetigen Systeme auf einen Punkt ausgeübt werden, wenn man darin statt der Masse m des wirkenden Punktes das Aenderungsgesetz der Masse des wirkenden Körpers in Bezug auf die Aen-

derung der Grenzen des letztern einführt, so wird man daraus ohne besondere Ableitung schließen, daß die vorhergehenden Ausdrücke ebenso die Aenderungsgesetze der förbernden und drehenden Componenten der von dem ersten Systeme auf das zweite ausgeübten Wirkungen in Bezug auf die Aenderung der Grenzen dieses Systems vorstellen, wenn darin statt der Masse μ das Aenderungsgesetz der Masse des zweiten oder angegriffenen Systems gesetzt wird. Bezeichnen wir also diese Componenten der Reihe nach mit $\Sigma . P \cos \widehat{Px}$, etc., $\Sigma . M_x$, etc., die Masse des letztern Körpers mit M_2, seine Dichte in dem Punkte tuv mit q_2, so erhalten wir für die erstern

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^3 . \Sigma . P \cos \widehat{Px}}{dt\,du\,dv} &= G \frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{t-x}{w} f(w) \\
\frac{d^3 . \Sigma . P \cos \widehat{Py}}{dt\,du\,dv} &= G \frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{u-y}{w} f(w) \\
\frac{d^3 . \Sigma . P \cos \widehat{Pz}}{dt\,du\,dv} &= G \frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{v-z}{w} f(w)
\end{aligned}\right\} ,$$

und ebenso für die drehenden Wirkungen die Aenderungsgesetze:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^3 . \Sigma . M_z}{dt\,du\,dv} &= G \left[\frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} t \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{u-y}{w} f(w) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} u \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{t-x}{w} f(w) \right] \\
\frac{d^3 . \Sigma . M_y}{dt\,du\,dv} &= G \left[\frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} v \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{t-x}{w} f(w) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} t \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{v-z}{w} f(w) \right] \\
\frac{d^3 . \Sigma . M_x}{dt\,du\,dv} &= G \left[\frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} u \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{v-z}{w} f(w) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} v \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \frac{u-y}{w} f(w) \right]
\end{aligned}\right\} .$$

Man hat aber auch

$$\frac{d^3 M_2}{dt\,du\,dv} = q_2 ,$$

und damit nehmen die Werthe für die Componenten der fördernden Wirkung die Formen an:

$$88.)\left\{\begin{aligned}
\Sigma . P \cos \widehat{Px} &= G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{t-x}{w} f(w) , \\
\Sigma . P \cos \widehat{Py} &= G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{u-y}{w} f(w) , \\
\Sigma . P \cos \widehat{Pz} &= G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{v-z}{w} f(w) .
\end{aligned}\right.$$

Machen wir dann wieder

$$\int dw . f(w) = \varDelta . F(w) \quad , \quad \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 F(w) = U ,$$

so erhalten wir mit Rücksicht auf den Werth:

$$w^2 = (t-x)^2 + (u-y)^2 + (v-z)^2$$

die Gleichungen:

$$\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{t-x}{w} f(w) = \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{\delta . F(w)}{\delta t} = \frac{\delta U}{\delta t} ,$$

$$\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{u-y}{w} f(w) = \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{\delta . F(w)}{\delta u} = \frac{\delta U}{\delta u} ,$$

$$\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{v-z}{w} f(w) = \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{\delta . F(w)}{\delta v} = \frac{\delta U}{\delta v} ,$$

da hier die frühere Bedingung in Betreff der Unabhängigkeit der Grenzen des wirkenden Körpers von den Veränderlichen t, u, v immer

erfüllt sein wird. Damit nehmen dann die obigen Werthe die einfacheren Formen an:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma . P \cos \widehat{Px} &= G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 \frac{\delta U}{dt} \\
\Sigma . P \cos \widehat{Py} &= G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 \frac{\delta U}{\delta u} \\
\Sigma . P \cos \widehat{Pz} &= G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 \frac{\delta U}{\delta v}
\end{aligned}\right\} . \qquad (89.$$

Auf gleiche Weise findet man für die Momente $\Sigma . M_Z$, $\Sigma . M_Y$, $\Sigma . M_X$ zuerst die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma . M_Z = {} & G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} du . q_2 t \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{u - y}{w} f(w) \\
& - G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 u \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{t - x}{w} f(w) \\
\Sigma . M_Y = {} & G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 v \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{t - x}{w} f(w) \\
& - G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 t \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{v - z}{w} f(w) \\
\Sigma . M_X = {} & G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 u \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{v - z}{w} f(w) \\
& - G \int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . q_2 v \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q_1 \frac{u - y}{w} f(w)
\end{aligned}\right\} \qquad (90.$$

und dann mittels der Function U die einfachern Werthe:

$$91.)\begin{cases}\Sigma.M_Z=G\left[\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.q_2\,t\frac{\partial U}{\partial u}-\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.q_2\,u\frac{\partial U}{\partial t}\right],\\ \Sigma\,M_Y=G\left[\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.q_2\,v\frac{\partial U}{\partial t}-\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.q_2\,t\frac{\partial U}{\partial v}\right],\\ \Sigma.M_X=G\left[\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.q_2\,u\frac{\partial U}{\partial v}-\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.q_2\,v\frac{\partial U}{\partial u}\right].\end{cases}$$

Die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe hängt demnach von zehn dreifachen Integralen ab, welche nur in seltenen Fällen für das in der Natur stattfindende Gesetz der Anziehung begrenzte Ausdrücke als Werthe der Componenten der ausgeübten fördernden und drehenden Wirkung geben werden.

In dem besondern Falle, wo die Dichte des angegriffenen Körpers constant, dieser also homogen ist, kommen die neun dreifachen Integrale der Gleichungen (89) und (91) auf zweifache zurück; man hat dann unter Aenderung der Integrationsordnung

$$92.)\begin{cases}\Sigma.P\cos\widehat{Px}=Gq_2\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.\int_{t_0}^{t}dt.\frac{\partial U}{\partial t}=Gq_2\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.\underset{t_0}{\overset{t}{\varDelta}}.U\\ \Sigma.P\cos\widehat{Py}=Gq_2\int_{t_0}^{t}dt.\int_{v_0}^{v}dv.\int_{u_0}^{u}du.\frac{\partial U}{\partial u}=Gq_2\int_{t_0}^{t}dt.\int_{v_0}^{v}dv.\underset{u_0}{\overset{u}{\varDelta}}.U\\ \Sigma.P\cos\widehat{Pz}=Gq_2\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.\frac{\partial U}{\partial v}=Gq_2\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\underset{v_0}{\overset{v}{\varDelta}}.U\end{cases}$$

für die fördernden Componenten und

$$93.)\begin{cases}\Sigma.M_Z=Gq_2\left[\int_{t_0}^{t}dt.\int_{v_0}^{v}dv.\underset{u_0}{\overset{u}{\varDelta}}.tU-\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.\underset{t_0}{\overset{t}{\varDelta}}.uU\right].\\ \Sigma.M_Y=Gq_2\left[\int_{u_0}^{u}du.\int_{v_0}^{v}dv.\underset{t_0}{\overset{t}{\varDelta}}.vU-\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\underset{v_0}{\overset{v}{\varDelta}}.tU\right]\\ \Sigma.M_X=Gq_2\left[\int_{t_0}^{t}dt.\int_{u_0}^{u}du.\underset{v_0}{\overset{v}{\varDelta}}.uU-\int_{t_0}^{t}dt.\int_{v_0}^{v}dv.\underset{u_0}{\overset{u}{\varDelta}}.vU\right]\end{cases}$$

für die drehenden Seitenwirkungen. Es ist aber auch die Anwendung dieser Werthe, welche man nach dem Frühern leicht auch in Polarcoordinaten ausdrücken wird, durch die Schwierigkeit der Integration sehr beschränkt.

§. 122.

Wenn einer der beiden gegebenen Körper eine Kugel ist, so hat man für das in der Natur stattfindende Gesetz der Anziehung, indem man diesen Körper als den angreifenden nimmt und die Coordinaten seines Mittelpunktes durch a, b, c, seine Masse mit M_1 bezeichnet, und unter der Voraussetzung, daß die Dichte in einem seiner Punkte nur eine Function der Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte ist, nach §. 107

$$U_{,} = \frac{M_1}{\sqrt{(a-t)^2 + (b-u)^2 + (c-v)^2}} = \frac{M_1}{w_{,}},$$

und damit folgt

$$\frac{\partial U_{,}}{\partial t} = M_1 \frac{a-t}{w_{,}^3}, \quad \frac{\partial U_{,}}{\partial u} = M_1 \frac{b-u}{w_{,}^3}, \quad \frac{\partial U_{,}}{\partial v} = M_1 \frac{c-v}{w_{,}^3},$$

$$= \frac{M_1}{w_{,}^2} \cdot \frac{\partial w_{,}}{\partial a}, \quad = \frac{M_1}{w_{,}^2} \cdot \frac{\partial w_{,}}{\partial b}, \quad = \frac{M_1}{w_{,}^2} \cdot \frac{\partial w_{,}}{\partial c},$$

$$= -M_1 \frac{\partial . \frac{1}{w_{,}}}{\partial a}, \quad = -M_1 \frac{\partial . \frac{1}{w_{,}}}{\partial b}, \quad = -M_1 \frac{\partial . \frac{1}{w_{,}}}{\partial c}.$$

Macht man daher wieder

$$-\int_{t_0}^{t} dt . \int_{u_0}^{u} du . \int_{v_0}^{v} dv . \frac{q_2}{w_{,}} = V_{,},$$

so werden die Ausdrücke für die fördernden Componenten

$$\Sigma . P \cos \widehat{Px} = G M_1 \frac{\partial V_{,}}{\partial a}, \quad \Sigma . P \cos \widehat{Py} = G M_1 \frac{\partial V_{,}}{\partial b},$$

$$\Sigma . P \cos \widehat{Pz} = G M_1 \frac{\partial V_{,}}{\partial c};$$

sie haben demnach, wie vorauszusehen war, dieselbe Form, wie die frühern für die gegenseitige Wirkung eines stetigen Systems und eines

materiellen Punktes, dessen Masse M_1 ist und dessen Lage durch die Coordinaten a, b, c bestimmt wird.

Man schließt daraus leicht, daß wenn auch der zweite Körper eine Kugel von der Masse M_2 und seine Dichte nur eine Function des Abstandes vom Mittelpunkte ist, die gegenseitige Anziehung durch

$$R = G M_1 M_2 \frac{1}{e^2}$$

ausgedrückt wird, worin e den Abstand der Mittelpunkte beider Kugeln vorstellt.

Zweiter Abschnitt.

Gleichgewicht eines festen Systems.

---

§. 123.

Die Bedingungen, unter welchen die an einem festen Systeme angreifenden Kräfte ihre Wirkungen gegenseitig aufheben oder sich das Gleichgewicht halten, können wie jene für das Gleichgewicht eines materiellen Punktes auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt werden, nämlich

1) dadurch, daß man nach den im vorhergehenden Abschnitte vorgetragenen Lehren unmittelbar die förderndе und drehende Gesammtwirkung der an einem gegebenen System thätigen Kräfte durch diese Kräfte selbst ausdrückt und die Bedingungen ermittelt, unter welchen jede dieser Gesammtwirkungen Null wird, oder

2) dadurch, daß man die Bedingung ausspricht, unter welcher ein System, das in Ruhe oder in Bewegung sein kann, nach keiner Seite hin in Bewegung kommen, beziehungsweise eine neue Bewegung erhalten kann, also durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Wir werden dann wieder zuerst den erstern Weg verfolgen, da dieser der Anschauung zugänglicher ist, uns besser mit der Natur der stattfindenden Verhältnisse vertraut macht und in jedem besondern Falle leichter zum Ziele führt, und zwar werden wir dabei die bei der Lehre von der Gesammtwirkung der Kräfte gemachte Unterscheidung zu Grunde legen, so, daß wir zuerst feste Systeme mit parallelen Kräften betrachten, dann solche, bei welchen die Richtungen der Kräfte und ihre Angriffspunkte in derselben Ebene liegen, untersuchen und uns zuletzt mit festen Systemen beschäftigen, an welchen ganz beliebige Kräfte nach beliebigen Richtungen und an beliebigen Angriffspunkten thätig sind.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten umfaßt dann wieder alle Bedingungen für das Gleichgewicht in einer einzigen Gleichung und drückt demnach die allgemeinste Beziehung aus, welche zwischen den Kräften, ihren Richtungen und der Lage ihrer Angriffspunkte stattfinden muß, damit das Gleichgewicht bestehen kann.

Der Einfachheit und klaren Auffassung wegen wollen wir uns die Systeme immer im Zustande des ruhenden Gleichgewichtes vorstellen und sie in Bezug auf die Form der analytischen Ausdrücke als nicht stetig zusammenhängende annehmen.

I. Gleichgewicht eines Systems paralleler Kräfte.

§. 124.

Welches auch die Richtung der gegebenen parallelen Kräfte und die Lage ihrer Angriffspunkte sei, man kann immer, wie im dritten Kapitel des vorhergehenden Abschnittes gezeigt wurde, eine der Coordinaten-Achsen, z. B. die der z, zur Richtung der Kräfte parallel annehmen und dann die Wirkung des ganzen Systems durch eine längs jener Achse thätige fördernde Kraft $R = \Sigma . P$ und durch die beiden Momente: $-\Sigma . Px$ und $\Sigma . Py$ ausdrücken, deren Achsen zu der Achse der z oder zur Richtung der Kräfte senkrecht sind.

Aus dieser Darstellung der Gesammtwirkung der Kräfte folgt, daß es, wenn das System ganz frei ist, für das Gleichgewicht desselben nothwendig ist und genügt, wenn sowohl die fördernde Resultirende $\Sigma . P$, als jede der beiden drehenden Kräfte $\Sigma . Px$ und $\Sigma . Py$ für sich Null ist, wodurch man

94.) $\Sigma . P = 0$, $\Sigma . Px = 0$, $\Sigma . Py = 0$

als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht erhält. Denn die erste dieser Gleichungen bedingt das Verharren des Anfangspunktes und mit ihm des ganzen Systems an demselben Orte, während die beiden folgenden ausdrücken, daß auch keine drehende Bewegung um eine zur gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte senkrechte Achse hervorgerufen wird, was vollkommen genügt, da von selbst einleuchtet, daß die Kräfte keine drehende Bewegung um eine zu ihrer Richtung parallele Achse zu erzeugen vermögen.

Man kann übrigens zu diesen Bedingungsgleichungen auch durch folgende Betrachtung gelangen, die sich an die Untersuchung über das Gleichgewicht eines materiellen Punktes anschließt.

Ein System von Kräften, welche sich im Gleichgewicht halten sollen, muß sich immer auf zwei gleiche, längs derselben Geraden thätige und dem Sinne nach entgegengesetzte Kräfte zurückführen lassen. Nimmt man also eine von den Kräften des Systems hinweg und ersetzt, wenn es möglich ist, alle übrigen durch eine Resultirende R′, so muß diese im Falle des Gleichgewichtes jener Kraft P das Gleichgewicht halten, d. h. ihr an Intensität gleich, dem Sinne nach entgegengesetzt und längs derselben Geraden thätig sein. Mit Ausnahme des einzigen Falles, wo $\Sigma . P = 0$, ohne daß auch die Momente Null werden, kann aber die Wirkung eines Systems paralleler Kräfte immer durch eine einzige Kraft vertreten werden, deren Richtung zu der der gegebenen Kräfte parallel ist, und man hat zur Bestimmung ihrer Intensität und Richtung die Gleichungen:

$$R' = P' + P'' + \text{etc.} = \Sigma . P' \ ,$$

$$R'X' = \Sigma . P'x' \quad , \quad R'Y' = \Sigma . P'y' \ ,$$

worin X′, Y′ die Coordinaten des Durchgangspunktes ihrer Richtung in der Ebene der xy bezeichnen. Sind dann x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P, so werden x und y auch die Coordinaten des Durchgangspunktes der Richtung dieser Kraft in der Ebene der xy sein, und es müssen demnach für das Gleichgewicht der Kräfte R′ und P die Bedingungen:

$$R' = -P \quad , \quad X' = x \quad , \quad Y' = y$$

erfüllt werden. Führt man aber in die erste dieser Gleichungen den Werth von R′ ein, so ergibt sich als erste Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$P' + P'' + \text{etc.} = -P \quad \text{oder} \quad \Sigma . P = 0 \ .$$

Ferner nehmen die Werthe von X′ und Y′ dadurch die Form an:

$$X' = \frac{\Sigma . P'x'}{-P} \quad , \quad Y' = \frac{\Sigma . P'y'}{-P} \ ,$$

und die beiden letzten Bedingungen geben

$$\Sigma . P'x' = -Px \quad , \quad \Sigma . P'y' = -Py \ ,$$

woraus wie oben

$$\Sigma . Px = 0 \quad , \quad \Sigma . Py = 0$$

als die beiden andern nothwendigen und genügenden Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht eines freien Systems folgen.

Nehmen wir z. B. drei parallele Kräfte P_1, P_2, P_3, deren Angriffspunkte M_1, M_2, M_3, Fig. 82, durch die Coordinaten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ gegeben sind, so erhalten wir als Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte die Gleichungen:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0 ,$$
$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = 0 ,$$
$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 = 0 .$$

Die erste dieser Gleichungen gibt $P_1 + P_2 = - P_3$ und damit nehmen die beiden andern die Formen an:

$$P_1 (x_1 - x_3) + P_2 (x_2 - x_3) = 0 ,$$
$$P_1 (y_1 - y_3) + P_2 (y_2 - y_3) = 0 .$$

Eliminirt man dann aus diesen das Verhältniß $\frac{P_1}{P_2}$, so ergibt sich die neue Gleichung:

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} (x_1 - x_3) ,$$

welche zeigt, daß die Projectionen der drei Angriffspunkte in der Ebene der xy in einer Geraden liegen, oder daß diese Angriffspunkte selbst in einer zur Richtung der Kräfte parallelen Ebene enthalten sind, in welcher dann natürlich auch die Kräfte selbst thätig sein werden. — Ich nehme daher diese Ebene als Ebene der xz an und setze demzufolge $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, wodurch die obigen drei Bedingungsgleichungen auf die beiden ersten zurückkommen, aus welchen wie vorher die Gleichung:

$$P_1 (x_1 - x_3) + P_2 (x_2 - x_3) = 0$$

folgt, oder, wenn x_3 größer ist als x_1 und kleiner als x_2, so daß die Differenzen $x_1 - x_3$ und $x_2 - x_3$ entgegengesetzte Zeichen haben,

$$P_1 (x_3 - x_1) = P_2 (x_2 - x_3) ,$$

und man schließt daraus, daß sich die Kräfte P_1 und P_2 umgekehrt wie ihre Abstände von P_3 verhalten. Man findet aber ebenso

$$P_1 (x_2 - x_1) = - P_3 (x_2 - x_3) ,$$

und es verhalten sich demnach, abgesehen von dem Zeichen oder von dem Sinne, in welchem die Kräfte wirken, auch die Kräfte P_1 und P_3 umgekehrt wie ihre Abstände von der Richtung der Kraft P_2. Macht

man daher $x_3 - x_1 = a$, $x_2 - x_3 = b$, $x_2 - x_1 = c$, so ergibt sich einfach

$$P_1 : P_2 : P_3 = x_3 - x_1 : x_2 - x_3 : x_2 - x_1 = a : b : c \,.$$

Jede der drei Kräfte kann also der Größe nach durch den Abstand zwischen den Richtungen der beiden andern vorgestellt werden, und da zufolge der Gleichung: $P_1 + P_2 = - P_3$ auch jede derselben der algebraischen Summe der beiden andern gleich und dem Sinne nach entgegengesetzt ist, so schließt man daraus und nach §. 2 leicht, daß jede der drei Kräfte der Resultirenden der beiden andern gleich und geradezu entgegengesetzt ist, wie es nach dem Vorhergehenden sein muß.

Wenn das Gleichgewicht nicht stattfindet, so kann dasselbe im Allgemeinen durch eine einzige Kraft Q hergestellt werden, für welche man die Gleichungen hat:

$$Q + \Sigma . P = 0 \,, \quad Q x_, + \Sigma . P x = 0 \,, \quad Q y_, + \Sigma . P y = 0 \,, \quad (95.$$

worin wie vorher $x_,$ und $y_,$ die Coordinaten des Durchgangspunktes ihrer Richtung, einer zur Achse der z parallelen Geraden, in der Ebene der $x y$ bezeichnen; ihr Angriffspunkt in dieser Geraden bleibt unbestimmt.

In dem besondern Falle dagegen, wo die fördernde Resultirende $\Sigma . P$ Null ist, ohne daß auch die Momente $\Sigma . P x$ und $\Sigma . P y$ Null sind, in dem also niemals Gleichgewicht stattfinden kann, läßt sich dieses nicht mehr durch eine einzige Kraft, sondern nur durch ein Moment M_Q herstellen, welches zwei Componenten M_X und M_Y um die Achsen der x und der y geben muß, bedingt durch die Gleichungen:

$$M_X + \Sigma . P y = 0 \quad , \quad M_Y + \Sigma . P x = 0 \,, \qquad (96.$$

so daß die Achse dieses Momentes M_Q der Richtung nach der Achse des resultirenden Momentes $M_R = \sqrt{(\Sigma . P x)^2 + (\Sigma . P y)^2}$ entgegengesetzt ist und beide Momente gleiche Intensität haben.

§. 125.

Wenn das System nicht frei, sondern in seiner Bewegung Beschränkungen unterworfen ist, so werden die drei Bedingungsgleichungen (94) für das Gleichgewicht nicht mehr alle nothwendig sein. Man kann folgende Fälle unterscheiden.

1) Enthält das System einen festen Punkt, um welchen es sich drehend bewegen kann, so ist es offenbar nicht mehr nothwendig, daß die fördernde Resultirende $\Sigma . P$ Null ist; es wird genügen, wenn ihre

Richtung durch den festen Punkt geht und wenn keine Ursache zu einer drehenden Bewegung vorhanden ist. Man wird demnach den festen Punkt als Anfang eines Coordinatensystems nehmen, dessen eine Achse, z. B. die der z, der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte parallel ist; die Wirkung der fördernden Kraft $\Sigma . P$ wird dann durch den festen Punkt aufgehoben, und es werden die Gleichungen:

97.) $$\Sigma . Px = 0 \quad , \quad \Sigma . Py = 0 \; ,$$

welche ausdrücken, daß durch die Kräfte keine drehende Bewegung um eine zur Richtung der Kräfte senkrechte Achse hervorgerufen wird, die nothwendigen und genügenden Bedingungen für das Gleichgewicht enthalten.

Diese Gleichungen drücken aber auch aus, daß der Mittelpunkt des Systems der parallelen Kräfte in der Achse der z liegt, und man kann demnach als Bedingung des Gleichgewichtes in unserm gegenwärtigen Falle auch diese aufstellen, daß der feste Punkt in der Geraden liegen muß, welche durch den Mittelpunkt des Systems der Kräfte parallel zur Richtung derselben gezogen werden kann, oder man kann sagen, da diese Gerade auch die Richtung der allgemeinen Resultirenden ist: es wird Gleichgewicht stattfinden, wenn der feste Punkt in der Richtung der Resultirenden liegt. In dem Beispiele des vorhergehenden §. wird also noch Gleichgewicht stattfinden, wenn man irgend einen der drei Punkte M_1, M_2, M_3, oder allgemein, wenn man irgend einen Punkt in einer der drei Geraden $M_1 P_1$, $M_2 P_2$, $M_3 P_3$ als fest voraussetzt, d. h. wenn man eine der drei Kräfte P_1, P_2, P_3, welche unter sich im Gleichgewicht stehen, durch einen festen Punkt in ihrer Richtung ersetzt.

Ist der Mittelpunkt des Systems selbst der feste Punkt, so wird die vorhergehende Bedingung für jede Lage der Kräfte in Bezug auf ihre Angriffspunkte erfüllt; es werden dann die drei Gleichungen:

$$\Sigma . Px = 0 \quad , \quad \Sigma . Py = 0 \quad , \quad \Sigma . Pz = 0$$

befriedigt, und das System bleibt im Gleichgewicht, wie man auch die Richtungen der Kräfte um ihre Angriffspunkte drehen mag.

In dem Falle endlich, wo $\Sigma . P = 0$ ist, ohne das die Gleichungen (96) für einen gegebenen Anfangspunkt befriedigt werden, hat das System keinen Mittelpunkt, und kann dann nicht mehr durch einen festen Punkt im Gleichgewicht gehalten werden.

Um das nicht stattfindende Gleichgewicht herzustellen, genügt in allen Fällen eine einzige Kraft Q oder ein Moment M_Q; das letztere

ist nothwendig bestimmt und wird wie in dem vorhergehenden §. für den Fall, wo $\Sigma . P = 0$ ist, durch die Gleichungen (96) der Größe und Richtung nach gegeben. Die Kraft Q dagegen ist nur insofern bestimmt, daß sie ein Moment M_Q gleich dem ebengenannten in Bezug auf den festen Punkt geben und daß sie in der Ebene des resultirenden Momentes der gegebenen Kräfte thätig sein muß; denn die Gleichungen:

$$Qx_{,} + \Sigma . Px = 0 \quad , \quad Qy_{,} + \Sigma . Py = 0 \qquad (98.$$

lassen für Q beliebig viele Werthe zu, sie geben aber das Verhältniß:

$$\frac{y_{,}}{x_{,}} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . Px},$$

durch welches die Lage einer durch die Achse der z gehenden Ebene bestimmt wird, in der der Angriffspunkt, also auch die Richtung der Kraft Q liegen muß.

§. 126.

2) Wenn das gegebene System sich nur um eine feste Achse drehen und längs derselben nicht verschoben werden kann, so wird man diese als eine der Coordinaten-Achsen, z. B. als die der z annehmen und eine der beiden Coordinaten-Ebenen, welche sich längs dieser Achse schneiden, z. B. die der xz parallel zur Richtung der Kräfte legen. Es wird dann im Allgemeinen keine der Achsen mehr zur Richtung der Kräfte parallel sein; man kann aber jede der letztern in zwei Seitenkräfte zerlegen, von welchen die eine zur Achse der z, die andere zur Achse der x parallel gerichtet ist, so daß nun zwei Systeme paralleler Kräfte entstehen, von denen das erste, zur festen Achse der z parallele, keine Bewegung zu erzeugen vermag; das zweite, zur Achse der x parallele System dagegen gibt eine fördernde Kraft $\Sigma . P \cos \widehat{Px}$, deren Wirkung durch den Widerstand der festen Achse aufgehoben wird, und zwei Momente: $\Sigma . Pz \cos \widehat{Px}$ und $- \Sigma . Py \cos \widehat{Px}$, deren Achsen zu denen der y und z parallel sind. Das erste dieser Momente wird also das ganze System um die Achse der y drehen wollen, was nicht geschehen kann, ohne daß auch die Achse der z oder die feste Drehungsachse an dieser Bewegung Theil nimmt; es wird folglich auch dieses Moment keine Wirkung äußern können, und es bleibt als einzige Bedingung für das Gleichgewicht die Gleichung:

$$\Sigma . Py \cos \widehat{Px} = 0,$$

also entweder

99.) $\Sigma . Py = 0$ oder $\cos \widehat{Px} = 0$,

da $\cos \widehat{Px}$ allen Gliedern dieser Summe gemeinschaftlich ist. Die erste dieser Bedingungen besteht demnach darin, daß die Summe der Momente in Bezug auf eine Achse, welche sowohl zur Richtung der Kräfte, als zu der festen Achse senkrecht ist, Null sein muß; die zweite verlangt, daß die Richtung der Kräfte zur festen Achse parallel ist.

Man schließt aber aus der ersten Gleichung auch, daß die Resultirende des Systems in der Ebene der xz liegt; es wird also Gleichgewicht um eine feste Achse stattfinden, wenn diese und die Resultirende des Systems in einer und derselben, zur Richtung der Kräfte parallelen Ebene liegen. Daraus folgt ferner, daß die feste Achse, wenn sie nicht zur Richtung der Kräfte parallel ist, im Falle des Gleichgewichtes von der Richtung der Resultirenden geschnitten wird; ist sie aber parallel zur Richtung der Kräfte, so findet, wie schon bemerkt wurde und wie die zweite der Gleichungen (99) ausspricht, jedenfalls Gleichgewicht statt.

Die zu den gegebenen Kräften parallele Kraft Q, welche das nicht stattfindende Gleichgewicht herzustellen vermag, ist im jetzigen Falle noch weniger bestimmt, als im vorhergehenden; denn die einzige Gleichung:

100.) $Qy_{,} + \Sigma . Py = 0$,

aus welcher ihre Intensität und die Lage der Geraden, längs der sie thätig ist, gezogen werden muß, kann durch beliebig viele Werthe der Veränderlichen Q und y, befriedigt werden, und dann ist durch die letztere nur die Lage einer zur festen Achse und zur gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte parallelen Ebene bestimmt, in welcher der Angriffspunkt und die Richtung der Kraft Q enthalten sein muß; das Uebrige bleibt willkürlich. Auch das Moment M_Q, durch welches das System im Gleichgewicht erhalten werden kann, ist nicht mehr bestimmt; denn es werden alle Momente diese Function erfüllen, welche eine zur festen Achse senkrechte Componente geben, die dem Momente: $\Sigma . Py \cos \widehat{Px}$ gleich und dem Sinne nach entgegengesetzt ist; das kleinste derselben ist offenbar dasjenige, dessen Achse mit der festen Achse zusammenfällt und dessen Intensität dem ebengenannten Momente selbst gleich ist.

§. 127.

In den so eben betrachteten beiden Fällen, in welchen das Gleichgewicht mittels eines festen Punktes oder einer festen Achse erhalten wird, kann man, wie bei dem materiellen Punkte, leicht die drei verschiedenen Gleichgewichtslagen unterscheiden. Es wird nämlich das Gleichgewicht stabil sein, wenn die Richtung der Resultirenden, als deren Angriffspunkt wir den Mittelpunkt O des Systems der Kräfte annehmen, rückwärts verlängert werden muß, um den festen Punkt C oder die feste Achse AC zu treffen, wie es in Fig. 83 dargestellt ist; denn es ist leicht zu sehen, daß das System immer wieder in diese Lage zurückkehren wird, nachdem es ein wenig daraus verrückt worden war. Im entgegengesetzten Falle, wenn das feste Hinderniß von der Richtung der Resultirenden selbst oder von ihrer im Sinne ihrer Thätigkeit gerichteten Verlängerung geschnitten wird, wie in Fig. 84 hat das System die Lage des nicht stabilen Gleichgewichtes, weil das Streben der Resultirenden, ihren Angriffspunkt so weit als möglich von dem festen Punkte oder der festen Achse zu entfernen, das System alsbald in die Lage des stabilen Gleichgewichtes versetzen wird, sowie dasselbe aus der vorhergehenden Lage etwas verrückt worden und die Wirkung jener Kraft, deren Richtung dann nicht mehr durch das feste Hinderniß geht, durch dieses nicht mehr aufgehoben ist. Liegt dagegen der Angriffspunkt der Resultirenden, der Mittelpunkt des Systems der Kräfte, in dem festen Punkte oder in der Achse selbst, oder ist diese letztere zur Richtung der Kräfte parallel, so ist es gleichgültig, welche der möglichen Lagen das System einnimmt, es wird in jeder dieser Lagen auf gleiche Weise im Gleichgewicht sein, oder es wird sich in der Lage des indifferenten Gleichgewichtes befinden.

Nehmen wir z. B. einen schweren festen Körper, an welchem keine andere Kraft als sein Gewicht thätig ist, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden, daß derselbe nicht frei im Gleichgewicht bleiben kann, da diese Kraft immer wirksam sein wird. Das Gleichgewicht wird dagegen stattfinden, wenn derselbe mit einem festen Punkte so verbunden ist, daß die Verbindungslinie mit der lothrechten Richtung jener Kraft zusammenfällt und durch den Schwerpunkt des Körpers geht, also wenn dieser entweder lothrecht über oder unter oder in dem festen Punkte selbst liegt. Die erste dieser drei Lagen ist dann die unbeständige, die zweite die beständige und die dritte die gleichgültige Gleichgewichtslage, und man schließt daraus, daß ein in seinem Schwerpunkte unterstützter schwerer Körper in jeder

Lage um denselben im Gleichgewichte bleibt. Das Gleichgewicht wird noch bestehen, wenn der feste Körper an eine unveränderliche, horizontale oder geneigte Achse so befestigt ist, daß sein Schwerpunkt entweder in dieser Achse selbst oder in einer durch dieselbe gelegten lothrechten Ebene darüber oder darunter liegt, und wenn die Achse selbst eine lothrechte Richtung hat, so wird es gleichgültig sein, auf welche Weise der feste Körper mit ihr verbunden ist, er wird in jeder Lage um dieselbe im Gleichgewichte bleiben müssen. Wenn der Körper in den übrigen Fällen außer dem letzten nicht die das Gleichgewicht bedingende Lage hat, so sucht er immer diejenige einzunehmen, in welcher sein Schwerpunkt in lothrechter Richtung am weitesten von dem festen Punkte oder der festen Achse entfernt ist, in welcher derselbe also die tiefste Lage einnimmt. Diese Lage, welche er durch Bewegung erreicht, kann er jedoch nicht behaupten, sondern muß fortwährend um dieselbe schwingen; nur durch äußere Widerstände, welche dieser Bewegung entgegenwirken, kommt er zuletzt in der Nähe der stabilen Gleichgewichtslage zur Ruhe. Bei der Untersuchung der Bewegungsgesetze werden wir diese Schwingungen näher kennen lernen.

§. 128.

3) Zuletzt haben wir noch die Bedingungen des Gleichgewichtes für den Fall zu untersuchen, wo das feste System sich mit einem oder mehreren Punkten gegen eine feste Fläche stützt.

Wenn nur ein Punkt des Systems mit der Fläche in Berührung ist und auf Reibung nicht Rücksicht genommen wird, so muß nach dem Vorhergehenden einmal die Richtung der Resultirenden aller Kräfte durch diesen Punkt gehen, damit das System um diesen wie um einen festen Punkt im Gleichgewichte bleiben kann, und damit ferner dieser Punkt auf der Fläche selbst im Gleichgewichte ist, so wird nach dem, was im zweiten Abschnitte des ersten Buches (§. 19 u. f.) gelehrt wurde, erfordert, daß die Richtung der Resultirenden normal zu der Fläche, und wie sich von selbst versteht, gegen die Fläche gerichtet ist. Mit dieser letztern Voraussetzung kann demnach die Bedingung für das Gleichgewicht in dem betreffenden Falle und wenn keine Reibung zwischen dem festen System und der Fläche stattfindet, so ausgesprochen werden: Die Richtung der Resultirenden der Kräfte muß mit der Normalen der gegebenen Fläche zusammenfallen, welche durch den mit der Fläche in Berührung stehenden Punkt gezogen werden kann.

Wird dagegen durch den Druck, den das feste System auf die Fläche in dem mit dieser in Berührung stehenden Punkte ausübt, Reibung hervorgerufen, so muß zwar die Richtung der Resultirenden noch durch den genannten Punkt gehen, sie braucht aber nicht mehr normal zur Fläche zu sein, sondern darf einen Winkel ϱ mit der Normalen bilden, dessen Tangente gleich dem Reibungscoeffizienten f ist (§. 22 des ersten Buches).

So kann eine Kugel oder ein Cylinder, wenn der Schwerpunkt im Mittelpunkte, beziehungsweise in der Achse liegt, nur auf einer wagrechten Ebene im Gleichgewichte sein; liegt dagegen der Schwerpunkt außerhalb des Mittelpunktes oder der Achse O, Fig. 85, so wird ein solcher Körper auch auf einer geneigten Ebene im Gleichgewichte bleiben, welche keinen größern Winkel α, als ϱ mit einer wagrechten Ebene bildet, wenn der Halbmesser Oc größer ist, als $r \sin \alpha$, und wenn der Schwerpunkt desselben sich in a oder b lothrecht über dem Berührungspunkte M befindet.

Stützen sich zwei Punkte des Systems gegen eine feste Fläche, so kann dasselbe im Allgemeinen nur im Gleichgewichte bleiben, wenn die Richtung der Resultirenden die Verbindungslinie jener beiden Punkte schneidet und der Mittelpunkt des Systems entweder bei keiner Verrückung desselben der Wirkung der Resultirenden folgen kann, oder nur bei direct entgegengesetzten.

Gibt es endlich mehr als zwei Punkte, welche auf einer festen Fläche zu bleiben gezwungen sind und die nicht in gerader Linie liegen, so muß, damit Gleichgewicht bestehen kann, einmal die Richtung der Resultirenden das von den äußersten Verbindungslinien jener Punkte gebildete Vieleck durchdringen und dann der Mittelpunkt des Systems eine solche Lage haben, daß er entweder bei keiner, oder bei jeder, oder nur bei direct entgegengesetzten Verrückungen eine Bewegung im Sinne der Resultirenden erhält. Der erste Fall begreift die gleichgültigen und beständigen Gleichgewichtslagen, je nachdem der Mittelpunkt der Kräfte nur eine zur Richtung der Resultirenden senkrechte Bewegung, also im Sinne dieser Kraft betrachtet, gar keine Bewegung erhält, oder eine dem Sinne dieser Kraft entgegengesetzte Bewegung desselben erfolgt; der zweite und dritte Fall dagegen umfaßt, wie leicht zu sehen ist, die unbeständigen Gleichgewichtslagen.

Diese letztern Bedingungen für das Gleichgewicht sind übrigens in dieser Fassung nicht bestimmt genug, um in besondern Fällen Anwendung davon machen zu können; es wird leichter sein, solche Fälle mittels der Gleichgewichtsbedingungen eines festen Systems, an welchem

beliebige Kräfte angreifen, zu untersuchen, oder das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu Hülfe zu nehmen. Ebenso wird auch die Bestimmung einer Kraft, welche das nicht vorhandene Gleichgewicht herzustellen vermag, einfacher aus der Anwendung des allgemeinen Ausdruckes für eine solche Kraft hervorgehen, namentlich dann, wenn diese neue Kraft nicht zur gemeinschaftlichen Richtung der gegebenen Kräfte parallel sein muß.

II. Gleichgewicht eines festen Systems, wenn die Kräfte und ihre Angriffspunkte alle in derselben Ebene liegen.

§. 129.

Wenn die Kräfte, welche an einem festen System angreifen, alle in derselben Ebene liegen, wie ihre Angriffspunkte, so kann ihre Wirkung in allen Fällen durch die einer fördernden Kraft und eines Momentes, dessen Achse zur Ebene der Kräfte senkrecht ist und in den meisten Fällen auch durch eine allgemeine Resultirende R ersetzt werden, und zwar hat man für die beiden rechtwinkligen Componenten der fördernden Wirkung die Werthe:

$$R \cos\widehat{Rx} = \Sigma . P \cos\widehat{Px} \quad , \qquad R \sin\widehat{Rx} = \Sigma . P \sin\widehat{Px} ,$$

und für die drehende Wirkung den Ausdruck:

$$R(X \sin\widehat{Rx} - Y \cos\widehat{Rx}) = \Sigma . P(x \sin\widehat{Px} - y \cos\widehat{Px}) ,$$

worin X, Y die Coordinaten eines Punktes in der Richtung der Resultirenden bezeichnen. Für das Gleichgewicht eines solchen Systems, wenn es ganz frei ist, ist daher nothwendig und genügend, daß sowohl die erste als die zweite Wirkung Null bleibt, daß also die drei Gleichungen:

$$101.) \left\{ \begin{array}{c} \Sigma . P \cos\widehat{Px} = 0 \quad , \qquad \Sigma . P \sin\widehat{Px} = 0 \\ \Sigma . P (x \sin\widehat{Px} - y \cos\widehat{Px}) \quad = 0 \end{array} \right.$$

befriedigt werden; denn die beiden ersten bedingen wieder das Verharren des Anfangspunktes der Coordinaten und mit ihm des ganzen Systems an demselben Orte, während die letzte dafür bürgt, daß auch keine

drehende Bewegung erzeugt wird. Man darf deßhalb aus den obigen Gleichungen zwischen den Wirkungen der allgemeinen Resultirenden und den Gesammtwirkungen des Systems der Kräfte nicht schließen, daß Gleichgewicht bestehe, wenn man für die genannte Resultirende den Werth Null findet, weil dies immer der Fall ist, wenn sich die Wirkung der Kräfte auf ein Moment allein zurückführen läßt, also durch eine einzige allgemeine Resultirende nicht ersetzt werden kann.

Es läßt sich ferner leicht zeigen, daß die Bedingungsgleichungen (101) nothwendig befriedigt werden müssen, wenn das ganze System der Kräfte durch zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte soll ersetzt werden können, was immer die untrüglichste Bürgschaft für das Gleichgewicht bleibt. Denn die beiden ersten jener Gleichungen sprechen aus, daß jede der fördernden Seitenkräfte $P \cos \widehat{Px}$ und $P \sin \widehat{Px}$ der Summe oder Resultirenden aller übrigen längs derselben Achse thätigen Kräfte: $\Sigma . P' \cos \widehat{P'x} = R' \cos \widehat{R'x}$ oder $\Sigma . P' \sin \widehat{P'x} = R' \sin \widehat{R'x}$ gleich und entgegengesetzt ist, daß man also hat

$$P \cos \widehat{Px} = - R' \cos \widehat{R'x} \quad , \quad P \sin \widehat{Px} = - R' \sin \widehat{R'x}$$

und demnach

$$P = R' \quad , \quad \cos \widehat{Px} = - \cos \widehat{R'x} \; .$$

Ebenso drückt die dritte der Gleichungen (101) die Bedingung aus, daß jede der drehenden Kräfte in Bezug auf den Anfangspunkt der Summe oder dem Resultirenden aller übrigen Momente gleich und entgegengesetzt ist, daß z. B. das Moment der Kraft P, nämlich $P (x \sin \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px})$ die geradezu entgegengesetzte Wirkung des resultirenden Momentes $R' (\mathfrak{X}' \sin \widehat{R'x} - \mathfrak{Y}' \cos \widehat{R'x})$ oder $\Sigma . P' (x' \sin \widehat{P'x} - y' \cos \widehat{P'x})$ hervorbringt. Da aber schon $P = R'$ und $Px = \pi + R'x$ gefunden ist, so gibt die Vergleichung der vorstehenden Werthe, die Gleichung:

$$x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px} - (\mathfrak{X}' \sin \widehat{Px} - \mathfrak{Y}' \cos \widehat{Px}) = 0$$

oder in anderer Form

$$(x - \mathfrak{X}') \sin \widehat{Px} - (y - \mathfrak{Y}') \cos \widehat{Px} = 0 \; ,$$

welche als die Gleichung einer Geraden betrachtet werden kann, die durch die Punkte xy und $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}'$ geht und mit der Achse der x den Winkel $\widehat{Px}$ einschließt, d. i. denselben Winkel, welchen die Richtungen

der Kräfte P und R' mit der genannten Achse bilden. Die Angriffspunkte dieser Kräfte liegen demnach auf einer Geraden, welche ihren Richtungen parallel sein soll, welche mithin diese Richtungen selbst enthält; diese beiden Kräfte, welche das ganze System der gegebenen Kräfte vertreten, sind folglich einander gleich und geradezu entgegengesetzt.

Daraus geht dann weiter hervor, daß wenn das System nicht im Gleichgewichte ist und sich die Kräfte auf eine einzige Resultirende zurückführen lassen, es immer eine Kraft gibt, aber auch nur eine, welche das Gleichgewicht herzustellen vermag, nämlich die Kraft Q, welche der Resultirenden R des ganzen Systems gleich und geradezu entgegengesetzt ist, deren Intensität und Richtung also durch die Gleichungen:

$$102.)\quad \left\{ \begin{aligned} & Q = R = \sqrt{(\Sigma . P \cos \widehat{Px})^2 + (\Sigma . P \sin \widehat{Px})^2}\,, \\ & \operatorname{tang} \widehat{Qx} = \operatorname{tang}(\pi + \widehat{Rx}) = \frac{-\Sigma . P \sin \widehat{Px}}{-\Sigma . P \cos \widehat{Px}}\,, \\ & (x_{,} - \mathbf{X})\, \Sigma . P \sin \widehat{Px} - (y_{,} - \mathbf{Y})\, \Sigma . P \cos \widehat{Px} = 0\,, \end{aligned} \right.$$

gegeben werden, worin $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ die Coordinaten eines Punktes in dieser Richtung bezeichnen und von denen daher die letzte die Gleichung dieser Richtung vorstellt.

Kann die Wirkung des Systems der Kräfte nicht durch die einer einzigen Kraft ersetzt werden, kommt sie also auf die eines Momentes zurück, so kann auch nur ein Moment M_Q das System im Gleichgewicht halten; die Achse dieses Momentes muß natürlich zu der Ebene des Systems der Angriffspunkte senkrecht sein und seine Intensität wird durch die Gleichung:

$$103.)\quad M_Q + \Sigma . P(x \sin \widehat{Px} - y \cos \widehat{Px}) = 0$$

bestimmt; alles Uebrige: Lage, Richtung und Intensität seiner beiden Kräfte oder die Länge des Hebelarms, ist willkürlich.

§. 130.

Nehmen wir z. B. zwei beliebige Kräfte P und P', Fig. 86, deren Richtungen in derselben Ebene liegen und mit der Achse der x die Winkel α und α' einschließen und deren Angriffspunkte M und M' auf irgend eine Weise fest miteinander verbunden und durch die Coor-

binaten: $x = a$, $y = b$ für den ersten, $x = a'$, $y = b'$ für den zweiten bestimmt sind. Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieser beiden Kräfte werden

$$P\cos\alpha + P'\cos\alpha' = 0 \quad , \quad P\sin\alpha + P'\sin\alpha' = 0\ ,$$
$$P(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + P'(a'\sin\alpha' - b'\cos\alpha') = 0\ ,$$

und sind natürlich denen, welche wir oben für die Kräfte P und R' erhalten haben, ganz ähnlich, woraus folgt, daß kein Gleichgewicht zwischen ihnen bestehen kann, wenn nicht $\alpha' = \pi + \alpha$ ist, und wenn nicht die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte M und M' zugleich auch ihre Richtungen enthält, d. h. wenn diese beiden Kräfte nicht gleich und geradezu entgegengesetzt sind.

Fügen wir also noch eine dritte Kraft P'' hinzu, deren Richtung durch den mit der Achse der x gebildeten Winkel α'' und deren Angriffspunkt durch die Coordinaten $x = a''$, $y = b''$ bestimmt sei, so wird nun Gleichgewicht bestehen, wenn

$$\Sigma . P\cos\widehat{Px} = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' = 0\ ,$$

$$\Sigma . P\sin\widehat{Px} = P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + P''\sin\alpha'' = 0\ ,$$

$$\Sigma . P(x\sin\widehat{Px} - y\cos\widehat{Px}) = P(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + P'(a'\sin\alpha' - b'\cos\alpha')$$
$$+ P''(a''\sin\alpha'' - b''\cos\alpha'') = 0\ .$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\alpha''$, die zweite mit $\sin\alpha''$, und addirt die Producte, so wird

$$P'' = -P\cos(\alpha'' - \alpha) - P'\cos(\alpha'' - \alpha')\ ,$$
oder
$$P'' = P\cos(\pi + \alpha'' - \alpha) + P'\cos(\pi + \alpha'' - \alpha')\ ,$$

worin nun, wie leicht zu sehen, $\pi + \alpha'' - \alpha$ und $\pi + \alpha'' - \alpha'$ die Winkel vorstellen, welche von den Richtungen der Kräfte P und P' mit der rückwärts verlängerten Richtung der Kraft P'' gebildet werden und wobei zu beachten ist, daß diese Winkel nicht beide stumpf sein und überhaupt nicht solche Werthe haben können, daß P'' dadurch negativ wird, und man sieht, daß unter dieser Form der Werth von P'' mit dem in §. 6 des ersten Buches erhaltenen Werthe (3) der Resultirenden zweier Kräfte, die in demselben Punkte angreifen, übereinkommt.

Nimmt man dann aus den beiden ersten der obigen Gleichungen die Werthe von $P''\cos\alpha''$ und $P''\sin\alpha''$, und führt sie in die dritte ein, so nimmt diese die Form an:

$$P[(a-a'')\sin\alpha-(b-b'')\cos\alpha]+P'[(a'-a'')\sin\alpha'-(b'-b'')\cos\alpha']=0$$

und drückt aus, daß die drehenden Wirkungen der Kräfte P und P' in Bezug auf den Angriffspunkt der dritten Kraft P'' einander gleich und dem Sinne nach entgegengesetzt sein müssen; denn

$$a-a'' \quad , \quad b-b'' \quad , \quad a'-a'' \quad , \quad b'-b''$$

sind offenbar die Coordinaten der Angriffspunkte von P und P' in Bezug auf ein durch den Angriffspunkt der Kraft P'' gelegtes und dem ursprünglichen System paralleles Achsenpaar. Die obige Gleichung wird aber jedenfalls befriedigt, wenn getrennt

$$(a-a'')\sin\alpha-(b-b'')\cos\alpha=0$$
$$(a'-a'')\sin\alpha'-(b'-b'')\cos\alpha'=0$$

gesetzt wird, und man sieht, daß dann die Coordinaten a'', b'' dem Durchschnittspunkte der Richtungen von P und P' angehören, übereinstimmend mit dem in §. 2 angewendeten Verfahren. Daraus geht sonach hervor, daß wenn drei Kräfte in einer Ebene sich das Gleichgewicht halten, der Durchschnittspunkt der Richtungen von irgend zwei derselben immer in der Richtung der dritten Kraft liegt, oder daß sich die Richtungen dieser Kräfte in einem und demselben Punkte schneiden. Ihre Intensitäten müssen dabei, wie schon bemerkt, dieselben Verhältnisse unter sich haben, wie die dreier Kräfte, welche an demselben Punkte sich das Gleichgewicht halten (§. 16 des ersten Buches).

§. 131.

Die in §. 129 aufgestellten Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht werden nicht mehr alle nothwendig sein, wenn das System in seiner Bewegung einer Beschränkung unterworfen ist.

1) Enthält dasselbe einen festen Punkt, um welchen es sich frei drehen kann, so wird durch diesen seine fortschreitende Bewegung unmöglich gemacht, auch ohne daß die fördernde Kraft R des ganzen Systems Null ist; die einzige Bedingung für das Gleichgewicht besteht folglich darin, daß die Kräfte keine Drehung um jenen festen Punkt bewirken, oder daß das resultirende Moment derselben in Bezug auf diesen Punkt Null ist. Man wird demnach den genannten Punkt als Anfang der Coordinaten nehmen und dadurch

103.) $$M_R=\Sigma.P(x\sin\widehat{Px}-y\cos\widehat{Px})=0$$

als einzige nothwendige und genügende Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht erhalten.

Die Bedeutung dieser Gleichung kann aber auch noch auf folgende Weise aufgefaßt werden. Ist R die Intensität der allgemeinen Resultirenden des Systems, und $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ die Coordinaten eines Punktes in ihrer Richtung, also

$$R(\mathfrak{X} \sin \widehat{Rx} - \mathfrak{Y} \cos \widehat{Rx}) = M_R$$

ihre drehende Wirkung in Bezug auf den Anfangspunkt, so zeigt die Gleichung:

$$-M_R = \mathfrak{Y} R \cos \widehat{Rx} - \mathfrak{X} R \sin \widehat{Rx} = 0 \ ,$$

daß die Richtung der Resultirenden im Falle des Gleichgewichtes durch den Anfangspunkt, d. h. durch den festen Punkt geht.

Umgekehrt wird immer Gleichgewicht bestehen, wenn ein Punkt in der Richtung der Resultirenden unbeweglich ist; denn wird dieser Punkt als Anfang der Coordinaten genommen, so hat man als Gleichung dieser Richtung

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X} \tang \widehat{Rx} \ ,$$

und dadurch ergibt sich immer

$$R(\mathfrak{X} \sin \widehat{Rx} - \mathfrak{Y} \cos \widehat{Rx}) = M_R = 0 \ .$$

Ein System, das keine allgemeine Resultirende hat, kann daher auch nicht durch einen festen Punkt im Gleichgewichte erhalten werden.

Eine feste, unbiegsame, aber gewichtlose Linie ABC, Fig. 87 u. 88, von einfacher Krümmung, welche sich um einen festen Punkt C drehen, aber auf demselben nicht verschieben läßt, und an welcher zwei oder mehrere Kräfte angreifen, deren Richtungen in der Ebene ihrer Krümmung liegen, wird ein mathematischer Hebel genannt. Gewöhnlich setzt man nur zwei Kräfte P und Q an demselben thätig voraus und unterscheidet dieselben durch die Benennungen Kraft und Last; diese beiden Kräfte werden nach dem Vorhergehenden den Hebel im Gleichgewichte halten, wenn die Summe ihrer Momente in Bezug auf den Drehungspunkt Null ist, d. h. wenn

$$Pp + Qq = 0 \quad , \quad Pp = -Qq \ ,$$

wo p und q die Längen der von diesem Punkte auf die Richtungen der Kräfte P und Q gefällten Senkrechten, oder die Hebelarme der genannten Momente bezeichnen. Es wird also Gleichgewicht bestehen, wenn die

beiden Kräfte den Hebel in entgegengesetztem Sinne drehen wollen und ihre drehenden Wirkungen gleich sind. Dieses letztere ist aber ohne Rücksicht auf den Sinn der Drehung der Fall, wenn

$$Pp = Qq \quad \text{oder} \quad P : Q = q : p ,$$

also wenn sich die Kräfte P und Q ihrer Intensität nach umgekehrt verhalten, wie die senkrechten Abstände des Drehungspunktes von ihren Richtungen.

Wenn mehr als zwei Kräfte an dem Hebel angreifen, so läßt sich die Bedingung des Gleichgewichtes nicht einfacher als durch $\Sigma . Pp = 0$ ausdrücken. Dahin gehört z. B. der Fall, wenn der Hebel ein materieller oder physischer und demnach schwer ist; man wird diesen auf einen mathematischen zurückführen, wenn man sein Gewicht G als dritte Kraft im Schwerpunkte O, Fig. 88, angreifen läßt und sich die drei nothwendigen Angriffspunkte A, B, O und den festen Punkt C durch eine gewichtlose Linie verbunden denkt.

Wenn sich die unbiegsame Linie nur an den festen Punkt anlehnt und an demselben verschoben werden kann, dann muß noch die fördernde Resultirende in dem Stützpunkte normal zu derselben gerichtet sein, damit kein Verschieben soll stattfinden können; dieser Fall ist indessen in dem nachfolgenden allgemeinern enthalten.

In allen Fällen, wo das Gleichgewicht mittels eines festen Punktes erhalten wird, hat dieser einen Druck auszuhalten, welcher durch die Resultirende aller fördernden Kräfte der Größe und Richtung nach vorgestellt wird und dem die Festigkeit jenes Punktes gewachsen sein muß, wenn das Gleichgewicht auf die Dauer stattfinden soll.

2) Oft enthält das System einen oder mehrere Punkte, welche der Bedingung unterworfen sind, auf einer gegebenen Linie bleiben zu müssen, oder umgekehrt eine oder zwei unbiegsame Linien, welche an festen Punkten hingleiten müssen. In diesem Falle drückt man die Widerstände, welche jene Linien der freien Bewegung der betreffenden Punkte oder umgekehrt die festen Punkte der freien Bewegung der Linien entgegensetzen, durch die zu den betreffenden Linien normalen Kräfte N, N′, etc. aus, deren Intensitäten vorerst noch unbekannt sind, und führt diese mit den übrigen gegebenen Kräften in die Bedingungsgleichungen (101) ein, indem man dann das System wieder als ein freies betrachtet. Es ist übrigens einleuchtend, daß durch die Lage zweier Punkte die aller übrigen, welche fest und unveränderlich mit diesen verbunden sind, bestimmt ist, daß also nur zwei Punkte des Systems einer willkürlichen Beschränkung in ihrer Bewegung unterworfen werden können. Und in der That

haben wir auch nur drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht, und diese können offenbar nur zwei unbestimmte Größen N und N' enthalten, wenn sie nach der Elimination dieser letztern noch eine bestimmte Beziehung zwischen den angewendeten Kräften und der Lage des Systems, welche zum Bestehen des Gleichgewichtes erfordert wird, ausdrücken sollen. Wenn dieses also nicht stattfindet, so kann nur eine der in der Untersuchung vorkommenden Größen jener Bedingung gemäß bestimmt werden und die Aufgabe bleibt unbestimmt, sobald die Werthe von mehreren dieser Größen gefunden werden sollen. Ist dagegen nur ein einziger Punkt oder nur eine Linie des Systems in seiner Bewegung beschränkt, so können zwei der in der Aufgabe vorkommenden Größen so bestimmt werden, daß das System im Gleichgewicht erhalten wird.

Ueberhaupt dürfen, wie man leicht sieht, in der Aufgabe nur drei unbekannte Größen vorkommen, wenn sie bestimmt sein soll und wenn alle Umstände in Rechnung gebracht sind.

Soll endlich auch auf die Reibung Rücksicht genommen werden, welche durch den Druck eines Punktes gegen die Linie, auf der er bleiben oder welche an ihm hingleiten muß, entsteht, so darf man in die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht nur eine zu dieser Curve tangentiale Kraft fN einführen, wenn f den entsprechenden Reibungs-Coeffizienten bezeichnet. Man erhält dadurch keine neue Unbekannte in die Aufgabe, wenn nicht gerade der Werth von f selbst bestimmt werden soll; diese Bedingungsgleichungen entsprechen dann aber immer nur der Grenze des Gleichgewichtes, und sie werden, in Bezug auf f aufgelöst, zeigen, wie groß in jedem gegebenen Falle der Reibungs-Coeffizient wenigstens sein muß, damit das Gleichgewicht noch bestehen kann, und dieses wird um so mehr gesichert sein, je mehr der Reibungscoeffizient den so bestimmten Grenzwerth überschreitet.

§. 132.

Einige einfache Beispiele mögen das Vorhergehende erläutern und die Art und Weise der Anwendung zeigen.

Eine schwere Gerade (ein Stab oder Balken) BC, Fig. 89, stützt sich mit ihren Endpunkten an die Schenkel AX und AY eines rechten Winkels (an einen horizontalen Boden und eine lothrechte Wand), von denen AY mit der Richtung der Schwere parallel ist; es soll die längs der Geraden AX gerichtete Kraft P gesucht werden, welche die Gerade BC,

wenn sie mit der AX den Winkel φ bildet, am Ausgleiten verhindert, also im Gleichgewicht erhält.

Nimmt man die beiden Schenkel des rechten Winkels als Achsen der x und y, dessen Scheitel also als Anfangspunkt, bezeichnet die Länge der Geraden BC mit l, ihr Gewicht, das in ihrem Schwerpunkte oder in ihrer Mitte D angreift, mit Q, den normalen Widerstand der Geraden AX mit N, den der Geraden AY mit N', und beachtet, daß dieser im Punkte C, jener im Punkte B angreift, so erhält man folgende Zusammenstellung der in dieser Aufgabe vorkommenden Kräfte, ihrer Richtungswinkel und der Coordinaten ihrer Angriffspunkte.

Intensitäten	(P) :	Q ,	N ,	N' ,	P ,
Richtungswinkel	$(\widehat{Px})$:	$\frac{2}{3}\pi$,	$\frac{1}{2}\pi$,	0 ,	π ,
Coordinaten der	(x) :	$\frac{1}{2}l\cos\varphi$,	$l\cos\varphi$,	0 ,	$l\cos\varphi$,
Angriffspunkte	(y) :	$\frac{1}{2}l\sin\varphi$,	0 ,	$l\sin\varphi$,	0

damit ergeben sich für das Gleichgewicht die Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma . P\cos\widehat{Px} = \quad N' - P = 0 \;, \quad N' = P$$

$$\Sigma . P\sin\widehat{Px} = -Q + N = 0 \;, \quad N = Q$$

$$\Sigma . P(x\sin\widehat{Px} - y\cos\widehat{Px}) = -\frac{1}{2}Ql\cos\varphi + Nl\cos\varphi - N'l\sin\varphi = 0$$

und aus der letzten zieht man durch Einführung der Werthe von N und N' den gesuchten Werth von P:

$$P = \frac{1}{2}Q\cot\varphi \;.$$

Man hat also $P = 0$, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, weil dann die Gerade lothrecht steht und kein Bestreben zum Ausgleiten hat; $P = Q$ für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$; $P = \infty$ für $\varphi = 0$, d. h. wenn der Winkel φ sehr klein geworden ist, so kann nur eine sehr große Kraft die Gerade am Ausgleiten und vollständigen Niedersinken hindern; wenn aber der Winkel φ wirklich Null ist, und die Gerade BC eine horizontale Lage hat, so gibt es gar keine Kraft P mehr, welche diese Gerade, die nur noch im Punkte B gestützt ist, in dieser Lage erhalten könnte.

Umgekehrt findet man aus der vorhergehenden Gleichung

$$tang\,\varphi = \frac{Q}{2P},$$

und dadurch den kleinsten Winkel φ, unter welchem die Gerade BC vermöge einer gegebenen Kraft P im Gleichgewichte bleiben kann.

Soll dieses letztere nicht durch eine besondere Kraft P, sondern durch die in den Punkten B und C, Fig. 90, bewirkte Reibung erhalten und der kleinste Winkel φ bestimmt werden, unter welchem es möglich ist, so führt man statt der Kraft P die Kräfte (Reibungen) fN und f'N'. in die obige Zusammenstellung ein, indem man den Reibungscoeffizient für die Gerade AX mit f, für die AY mit f' bezeichnet, und beachtet, daß die Kraft fN wie die Kraft P gerichtet ist und wie diese in B angreift, während die Reibung f'N' in C längs der OY thätig gedacht werden muß. Man erhält auf diese Weise die Gleichungen:

$$\Sigma.P\,cos\,\widehat{Px} = N' - fN = 0\,,$$

$$\Sigma.P\,sin\,\widehat{Px} = -Q + N + f'N' = 0\,,$$

$$\Sigma.P(x\,sin\,\widehat{Px} - y\,cos\,\widehat{Px}) = -\frac{1}{2}Ql\,cos\,\varphi + Nl\,cos\,\varphi - N'l\,sin\,\varphi = 0,$$

und zieht daraus nach und nach $N' = fN$ und die Werthe:

$$N = Q\frac{1}{1+ff'}\,, \quad N' = Q\frac{f}{1+ff'}\,,$$

durch welche die dritte dieser Gleichungen die Form annimmt:

$$1 - f\,tang\,\varphi = \frac{1}{2}(1+ff')\,,$$

und den für den Winkel φ gesuchten Ausdruck gibt:

$$tang\,\varphi = \frac{1-ff'}{2f}\,;$$

der Winkel φ ist demnach unabhängig von Q und nur eine Function der beiden Reibungscoeffizienten.

Wenn $f = f' = tang\,\varrho$ wird, so hat man

$$cot\,\varphi = \frac{2f}{1-f^2} = \frac{2\,tang\,\varrho}{1-tang^2\varrho} = tang\,2\varrho\,, \quad \varphi = \frac{1}{2}\pi - 2\varrho\,;$$

für $f = \frac{1}{2}$, $\varrho = 26^\circ\, 34'$ wird demnach $tang\,\varphi = \frac{3}{4}$, $\varphi = 36^\circ\, 52'$. Unter derselben Voraussetzung nehmen die Werthe der drückenden Kräfte N und N′ die Formen an:

$$N = Q\frac{1}{1+f^2} = Q\cos^2\varrho \quad , \quad N' = Q\frac{f}{1+f^2} = Q\sin\varrho\cos\varrho$$

$$= \frac{1}{2}Q(1+\cos 2\varrho) \qquad\qquad = \frac{1}{2}Q\sin 2\varrho \; ,$$

und die Reibungen fN und f′N′ werden durch

$$fN = \frac{1}{2}Q\sin 2\varrho \quad , \quad fN' = Q\sin^2\varrho = \frac{1}{2}Q(1-\cos 2\varrho)$$

ausgedrückt.

Legt man demnach die gegebene Gerade BC, Fig. 91, so an die lothrechte Linie AY an, daß sie mit dieser den doppelten Reibungswinkel $2\varrho = \widehat{ACB}$ bildet, so wird sie mit der AX den Winkel φ einschließen, also die äußerste Lage haben, welche sie, ohne auszugleiten, annehmen kann, und wenn man dann das Gewicht Q durch die Länge BC selbst vorstellt, von der Mitte O mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}Q = OB$ einen Kreis beschreibt und den vertikalen Durchmesser aOb zieht, so ist leicht aus den vorhergehenden Werthen zu schließen, daß die Gerade BN den Druck N, die CN′ den Druck N′, die B.fN die Reibung fN und die Nb oder C.fN′ die Reibung fN′ der Größe und Richtung nach vorstellen wird; durch diese einfache Construction kann also die Aufgabe, wenn ϱ bekannt ist, in jeder Hinsicht vollständig aufgelöst werden. In der Figur ist übrigens auch angedeutet, wie ϱ selbst durch Construction aus dem Werthe von f gefunden wird und zwar unter der Voraussetzung, daß $f = \frac{1}{2}$ sei.

Die Auflösung des allgemeinen Falles, in welchem das Gleichgewicht durch die Reibung allein nicht besteht, sondern durch eine Kraft P hergestellt werden muß, deren Richtung gegeben ist, wird nun keine Schwierigkeit mehr haben und soll dem Leser überlassen bleiben.

§. 133.

Ein schwerer Kreis (Cylinder), dessen Gewicht Q und dessen Halbmesser r sei, soll auf einer Geraden (Ebene), welche mit der Richtung der Schwere den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ bildet, mittels der Reibung und einer am Umfange tangential angreifenden Kraft P im Gleichgewicht gehalten

werden; man suche die Beziehungen dieser Kraft und ihrer Richtung zu den Gegebenen.

Dazu lege man den Anfang der Coordinaten in den Berührungspunkt A des Kreises und der Geraden BC, Fig. 92, und nehme diese letztere als Achse der x so, daß deren positive Hälfte von A nach B gerichtet ist und die in O angreifende Kraft Q mit dieser den Winkel $\frac{3}{2}\pi - \alpha$ einschließt; den im Berührungspunkte von der Geraden BC geleisteten Widerstand bezeichne man mit N, also die längs AB wirkende Reibung mit fN, endlich den Winkel bOD, welchen der zum Angriffspunkte D der Kraft P gezogene Halbmesser OD mit der Parallelen Ob zur Achse der x bildet, mit φ; man erhält dann folgende Uebersicht für die an dem gegebenen System angreifenden Kräfte, deren Richtungen und Angriffspunkte.

(P)	:	Q	N	fN	P
$(\widehat{Px})$	:	$\frac{3}{2}\pi - \alpha$	$\frac{1}{2}\pi$	0	$\varphi - \frac{1}{2}\pi$
(x)	:	0	0	0	$r\cos\varphi$
(y)	:	r	0	0	$r(1+\sin\varphi)$

und damit werden die Bedingungen für das Gleichgewicht

$$\Sigma . P\cos\widehat{Px} = -Q\sin\alpha + fN + P\sin\varphi = 0$$

$$\Sigma . P\sin\widehat{Px} = -Q\cos\alpha + N + P\cos\varphi = 0$$

$$\Sigma . Pp = Qr\sin\alpha - P[r\cos^2\varphi + r(1+\sin\varphi)\sin\varphi] = 0 .$$

Aus der letzten dieser Gleichungen zieht man sogleich die Beziehung:

$$P(1+\sin\varphi) = Q\sin\alpha \quad , \quad P = Q\frac{\sin\alpha}{1+\sin\varphi} , \qquad \text{(a.}$$

welche von der Reibung gänzlich unabhängig erscheint. Eliminirt man sodann aus den beiden ersten die Unbekannte N, so findet man eine zweite Beziehung zwischen P und Q, nämlich

$$P(\sin\varphi + f\cos\varphi) = Q(\sin\alpha - f\cos\alpha) ,$$

oder

$$P = Q\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\varphi + f\cos\varphi} , \qquad \text{(b.}$$

und die Vergleichung dieses Werthes von P mit dem vorhergehenden gibt eine Gleichung, aus welcher der Winkel φ bestimmt werden kann; man findet nämlich

$$\sin(\alpha+\varphi)=\frac{\sin\alpha-f\cos\alpha}{f},$$

oder, wenn $tang\,\rho$ für f eingeführt wird,

c.) $$\sin(\alpha+\varphi)=\frac{\sin(\alpha-\rho)}{\sin\rho},$$

Diese Gleichung gibt im Allgemeinen zwei Werthe für φ, und wenn diese berechnet sind, zieht man aus einem der beiden obigen Ausdrücke (a) und (b) für P die entsprechenden Intensitäten dieser Kraft; unsere Aufgabe hat dadurch eine bestimmte Auflösung gefunden und scheint demnach auch für gegebene Werthe von α und f nur eine bestimmte Auflösung zuzulassen. Die so bestimmten Werthe von P und φ gelten aber, wie am Ende des §. 131 bereits bemerkt wurde, nur für die Grenzen des Gleichgewichtes, und es gibt noch viele andere Werthe von P und φ außer den so berechneten, welche dem Gleichgewichte genügen. Es ist daher zweckmäßiger, anstatt wie vorher den Winkel φ in Function von α und f zu bestimmen, f oder ρ in Function von α und φ auszudrücken und darnach zu beurtheilen, welches der kleinste Werth von f oder ρ für ein beliebig angenommenes φ und ein darnach aus Gleichung (a) berechnetes P sein darf; das Gleichgewicht wird dann auch für alle größern Werthe von f gesichert sein. Man hat dazu die Gleichung:

$$f=tang\,\rho=tang\,\alpha\,\frac{1}{1+\sin\varphi+tang\,\alpha\cos\varphi},$$

und diese zeigt, daß f überhaupt den kleinsten Werth erhalten kann, wenn $\varphi=\frac{1}{2}\pi-\alpha$ ist, oder wenn die Kraft am oberen Ende E des verticalen Durchmessers angreift, also horizontal gerichtet ist; denn man hat für einen kleinsten Werth von f

$$\frac{df}{d\varphi}=0=tang\,\alpha\,\frac{tang\,\alpha\sin\varphi-\cos\varphi}{(1+\sin\varphi+tang\,\alpha\cos\varphi)^2}$$

oder

$$0=tang\,\alpha\,tang\,\varphi-1,$$

und es leuchtet ein, daß das vorstehende Aenderungsgesetz von f in Bezug auf φ das Zeichen wechselt, wenn φ von einem kleinern Werthe als $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ zu einem größern übergeht, indem es für jenen negativ ist, für diesen aber positiv wird. Man schließt daraus, daß der genannte Werth von φ selbst einem kleinsten Werth von f entspricht, und findet damit als diesen kleinsten Werth

$$f = tang\,\varrho = tang\,\frac{1}{2}\alpha\ , \quad \varrho = \frac{1}{2}\alpha\ .$$

Es geht dies nun leicht auch aus der Gleichung (c) hervor, denn diese gibt für $\varrho = \frac{1}{2}\alpha$, $sin\,(\alpha + \varphi) = 1$, während für $\varrho < \frac{1}{2}\alpha$ nach derselben $sin\,(\alpha + \varphi) > 1$ werden müßte, φ also imaginär würde.

Damit also die oben gestellte Aufgabe überhaupt zu erfüllen ist, muß der Reibungscoeffizient zwischen dem Kreis und der Geraden wenigstens der Tangente des halben Neigungswinkel der letztern gegen die Wagrechte gleich sein, und die entsprechende Intensität der am obersten Punkte des Kreises horizontal angreifenden Kraft P ist nach Gleichung (a)

$$P = Q\,tang\,\frac{1}{2}\alpha\ .$$

Soll dagegen die Kraft P parallel zu der Geraden AB gerichtet sein, so hat man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, damit ergibt sich als kleinster Werth von f

$$f = tang\,\varrho = \frac{1}{2}\,tang\,\alpha\ ,$$

und der entsprechende Werth von P ist, wie auf der Hand liegt,

$$P = \frac{1}{2}\,Q\,sin\,\alpha\ .$$

Soll endlich P vertical gerichtet sein, also entweder in F oder in G, Fig. 93, angreifen, so hat man

$$\varphi = \pi - \alpha \quad \text{oder} \quad \varphi = 2\pi - \alpha\ ;$$

und in beiden Fällen als kleinsten Werth von f oder ϱ

$$f = tang\,\varrho = tang\,\alpha\ , \quad \text{also} \quad \varrho = \alpha\ .$$

Die entsprechenden Werthe von P sind nun

$$P = Q\,\frac{sin\,\alpha}{1 + sin\,\alpha} \quad \text{und} \quad P = Q\,\frac{sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}\ ,$$

wie sich leicht aus dem Anblick der Fig. 93 ergibt, da man es in diesen beiden Fällen nur mit zwei parallelen Kräften zu thun hat, deren Resultirende durch den Mittelpunkt A gehen muß.

Die vorhergehende Aufgabe wollen wir endlich noch dahin abändern, daß der bewegliche Kreis (Cylinder) in einem festen Kreise von größerem Halbmesser (hohlen Cylinder) ABC, Fig. 94, ruhe, daß in seinem Mittelpunkte O irgend eine Kraft Q

in einer beliebigen Richtung angreife und daß die Intensität des Momentes M zu suchen sei, welches diesen Kreis mittels der Reibung im Gleichgewichte erhält.

Sei B der Berührungspunkt beider Kreise in der Lage des Gleichgewichtes und BT ihre gemeinschaftliche Tangente in diesem Punkte; dieser parallel sei die Achse der x durch den Mittelpunkt O des beweglichen Kreises gelegt, und der unbekannte Winkel, welchen die Richtung der Kraft Q mit der durch die Mittelpunkte beider Kreise gehenden Achse der y oder mit der Richtung des normalen Widerstandes N bildet, mit φ bezeichnet. Man findet damit die einfachen Gleichungen:

$$\Sigma . P \cos \widehat{Px} = Q \sin \varphi + fN = 0 \,, \quad \Sigma . P \sin \widehat{Px} = Q \cos \varphi + N = 0$$

$$\Sigma . Pp = M - fNr = 0 \,,$$

von denen die beiden ersten, wenn man ihre Glieder durch das Gleichheitszeichen trennt und dann die erste durch die zweite dividirt, sogleich

$$\operatorname{tang} \varphi = f = \operatorname{tang} \varrho \quad , \qquad \varphi = \varrho$$

geben und dadurch zeigen, daß der bewegliche Kreis durch die von dem Momente bewirkte Drehung in dem festen fortrollt, bis die gemeinschaftliche Normale im Berührungspunkte den Reibungswinkel ϱ mit der Richtung der Kraft Q einschließt. Es kann daher im jetzigen Falle, d. h. mittels eines Momentes, der Kreis auf einer Geraden nur dann im Gleichgewicht erhalten werden, wenn die letztere den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \varrho$ mit der Richtung der Schwere bildet.

Erhebt man ferner die genannten Gleichungen nach erfolgter Trennung ihrer Glieder zum Quadrat und nimmt die Wurzel aus ihrer Summe, so findet man

$$N = Q \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}} = Q \cos \varrho \,,$$

und die dritte Gleichung gibt dadurch:

$$M = Qr \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = Qr \sin \varrho \,.$$

Man sieht daraus, daß der Normaldruck N kleiner ist, als die Kraft Q und zwar im Verhältnisse von $1 : \cos \varrho$, und daß sich dadurch auch das Moment der Reibung um etwas vermindert, indem es nicht mehr fQr oder $Qr \operatorname{tang} \varrho$ ist, sondern $Qr \sin \varrho$.

III. Gleichgewicht eines festen Systems mit beliebigen Kräften.

§. 134.

Im fünften Kapitel des vorigen Abschnittes ist nachgewiesen worden, daß die Gesammtwirkung einer beliebigen Anzahl von Kräften, welche beliebige Richtungen haben und an beliebigen Punkten eines festen Systems angreifen, immer durch die Wirkung einer einzigen fördernden Kraft R und durch die eines Momentes M_R ersetzt werden, beziehungsweise auf diese beiden Wirkungen zurückgeführt werden kann, daß im Allgemeinen aber die Richtung der ersteren nicht in die Ebene des Momentes fällt und daß es dann keine allgemeine Resultirende des Systems der Kräfte gibt. Es kann daher im Allgemeinen und wenn das System ganz frei ist nur dann Gleichgewicht statthaben, wenn jede dieser beiden von einander unabhängigen Wirkungen für sich Null ist, d. h. wenn das System der gegebenen Kräfte weder eine fördernde noch eine drehende Wirkung auf das feste System ihrer Angriffspunkte hervorbringt. Die beiden nothwendigen und genügenden Hauptbedingungen für das Gleichgewicht sind demnach für ein freies System

$$R = 0 \qquad M_R = 0 \,.$$

Jede derselben läßt sich aber durch drei andere ersetzen, durch welche die Bedingungen des Gleichgewichtes sogleich mittels der gegebenen Kräfte, ihrer Richtungen und Angriffspunkte ausgedrückt werden.

Nimmt man nämlich statt der fördernden Resultirenden R ihre rechtwinkligen Componenten X, Y, Z, so wird man wie in §. 17 des ersten Buches schließen, daß das Gleichgewicht gegen die fortschreitende Bewegung nur bestehen kann, wenn jede dieser drei Kräfte, deren Richtungen nicht in derselben Ebene liegen, für sich Null ist, und man erhält dadurch statt der Gleichung R = 0, die drei folgenden:

$$X = \Sigma . P \cos \widehat{Px} = 0 \,, \quad Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py} = 0 \,, \quad Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz} = 0 \,, \quad (104.$$

von denen jede das Gleichgewicht des Systems längs einer der drei Coordinaten-Achsen verbürgt.

Ebenso kann man das Moment M_R durch seine drei rechtwinkligen Componenten: M_X, M_Y, M_Z ersetzen und gemäß der Analogie, welche zwischen den fördernden Kräften und den Achsen der Momente besteht,

schließen, daß auch das Gleichgewicht gegen die drehende Bewegung nur bestehen kann, wenn jedes dieser drei Momente für sich Null ist, wodurch sich statt der Gleichung: $M_R = 0$ die drei neuen Gleichungen:

$$105.)\quad \begin{cases} M_X = \Sigma . P(y \cos\widehat{Pz} - z \cos\widehat{Py}) = 0 \\ M_Y = \Sigma . P(z \cos\widehat{Px} - x \cos\widehat{Pz}) = 0 \\ M_Z = \Sigma . P(x \cos\widehat{Py} - y \cos\widehat{Px}) = 0 \end{cases}$$

ergeben, von denen jede das Gleichgewicht des Systems um eine der drei Achsen verbürgt.

Umgekehrt ist leicht zu sehen, daß immer Gleichgewicht stattfinden muß, wenn die vorhergehenden sechs Gleichungen befriedigt sind; denn aus ihnen folgen sogleich die beiden Gleichungen:

$$R = 0 \quad , \quad M_R = 0 \, ,$$

welche aussprechen, daß weder für die fortschreitende Bewegung des Systems, noch für die drehende ein Grund vorhanden ist. Es läßt sich aber auch hier zeigen, daß wenn jenen Gleichungen Genüge geleistet wird, das System immer durch zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte ersetzt werden kann, welche sich nothwendig im Gleichgewicht halten müssen.

Denn nimmt man die Kraft P von den übrigen hinweg und bezeichnet die Resultirende aller fördernden Kräfte P′, P″, etc. mit R′, deren Componenten nach den drei Achsen mit X′, Y′, Z′ und ihre Richtungswinkel, wie gewöhnlich, mit $\widehat{R'x}$, $\widehat{R'y}$, $\widehat{R'z}$; ebenso das resultirende Moment aller drehenden Kräfte, die sich durch die Zerlegung der von jenen Kräften erzeugten Wirkung in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten ergeben, mit M_R', und seine Componenten in den drei Coordinaten-Ebenen mit M_Z', M_Y', M_X', so werden die Gleichungen (104)

$$a.)\quad \begin{cases} \Sigma . P \cos\widehat{Px} = P \cos\widehat{Px} + R' \cos\widehat{R'x} = 0 \, , \\ \Sigma . P \cos\widehat{Py} = P \cos\widehat{Py} + R' \cos\widehat{R'y} = 0 \, , \\ \Sigma . P \cos\widehat{Pz} = P \cos\widehat{Pz} + R' \cos\widehat{R'z} = 0 \, , \end{cases}$$

und die Gleichungen (105) geben

$$\left.\begin{aligned} M_z &= M_z' + P\,(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px}) = 0 \\ M_y &= M_y' + P\,(z\cos\widehat{Px} - x\cos\widehat{Pz}) = 0 \\ M_x &= M_x' + P\,(y\cos\widehat{Pz} - z\cos\widehat{Py}) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (b.$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst, daß die Kräfte P', P'', etc. eine einzige allgemeine Resultirende haben; denn führt man in die für diesen Fall in §. 82 gefundene Bedingungsgleichung (52), welche nun die Form:

$$X' M_x' + Y' M_y' + Z' M_z' = 0$$

annimmt, für X', M_x', u. s. f. die Werthe ein, welche aus den obigen Gleichungen folgen, so erhält man offenbar Null als Ergebniß. Man hat demnach auch durch die Gleichungen (b)

$$M_z' = R'\,(X'\cos\widehat{R'y} - Y'\cos\widehat{R'x}) = -P\,(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px}),$$

$$M_y' = R'\,(Z'\cos\widehat{R'x} - X'\cos\widehat{R'z}) = -P\,(z\cos\widehat{Px} - x\cos\widehat{Pz}),$$

$$M_x' = R'\,(Y'\cos\widehat{R'z} - Z'\cos\widehat{R'y}) = -P\,(y\cos\widehat{Pz} - z\cos\widehat{Py}).$$

Die Gleichungen (a) geben aber wie in §. 18 des ersten Buches

$$\left.\begin{aligned} R' &= P\;, & \cos\widehat{R'x} &= -\cos\widehat{Px}\,, \\ \cos\widehat{R'y} &= -\cos\widehat{Py}\;, & \cos\widehat{R'z} &= -\cos\widehat{Pz}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (c.$$

und damit nehmen die vorhergehenden Gleichungen die Formen von Gleichungen einer Geraden an, welche durch die Angriffspunkte $X'\,Y'\,Z'$ und $x\,y\,z$ der Kräfte R' und P geht; denn sie werden dadurch

$$\left.\begin{aligned} \frac{X'-x}{\cos\widehat{Px}} - \frac{Y'-y}{\cos\widehat{Py}} &= 0 \\ \frac{Z'-z}{\cos\widehat{Pz}} - \frac{X'-x}{\cos\widehat{Px}} &= 0 \\ \frac{Y'-y}{\cos\widehat{Py}} - \frac{Z'-z}{\cos\widehat{Pz}} &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (d.$$

Während demnach die Gleichungen (c) aussprechen, daß die beiden Kräfte P und R', welche das ganze System der gegebenen Kräfte ver=

treten, einander gleich, der Richtung nach parallel, und dem Sinne nach entgegengesetzt sind, drücken die Gleichungen (d) aus, daß ihre Angriffspunkte auf einer zu ihrer gemeinschaftlichen Richtung parallelen Geraden liegen, daß folglich diese Kräfte einander direct entgegengesetzt sind und sich das Gleichgewicht halten.

§. 135.

Die oben gefundenen sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht können ferner dazu dienen, im Allgemeinen die Werthe von sechs in einer Aufgabe vorkommenden nicht bestimmten Größen in der Weise zu bestimmen, daß das System im Gleichgewichte bleibt; unter diesen sechs Unbekannten dürfen indessen nicht die Coordinaten des Angriffspunktes einer Kraft enthalten sein, wie dies schon aus der öfter gemachten Wahrnehmung, daß es bei einem festen System für eine Kraft keinen bestimmten Angriffspunkt gibt, folgen muß. Es folgt diese Beschränkung aber auch aus der Form der Gleichungen (105), welche allein zur Bestimmung jener Coordinaten dienen können; denn bezeichnet man die Kraft, deren Angriffspunkt bestimmt werden soll, mit P und setzt zur Abkürzung

$$P\cos\widehat{Px} = a \quad , \qquad P\cos\widehat{Py} = b \quad , \qquad P\cos\widehat{Pz} = c \, ,$$

und die Componenten des resultirenden Momentes aller andern Kräfte außer P

$$M_x' = f \quad , \qquad M_y' = g \quad , \qquad M_z' = h \, ,$$

so nehmen die genannten Gleichungen oder die Gleichungen (b) im vorhergehenden §. die Form an:

$$\begin{cases} ay - bx = h \, , \\ cx - az = g \, , \\ bz - cy = f \, , \end{cases}$$

welche zeigt, daß diese Gleichungen nicht vollkommen unabhängig von einander sind, wie es zur Bestimmung dreier Unbekannten aus drei Gleichungen nothwendig ist, daß vielmehr die Möglichkeit, sie durch dieselben Werthe von x, y und z zu befriedigen an die Bedingung:

$$af + by + ch = 0$$

oder

$$M_x' . P\cos\widehat{Px} + M_y' . P\cos\widehat{Py} + M_z' . P\cos\widehat{Pz} = 0$$

gebunden ist, die ausdrückt, daß das System aller übrigen Kräfte außer P eine allgemeine Resultirende hat, welcher die Kraft P im Falle des Gleichgewichtes gleich und direct entgegengesetzt sein muß. Ist aber diese Bedingung wirklich erfüllt, so ist die dritte der vorhergehenden Gleichungen eine Folge der beiden ersten und es können daraus die drei Unbekannten x, y und z nicht gefunden werden, und wenn dieselbe nicht befriedigt wird, so kann die Kraft P allein das System nicht im Gleichgewichte halten; man kann dann aber eines der nothwendigen Stücke (Intensität, Richtungswinkel oder Angriffspunkt) einer neuen Kraft Q so bestimmen, daß durch ihre Mitwirkung der vorhergehenden Bedingung Genüge geleistet und das System im Gleichgewicht erhalten wird.

Soll z. B. das in §. 88 berechnete System im Gleichgewicht gehalten werden, so wird dies nur möglich sein, wenn demselben die dort berechnete oder eine andere unter derselben Voraussetzung bestimmte Kraft Q hinzugefügt wird. Nimmt man die gleich 11,98 Kil. berechnete Kraft, deren Richtung mit der negativen Achse der z zusammenfällt, so wird eine Kraft P = 8,95 Kil., welche der daselbst gefundenen Resultirenden R' gleich und direct entgegengesetzt ist, deren Richtung also mit den drei Achsen die Winkel:

$$\widehat{Px} = 32^\circ 40',6 \quad , \quad \widehat{Py} = 76^\circ 17',5 \quad , \quad \widehat{Pz} = 60^\circ 58',7$$

einschließt, und durch die Gleichungen:

$$y = 0,282\,x - 8,984$$
$$z = 0,485\,x - 5,114$$

der Lage nach bestimmt wird, das Gleichgewicht herstellen.

Betrachten wir noch den besondern Fall, wo alle Angriffspunkte in derselben Ebene liegen, indem wir diese Ebene als Ebene der xy annehmen, so daß alle z Null werden, so finden wir als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zuerst die unveränderten Gleichungen (104), nämlich

$$\Sigma.P\cos\widehat{Px} = 0 \quad , \quad \Sigma.P\cos\widehat{Py} = 0 \quad , \quad \Sigma.P\cos\widehat{Pz} = 0\,;$$

die Gleichungen (105) dagegen nehmen die Form an:

$$\Sigma.Py\cos\widehat{Pz} = 0, \quad \Sigma.Px\cos\widehat{Pz} = 0, \quad \Sigma.P(x\cos\widehat{Py} - y\cos\widehat{Px}) = 0,$$

und zeigen, daß nicht alle $\cos \widehat{Pz}$ gleiche Zeichen haben dürfen, daß also ein Theil der Kräfte die Ebene der xy im Sinne der positiven z, der andere im Sinne der negativen z muß bewegen wollen, wie dies von selbst einleuchtet. Die drei mittleren dieser sechs Gleichungen

$$\Sigma . P \cos \widehat{Pz} = 0 \quad , \quad \Sigma . Py \cos \widehat{Pz} = 0 \quad , \quad \Sigma . Px \cos \widehat{Pz} = 0$$

werden unabhängig von jedem besondern Werthe von P, x und y befriedigt, wenn alle $\cos \widehat{Pz} = 0$ oder alle $\widehat{Pz} = \frac{1}{2}\pi$ sind, d. h. wenn die Richtungen aller Kräfte in die Ebene ihrer Angriffspunkte fallen, und es bleiben dann blos die beiden ersten und die letzte der vorhergehenden Gleichungen als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht übrig, wie in §. 129 gefunden wurde.

Werden endlich die Richtungen aller Kräfte parallel, also alle Winkel $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$, $\widehat{Pz}$ einander gleich und demnach $\cos \widehat{Px}$, $\cos \widehat{Py}$, $\cos \widehat{Pz}$ gemeinschaftliche Factoren aller Glieder derselben Summe, so werden die Bedingungsgleichungen (104) befriedigt, wenn $\Sigma . P = 0$, und die Gleichungen (105), wenn man $\Sigma . Px = 0$, $\Sigma . Py = 0$, $\Sigma . Pz = 0$ hat, und diese Bedingungen sind dieselben, wie die in §. 124 gefundenen Gleichungen (94); sie enthalten aber wegen der allgemeinen Lage des Coordinatensystems eine überflüssige Bestimmung.

§. 136.

Wenn das System nicht ganz frei sich bewegen kann, so ist es für das Gleichgewicht desselben nicht mehr nothwendig, daß alle sechs der vorhergefundenen Bedingungsgleichungen befriedigt werden; es werden vielmehr von denselben um so mehr entbehrlich werden, je mehr Beschränkungen das System in seiner Bewegung unterworfen wird. Im Allgemeinen wird man aber dabei am sichersten gehen, wenn man diese Beschränkungen oder Hindernisse der Bewegung als Kräfte von unbekannter Intensität, zuweilen auch von unbekannter Richtung in die sechs Bedingungsgleichungen (104) und (105) einführt und die Unbekannten durch Elimination daraus entfernt. Dieses Verfahren wird namentlich dann nothwendig, wenn einem oder mehreren Punkten des Systems die Beschränkung auferlegt wird, auf einer gegebenen Curve oder Fläche zu bleiben, oder mit unbiegsamen Flächen an festen Punkten oder Linien hinzugleiten, und wenn die Richtung oder Intensität einer Kraft

bestimmt werden soll, welche das System im Gleichgewicht erhält, oder die Lage des ganzen Systems, in welcher es von selbst oder unter Mitwirkung der Reibung im Gleichgewichte bleibt.

Als einfaches Beispiel diene folgende Aufgabe.

Ein prismatischer Stab stützt sich mit dem einen Ende auf eine horizontale Ebene, mit dem andern an eine verticale Wand, so daß seine Projection auf der letztern einen Winkel φ mit einer lothrechten Geraden bildet; welches wird der größte Werth des Winkels φ, und welches der des Winkels ϑ sein, den der Stab mit seinen horizontalen Projection vermöge der an der Wand und auf dem Boden erzeugten Reibung bilden kann, ohne nach irgend einer Richtung auszugleiten?

Die horizontale Ebene, auf welche sich der Stab, dessen geometrische Achse durch die Gerade AB, Fig. 95 vorgestellt ist, stützt, sei die der xy, die verticale Wand die der yz, und die Ebene der xz werde durch den Endpunkt A des Stabes gelegt, wenn er sich in der äußersten Gleichgewichtslage, die wir suchen, befindet; der Anfangspunkt der Coordinaten wird dann die Projection C des Punktes A auf der verticalen Wand sein, und Ab die horizontale, BC die verticale Projection des Stabes (beziehungsweise seiner Achse) vorstellen, dessen Länge mit l, und dessen Gewicht, welches im Schwerpunkte O angreift, mit Q bezeichnet sei. Den Widerstand, den die Ebene der xy gegen den auf sie ausgeübten Druck leisten muß, stellen wir durch eine normale Kraft N_1, den, welchen die Ebene der yz darbieten muß, durch eine normale Kraft N_2 vor, beide von unbekannter Intensität. Die Reibung auf der ersten Ebene wird dann $f_1 N_1$, die auf der letztern $f_2 N_2$ sein; die Richtungen dieser Kräfte sind aber auch noch unbekannt, da es von der Größe der Reibungscoeffizienten f_1 und f_2 abhängen wird, welchen Weg die Punkte A und B beschreiben wollen. Wir haben demnach in unserer Aufgabe sechs unbekannte Größen, nämlich die Kräfte N_1 und N_2, die beiden Winkel φ und ϑ, und die Winkel ω_1 und ω_2, welcher von den Richtungen der widerstehenden Kräfte $f_1 N_1$ und $f_2 N_2$, der eine mit der Achse der x in der Ebene der xy, der andere mit der Achse der z in der Ebene der yz, gebildet werden; die Aufgabe scheint demnach bestimmt zu sein, und nur eine Auflösung zuzulassen.

Stellen wir nun zuerst die an dem System thätigen Kräfte mit ihren Richtungswinkeln und den Coordinaten ihrer Angriffspunkte zusammen, so ergibt sich folgende Uebersicht:

(P) :	Q ,	N_1 ,	$f_1 N_1$,	N_2 ,	$f_2 N_2$,
$(\widehat{Px})$:	$\frac{1}{2}\pi$,	$\frac{1}{2}\pi$,	ω_1 ,	0 ,	$\frac{1}{2}\pi$,
$(\widehat{Py})$:	$\frac{1}{2}\pi$,	$\frac{1}{2}\pi$,	$\frac{1}{2}\pi - \omega_1$,	$\frac{1}{2}\pi$,	$\frac{1}{2}\pi + \omega_2$,
$(\widehat{Pz})$:	π ,	0 ,	$\frac{1}{2}\pi$,	$\frac{1}{2}\pi$,	ω_2 ,
(x) :	$\frac{1}{2} l \cos\lambda$,	$l \cos\lambda$,		0 ,	
(y) :	$\frac{1}{2} l \sin\lambda \sin\varphi$,	0 ,		$l \sin\lambda \sin\varphi$,	
(z) :	$\frac{1}{2} l \sin\lambda \cos\varphi$,	0 ,		$l \sin\lambda \cos\varphi$,	

worin λ noch den Winkel bezeichnet, den die Gerade AB mit der Achse der x einschließt, und welcher mit den Winkeln φ und ϑ durch die Gleichung: $\sin\lambda = \frac{\sin\vartheta}{\cos\varphi}$ in Verbindung steht.

Die drei ersten Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht werden dadurch

$$\text{a.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 N_1 \cos\omega_1 + N_2 = 0 \ , \\ f_1 N_1 \sin\omega_1 - f_2 N_2 \sin\omega_2 = 0 \ , \\ -Q + N_1 + f_2 N_2 \cos\omega_2 = 0 \ , \end{array} \right.$$

und enthalten vier Unbekannte. Die beiden ersten geben durch Elimination von ω_1

$$N_1 = N_2 \frac{\sqrt{1 + f_2^2 \sin^2\omega_2}}{f_1} \ ,$$

wodurch mittels der dritten gefunden wird

$$N_1 = Q \frac{\sqrt{1 + f_2^2 \sin^2\omega_2}}{f_1 f_2 \cos\omega_2 + \sqrt{1 + f_2^2 \sin^2\omega_2}} \ ,$$

$$N_2 = Q \frac{f_1}{f_1 f_2 \cos\omega_2 + \sqrt{1 + f_2^2 \sin^2\omega_2}} \ .$$

Für das Gleichgewicht der Momente hat man ferner

$$\left.\begin{aligned} f_1 N_1 l \cos\lambda \sin\omega_1 - N_2 l \sin\lambda \sin\varphi &= 0 \\ \tfrac{1}{2} Q l \cos\lambda - N_1 l \cos\lambda + N_2 l \sin\lambda \cos\varphi &= 0 \\ -\tfrac{1}{2} Q l \sin\lambda \sin\varphi + f_2 N_2 l \sin\lambda (\sin\varphi \cos\omega_2 + \cos\varphi \sin\omega_2) &= 0 \end{aligned}\right\} . \quad (b.$$

Ersetzt man in der ersten dieser Gleichungen $f_1 N_1 \sin\omega_1$ durch seinen Werth aus der zweiten der Gleichungen (a), so wird

$$f_2 \sin\omega_2 = \tan\lambda \sin\varphi \; ; \qquad (c.$$

die dritte der Gleichungen (a) gibt ferner

$$N_1 = Q - f_2 N_2 \cos\omega_2 \; ,$$

und die zweite der Gleichungen (b) nimmt damit die Form an:

$$(f_2 \cos\omega_2 + \tan\lambda \cos\varphi) N_2 = \tfrac{1}{2} Q \; ,$$

welche mittels des obigen Werthes von N_2 in Q in die folgende

$$2 f_1 \tan\lambda \cos\varphi = \sqrt{1 + f_2^2 \sin^2\omega_2} - f_1 f_2 \cos\omega_2 \qquad (d.$$

übergeht. Eliminirt man endlich aus der vorletzten Gleichung und der dritten der Gleichungen (b) den Quotient $\frac{Q}{2 N_2}$, so erhält man die Gleichung (c) wieder, also keine dritte Gleichung zwischen ω_2, φ und λ, und die Aufgabe bleibt unbestimmt; man kann demnach einen der Winkel φ oder ϑ willkürlich oder in Function des andern annehmen und diesen andern mittels der Gleichung, welche sich durch Elimination von ω_2 aus den Gleichungen (c) und (d) ergibt, berechnen; die Gleichung (c) gibt dann den Winkel ω_2, womit die Werthe von N_1 und N_2 und ω_1 gefunden werden können.

Wir können aber auch, um eine bestimmte Aufgabe zu erhalten, den Endpunkt A als unbeweglich, also gegen einen festen Punkt gestützt annehmen, dessen Widerstand parallel zu den drei Achsen die Componenten $W \cos\widehat{Wx}$, $W \cos\widehat{Wy}$, $W \cos\widehat{Wz}$ gibt. Es bleiben dann in unsern Gleichungen nur fünf Unbekannte, die drei ebengenannten, der normale Widerstand N der Ebene der yz und der Winkel φ, da nun λ constant ist, also ϑ von φ abhängt und der Endpunkt B sich auf der Ebene der yz nur in einem Kreise bewegen kann, die Richtung der Reibung fN demnach senkrecht zu dem Halbmesser OB ist und der

Winkel ω_2 das Complement des Winkels φ wird. Nach diesen Bemerkungen findet man als Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht:

$$\left\{\begin{array}{l} -W\cos\widehat{Wx}+N=0\,, \\ W\cos\widehat{Wy}-fN\cos\varphi=0\,, \\ -Q+W\cos\widehat{Wz}+fN\sin\varphi=0\,, \\ Wl\cos\widehat{Wy}\cos\lambda-Nl\sin\lambda\sin\varphi=0\,, \\ \frac{1}{2}Ql\cos\lambda-Wl\cos\widehat{Wz}\cos\lambda+N_2l\sin\lambda\cos\varphi=0\,, \\ -\frac{1}{2}Ql\sin\lambda\sin\varphi+fNl\sin\lambda=0\,. \end{array}\right.$$

Nimmt man hier den Werth von $W\cos\widehat{Wy}$ aus der zweiten Gleichung und führt ihn in die vierte ein, so folgt sogleich

$$f=\tang\lambda\tang\varphi\quad,\qquad \tang\varphi=f\cot\lambda\;;$$

wenn dann ebenso der Werth von $W\cos\widehat{Wz}$ aus der dritten gezogen und in die fünfte gesetzt wird, so wird diese

$$2N(f\sin\varphi+\tang\lambda\cos\varphi)=Q\;,$$

und mit dem aus der vorhergehenden Gleichung sich ergebenden Werthe von $\tang\lambda$ hat man

$$N=Q\frac{\sin\varphi}{2f}=\frac{1}{2}Q\frac{\cot\lambda}{\sqrt{1+f^2\cot^2\lambda}}\,.$$

Zuletzt zieht man aus den obigen Gleichungen die Werthe:

$$W\cos\widehat{Wx}=N=\frac{1}{2}Q\frac{\sin\varphi}{f}\quad,\qquad W\cos\widehat{Wy}=\frac{1}{2}Q\sin\varphi\cos\varphi\;,$$

$$W\cos\widehat{Wz}=\frac{1}{2}Q(1+\cos^2\varphi)\;,$$

womit Größe und Richtung des Widerstandes W gegeben ist.

§. 137.

Es gibt indessen mehrere Fälle, bei welchen man unmittelbar beurtheilen kann, welche der sechs Bedingungsgleichungen (104) und

(105) für das Gleichgewicht des in der Bewegung beschränkten Systems nothwendig, und welche derselben entbehrlich sind. Diese Fälle sind folgende:

1) Wenn das System einen festen Punkt enthält, so kann man diesen als Anfang der Coordinaten nehmen, und es wird dann die Gleichung $R = 0$ entbehrlich werden für das Gleichgewicht, da die Wirkung der fördernden Kraft R durch den festen Punkt aufgehoben wird; diese Kraft drückt nun die Größe des Widerstandes aus, welchen der feste Punkt muß leisten können, und ihre Richtung zeigt an, in welcher Richtung dieser Widerstand geleistet werden muß. Es bleiben also als Bedingungen für das Gleichgewicht nur noch $M_R = 0$ oder

$$M_X = 0 \quad , \qquad M_Y = 0 \quad , \qquad M_Z = 0$$

übrig, welche aussprechen, daß sich die Momente um den Anfangspunkt, den festen Punkt, geradeso das Gleichgewicht halten müssen, wie bei einem freien System; denn im entgegengesetzten Falle wäre kein Hinderniß für eine drehende Bewegung vorhanden. Diese Gleichungen enthalten aber auch, wie in §. 83 gezeigt wurde, die Bedingung, daß das ganze System eine allgemeine Resultirende hat, deren Richtung durch den Anfangspunkt, in unserm Falle durch den festen Punkt geht, und es leuchtet ein, daß diese Bedingung für das Gleichgewicht nothwendig und genügend ist.

2) Enthält das System zwei oder mehrere feste Punkte, welche in gerader Linie liegen, oder eine feste Achse, längs welcher sich dasselbe nicht verschieben läßt, um welche dasselbe aber gedreht werden kann, so kann man diese als eine der Coordinaten-Achsen, z. B. als die der z annehmen; die fördernde Kraft R, deren Richtung alsdann diese Achse schneidet, wird durch dieselbe unwirksam gemacht; ihre Componenten $X = \Sigma . P \cos \widehat{Px}$ und $Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py}$ geben die Intensität des kleinsten Widerstandes, welchen die feste Achse längs der Achsen der x und der y leisten muß, während die Seitenkraft $Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz}$ den erforderlichen kleinsten Widerstand gegen eine Verschiebung des Systems auf der festen Achse oder gegen eine Verschiebung dieser Achse selbst in der Richtung ihrer Länge vorstellt.

Durch die Unbeweglichkeit der Achse der z wird aber auch jede drehende Bewegung um die Achsen der x und y unmöglich gemacht; es werden deßhalb auch die Gleichungen $M_X = 0$, $M_Y = 0$ entbehrlich, und die einzige nothwendige Gleichung für das Bestehen des Gleichgewichtes ist.

$$M_Z = \Sigma . P(x \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px}) = 0 ;$$

sie verbürgt das Gleichgewicht der drehenden Kräfte um die feste Achse, d. h. derjenigen Kräfte, welche allein eine Bewegung hervorbringen könnten. Die Momente M_X und M_Y, deren Bestreben dahin geht, die feste Achse der z um die Achsen der x und der y zu drehen, können je eines mit einer der fördernden Kräfte X und Y zu allgemeinen Resultirenden in den entsprechenden Coordinaten-Ebenen vereinigt werden, welche gleiche Intensität wie die letztern haben, aber nicht mehr im Anfangspunkte angreifen, sondern in zwei Punkten der Achse der z, deren Abstände z_1 und z_2 vom Anfangspunkte durch die Gleichungen:

$$z_1 = \frac{M_Y}{X} = \frac{\Sigma . P(z \cos \widehat{Px} - x \cos \widehat{Pz})}{\Sigma . P \cos \widehat{Px}}$$

$$z_2 = \frac{M_X}{Y} = \frac{\Sigma . P(y \cos \widehat{Pz} - z \cos \widehat{Py})}{\Sigma . P \cos \widehat{Py}}$$

gegeben werden.

Ist die Achse nur in zwei Punkten befestigt und will man den Widerstand kennen, welchen ein jeder derselben zu leisten, oder den Druck, welchen jeder zu erleiden hat, so muß man jede der beiden zuletzt erhaltenen allgemeinen Kräfte X und Y in zwei parallel gerichtete X′ und X″, Y′ und Y″ zerlegen, deren Angriffspunkte in die betreffenden festen Punkte zu liegen kommen, und dann für den einen dieser Punkte die Componenten X′ und Y′, für den andern X″ und Y″ zu einer Resultirenden vereinigen, welche jenen Druck vorstellen wird.

Kann endlich das System längs der festen Achse fortgleiten, oder ist diese Achse selbst längs ihrer Richtung beweglich, so müssen sich die fördernden Kräfte $P \cos \widehat{Pz}$, welche längs dieser Achse thätig sind, gegenseitig aufheben; man wird also die beiden Bedingungen:

$$\Sigma . P \cos \widehat{Pz} = 0 \quad , \quad \Sigma . P(x \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px}) = 0$$

zu erfüllen haben, wenn das System im Gleichgewichte bleiben soll. Der Druck, welchen die Achse senkrecht zu ihrer Richtung zu erleiden hat, bleibt derselbe, wie vorher.

3) Der letzte der erwähnten Fälle ist derjenige, wo sich das System gegen eine feste Ebene stützt. Wird diese Ebene als eine der Coordinatenebenen, z. B. die der xy genommen, so müssen alle Kräfte, welche

eine Veränderung in der Lage dieser Ebene bewirken wollen, unwirksam werden, also namentlich die Kräfte: $P \cos \widehat{Pz}$ oder ihre Resultirende $Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz}$, welche wieder das Maaß des kleinsten Widerstandes gibt, den die Ebene muß ertragen können.

Stützt sich nun das System nur mit einem Punkte gegen die Ebene, so müssen einmal die Bedingungen erfüllt werden, welche die Bewegung dieses Punktes, den man als Anfang der Coordinaten nehmen wird, in der festen Ebene verhindern, nämlich

$$X = \Sigma . P \cos \widehat{Px} = 0 \quad , \quad Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py} = 0 \, ,$$

Ferner müssen befriedigt werden die Gleichungen:

$$M_X = 0 \quad , \quad M_Y = 0 \quad , \quad M_Z = 0 \, ,$$

welche jede Ursache für eine drehende Bewegung um jenen Punkt beseitigen und in Verbindung mit den beiden vorhergehenden auch ausdrücken, daß die allgemeine Resultirende $Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz}$ des ganzen Systems der Kräfte zur Ebene normal ist und durch den Stützpunkt geht, was offenbar zur Erhaltung des Gleichgewichtes nothwendig und genügend ist.

Von den ebengenannten fünf Bedingungsgleichungen wird die vierte überflüssig, wenn sich das System mit zwei oder mehreren Punkten, welche in einer Geraden liegen, gegen die feste Ebene stützt und wenn man diese Gerade als Achse der x, einen der festen Punkte selbst als Anfang der Coordinaten nimmt. Denn es ist nothwendig und genügt für das Gleichgewicht in diesem Falle, daß die Kraft Z wieder allgemeine Resultirende aller Kräfte ist und daß ihre Richtung die feste Ebene in einem Punkte der Stützlinie trifft, welcher noch zwischen die äußersten Stützpunkte fällt. Die erste Bedingung wird wieder durch die Gleichungen:

$$X = \Sigma . P \cos \widehat{Px} = 0 \quad , \quad Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py} = 0$$

erfüllt; die letztere, nämlich daß die Kraft Z ihre Richtung in der Ebene der xz liegen hat, gibt die Gleichungen:

$$M_X = 0 \quad , \quad M_Z = 0 \, ,$$

welche übrigens auch dafür bürgen, daß keine Drehung um die Achsen der x und z stattfinden kann, während die beiden vorhergehenden jede Ursache für das Verschieben des Systems auf der Ebene beseitigen. Das Moment M_Y gibt dann den Abstand $\mathbf{X}$ der Richtung der allgemeinen Resultirenden Z von der Achse der z durch die Gleichung:

$$\mathfrak{X} = \frac{M_Y}{Z} = \frac{\Sigma . P(z \cos \widehat{Px} - x \cos \widehat{Pz})}{\Sigma . P \cos \widehat{Pz}},$$

und die letzte Bedingung für das Gleichgewicht besteht noch darin, daß dieser Werth von $\mathfrak{X}$ ohne Rücksicht auf das Qualitätszeichen kleiner ist als der Abstand des äußersten Stützpunktes vom Anfang der Coordinaten.

Sind endlich drei oder mehrere Stützpunkte vorhanden, welche nicht in gerader Linie liegen, so werden für das Gleichgewicht die Bedingungen genügen, welche dafür bürgen, einmal daß das System auf der Ebene weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung erhält — dies thun die Gleichungen:

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad M_Z = 0$$

— und dann, daß die allgemeine Resultirende Z des Systems der Kräfte die feste Ebene innerhalb des Polygons trifft, welches durch die Verbindung der äußersten Stützpunkte entsteht, daß also jede der Coordinaten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ des Durchgangspunktes jener allgemeinen Resultirenden durch die Ebene, welche durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{X} = \frac{M_Y}{Z} \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{M_X}{Z}$$

bestimmt werden, kleiner ist als die entsprechende Coordinate des äußersten Eckes jenes Polygons.

§. 138.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich indessen einfacher, sicherer und vielleicht selbst einleuchtender auf dem am Anfange des §. 136 angegebenen Wege anstellen, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird.

1) Für den Fall, daß das System einen festen Punkt enthält, fügt man den unbekannten Widerstand W, welchen derselbe zu leisten hat, dem System der gegebenen Kräfte hinzu, wodurch man — den festen Punkt als Anfang angenommen, so daß die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft W Null sind — für das Gleichgewicht die Bedingungen erhält:

$$X + W \cos \widehat{Wx} = 0 \;,\quad Y + W \cos \widehat{Wy} = 0 \;,\quad Z + W \cos \widehat{Wz} = 0,$$
$$M_X = 0 \quad , \quad M_Y = 0 \quad , \quad M_Z = 0 \;,$$

von denen die drei letzten demnach allein für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte genügen, während die drei ersten dazu dienen, Intensität und Richtung des Widerstandes W zu bestimmen.

2) Enthält das System zwei feste Punkte, von denen der eine der Anfangspunkt ist, der andere in der Achse der z in einer Entfernung c von jenem liegt und den Druck W' zu erleiden hat, so werden unsere Bedingungsgleichungen

$$X + W \cos \widehat{Wx} + W' \cos \widehat{W'x} = 0 \;, \quad Y + W \cos \widehat{Wy} + W' \cos \widehat{W'y} = 0 \;,$$

$$Z + W \cos \widehat{Wz} + W' \cos \widehat{W'z} = 0 \;,$$

$$M_x - W' c \cos \widehat{W'y} = 0 \;, \quad M_y + W' c \cos \widehat{W'x} = 0 \;, \quad M_z = 0 \;;$$

für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte genügt folglich die letzte dieser Gleichungen allein; die übrigen zeigen, daß sich nur die Werthe der zur festen Achse der z senkrechten Componenten $W \cos \widehat{Wx}$, $W \cos \widehat{Wy}$, $W' \cos \widehat{W'x}$, $W' \cos \widehat{W'y}$ bestimmen lassen, daß dagegen die dazu parallelen Seitenkräfte $W \cos \widehat{Wz}$, $W' \cos \widehat{W'z}$, beziehungsweise eine derselben, willkürlich bleiben, wie dies in der Natur der Sache liegt, da es gleichgültig ist, wie die Widerstände gegen die Wirkung der Kraft Z unter die beiden festen Punkte oder überhaupt längs der festen Achse vertheilt sind, wenn nur der Gesammtwiderstand die erforderliche Größe hat.

Soll dagegen dieser Widerstand Null sein, sich also das System in der Richtung der Achse der z verschieben lassen, so werden die dritte und sechste Gleichung:

$$Z = 0 \;, \quad M_z = 0$$

die Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems der gegebenen Kräfte ausdrücken.

Enthält endlich das System drei oder mehrere Punkte in gerader Linie, so sieht man leicht aus der Form der vorhergehenden Gleichungen, daß die Bedingungen für das Gleichgewicht dieselben bleiben, daß aber dann die Componenten $W \cos \widehat{Wx}$, $W' \cos \widehat{W'x}$, $W'' \cos \widehat{W''x}$, u. s. f. der Widerstände der einzelnen Punkte nicht mehr bestimmt werden können.

3) Wenn sich das System mit einem Punkte gegen die feste Ebene der xy stützt, und dieser Punkt als Anfang der Coordinaten genommen wird, so genügt es, dem System eine Kraft N beizufügen, welche mit

der Achse der z zusammenfällt; die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht sind dann

$$X=0\,,\quad Y=0\,,\quad Z+N=0\,,\quad M_X=0\,,\quad M_Y=0\,,\quad M_Z=0\,,$$

und man sieht, daß für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte die dritte derselben entbehrlich wird, daß diese aber zur Bestimmung des Druckes dient, welchen die feste Ebene in dem betreffenden Punkte erleidet, oder des kleinsten Widerstandes, welchen dieselbe leisten darf.

Sind mehrere Punkte in gerader Linie mit der Ebene in Berührung, so nehmen wir diese Gerade als Achse der x und lassen in den beiden äußersten Punkten, wovon der eine Anfangspunkt ist, der andere in einer Entfernung a von diesem liegt, zwei Kräfte N und N′ in demselben Sinne und senkrecht zur festen Ebene angreifen; dadurch erhalten wir die Gleichungen:

$$X=0\,,\quad Y=0\,,\quad Z+N+N'=0\,,$$
$$M_X=0\,,\quad M_Y-N'a=0\,,\quad M_Z=0\,,$$

von denen also die dritte und fünfte für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte nicht mehr nothwendig sind, aber dazu dienen können, die Werthe von N und N′ zu bestimmen. Wenn Z als allgemeine Resultirende der gegebenen Kräfte betrachtet wird, und $\mathfrak{X}$ der Abstand ihrer Richtung von der Achse der z ist, so findet man auch

$$Z\mathfrak{X}=M_Y\,,\quad (N+N')\mathfrak{X}=-Na$$

und dadurch

$$\mathfrak{X}=-a\frac{N}{N+N'}\,;$$

es wird folglich, abgesehen vom Zeichen, $\mathfrak{X}$ kleiner sein als a, d. h. als die Entfernung des äußersten Stützpunktes.

Im letzten Falle endlich, wenn sich drei oder mehrere Punkte des Systems, die nicht in gerader Linie liegen, auf die feste Ebene stützen, genügt es, drei der äußersten zu wählen und in diesen die Kräfte N, N′, N″ senkrecht zur Ebene und in demselben Sinne angreifen zu lassen. Wird der erste dieser Punkte als Anfang der Coordinaten, die Lage der Achse der x in der Ebene aber beliebig genommen, so daß die Coordinaten des zweiten und dritten a′, b′ und a″, b″ sind, so findet man zufolge der Bedingungen für das Gleichgewicht eines freien Systems, an welchem die gegebenen Kräfte und die Kräfte N, N′, N″ angreifen, die Gleichungen:

$$X = 0 \ , \quad Y = 0 \ , \quad Z + N + N' + N'' = 0 \ ,$$
$$M_X + N'b' + N''b'' = 0 \ , \quad M_Y - N'a' - N''a'' = 0 \ , \quad M_Z = 0 \ ,$$

und demnach
$$X = 0 \ , \quad Y = 0 \ , \quad M_Z = 0$$

als die nothwendigen Bedingungen für das Gleichgewicht der gegebenen Kräfte. Ferner erhält man für die Coordinaten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ des Angriffspunktes der allgemeinen Resultirenden Z

$$Z\mathfrak{X} = M_Y \quad \text{oder} \quad (N + N' + N'')\mathfrak{X} = -(N'a' + N''a'') \ ,$$
$$Z\mathfrak{Y} = M_X \quad \text{oder} \quad (N + N' + N'')\mathfrak{Y} = N'b' + N''b'' \ ,$$

woraus folgt, daß $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, vom Zeichen abgesehen, immer kleiner sein müssen, als die größten Werthe der Coordinaten a', a'', b', b''; denn ist N' die größte der Kräfte N, N', N'', und $a' > a''$, so kann man

$$N = \alpha N' \ , \quad N'' = \beta N' \ , \quad a'' = \gamma a'$$

setzen, indem man mit α, β, γ Zahlenwerthe zwischen 0 und 1 bezeichnet, und erhält dadurch

$$\mathfrak{X} = a' \frac{1 + \beta\gamma}{1 + \alpha + \beta} \ ,$$

also immer $\mathfrak{X} < a'$. Ebenso ergibt sich immer $\mathfrak{Y} < b'$, wenn b' die größere der Ordinaten b' und b'' ist, übereinstimmend mit unserer früheren Behauptung.

§. 139.

Als Anwendung des Vorhergehenden wollen wir noch das Gleichgewicht eines schweren Körpers untersuchen, welcher sich mit mehreren nicht in einer Geraden liegenden Punkten auf eine geneigte Ebene stützt, und an welchem außer seinem Gewichte Q nur eine Kraft P angreift.

Dazu werde der Winkel, welchen die Normale zu der geneigten Ebene mit der Richtung der Schwere bildet, mit ϑ bezeichnet und das Coordinatensystem so gelegt, daß die Ebene der xy parallel zu der genannten Ebene wird und die Ebene der xz durch den Schwerpunkt des gegebenen Körpers als Anfang der Coordinaten geht und die Richtung der Schwere, also auch die der Kraft Q enthält. Nehmen wir dann zuerst Umgang von der Reibung, so haben wir nur die beiden Kräfte P und Q an dem System, und die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht sind nach dem Vorhergehenden

$$Q \sin\vartheta + P \cos\widehat{Px} = 0 \quad , \quad P \cos\widehat{Py} = 0 \,,$$

$$P(x \cos\widehat{Py} - y \cos\widehat{Px}) = 0 \,,$$

woraus sogleich vermöge der zweiten $\widehat{Py} = \frac{1}{2}\pi$ und dann vermöge der dritten $y = 0$ folgt, da wegen der ersten $\cos\widehat{Px}$ nicht Null werden darf. Die Kraft P muß also in einem Punkte des von der Ebene der xz durch den Schwerpunkt gemachten Schnittes angreifen und ihre Richtung in dieser Ebene liegen. Es ist dann noch die erste Gleichung übrig, welche nicht mehr die beiden Unbekannten P und $\widehat{Px}$ bestimmen kann, und es bleiben daher nicht nur die Coordinaten x und z des Angriffspunktes, sondern auch die Richtung oder Intensität der Kraft P willkürlich. Diese Größen, von denen die beiden letztern durch die Gleichung:

$$P = -Q \frac{\sin\vartheta}{\cos\widehat{Px}}$$

in Abhängigkeit von einander stehen, müssen aber so gewählt werden, werden, daß die Richtung der Resultirenden der Kräfte P und Q noch die Grundfläche des Körpers, mit welcher derselbe auf der Ebene aufruht, durchschneidet, damit derselbe nicht um eine seiner Kanten umkippt.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt dann, daß $\cos\widehat{Px}$ negativ sein muß, weil P nothwendig eine positive Größe ist; ferner ergibt sich daraus als kleinster Werth von P, welcher dem größten negativen Werthe von $\cos\widehat{Px}$, nämlich $\cos\widehat{Px} = -1$, und dem Werthe $\widehat{Px} = \pi$ entspricht,

$$P = Q \sin\vartheta$$

und darnach als Druck auf die feste Ebene: $-Z = Q \cos\vartheta$.

Soll dagegen die Kraft P horizontal angreifen, also $\alpha = \pi + \vartheta$ sein, so wird

$$P = Q \tang\vartheta \,,$$

und der Druck, den die Ebene zu erleiden hat,

$$-Z = Q \cos\vartheta + P \sin\vartheta = Q \cdot \frac{1}{\cos\vartheta}$$

ist nun im Verhältnisse $1 : \cos^2\vartheta$ größer, als vorher.

Um nun auch die Reibung in Rechnung zu bringen, gehen wir von dem durch die Erfahrung bewiesenen Satze aus, daß die Reibung unabhängig ist von der Größe der Berührungsfläche. Wir

erhalten demnach mit Beibehaltung der früheren Anordnung, und indem wir beachten, daß die Reibung jeder Bewegung auf der Ebene, also sowohl der drehenden wie der fortschreitenden entgegenwirkt, für die Grenzen des Gleichgewichtes die Gleichungen:

$$Q \sin\vartheta + P \cos\widehat{Px} - fN \cos\widehat{Nx} = 0 \;, \quad P \cos\widehat{Py} - fN \sin\widehat{Nx} = 0 ,$$

$$P(x \cos\widehat{Py} - y \cos\widehat{Px}) - fNn = 0 \;,$$

worin N den normalen Druck auf die geneigte Ebene, f den Reibungscoeffizienten, fN die resultirende Reibung und n die Länge der Senkrechten bezeichnet, welche von dem Anfangspunkte auf die Richtung dieser letztern Kraft gefällt werden kann. Diese drei Gleichungen enthalten acht Unbekannte und können deßhalb keine bestimmten Werthe für dieselben geben; sie zeigen aber, daß die Kraft P nun nicht mehr in einem Punkte des durch den Schwerpunkt gelegten verticalen Schnittes angreifen und ihre Richtung in der Ebene desselben liegen muß, wie in dem Falle, wo keine Reibung stattfindet.

Nehmen wir aber, um die Sache etwas bestimmter zu erhalten, wieder $\widehat{Py} = \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$, so folgt auch $\sin\widehat{Nx} = 0$, $n = 0$, und es bleibt nur die Gleichung:

$$Q \sin\vartheta - P \cos\widehat{Px} - fN = 0 \;,$$

welche noch drei Unbekannte enthält. Wir haben aber auch

$$Z = N = -Q \cos\vartheta + P \sin\widehat{Px} \;,$$

und dadurch wird die vorhergehende Bedingung für das Gleichgewicht

$$Q(\sin\vartheta - f\cos\vartheta) + P(\cos\widehat{Px} - f\sin\widehat{Px}) = 0 \;,$$

woraus sofort

$$P = -Q \frac{\sin\vartheta - f\cos\vartheta}{\cos\widehat{Px} + f\sin\widehat{Px}}$$

folgt. Für $\widehat{Px} = \pi$, d. h. wenn die Richtung der Kraft P zu der geneigten Ebene parallel ist, hat man darnach

$$P = Q(\sin\vartheta - f\cos\vartheta) \;,$$

und für $\widehat{Px} = \pi + \vartheta$, also wenn die Kraft P horizontal (parallel zur Basis der geneigten Ebene) angreift, ergibt sich

$$P = Q\frac{\sin\vartheta - f\cos\vartheta}{\cos\vartheta + f\sin\vartheta} = Q\frac{\tang\vartheta - f}{1 + f\tang\vartheta}.$$

Die kleinste Kraft P, welche den Körper mit Hülfe der Reibung im Gleichgewichte erhält, wird demnach gefunden, wenn man den Werth von $\widehat{Px}$ sucht, für welchen der Nenner: $-(\cos\widehat{Px} + f\sin\widehat{Px})$ einen größten Werth erhält. Das Aenderungsgesetz dieses Ausdruckes ist aber

$$\sin\widehat{Px} - f\cos\widehat{Px}$$

und gibt, gleich Null gesetzt, den Werth:

$$\tang\widehat{Px} = f;$$

das zweite Aenderungsgesetz

$$\cos\widehat{Px} + f\sin Px$$

wird mit diesem Werthe

$$(1 + f^2)\cos\widehat{Px}$$

und zeigt, daß für einen größten Werth des Nenners $\cos\widehat{Px}$ negativ sein muß, so daß, wenn man $f = \tang\varrho$ setzt, $\widehat{Px} = \pi + \varrho$ werden muß und man als kleinsten Werth von P

$$P = Q(\sin\vartheta - f\cos\vartheta)\cos\varrho = Q\sin(\vartheta - \varrho)$$

erhält.

Soll $P = 0$ sein, der Körper also durch die Reibung allein im Gleichgewicht bleiben, so muß der Zähler des obigen allgemeinen Werthes von P Null werden; dies gibt die Bedingung:

$$\tang\vartheta = f.$$

Vergleicht man diese verschiedenen Ergebnisse mit denen des §. 29 im ersten Buche, so sieht man, daß in den eben betrachteten Fällen die Gleichgewichtsbedingungen dieselben sind, als wenn die Masse des Körpers in seinem Schwerpunkte vereinigt wäre und dieser als ein materieller Punkt auf der schiefen Ebene im Gleichgewichte gehalten werden sollte. Man wird dann auch hier für den Fall, daß die Reibung nicht mehr zu Gunsten der Kraft P, sondern ihr entgegenwirkt, die Intensitäten dieser Kraft für die verschiedenen Richtungen derselben aus den vorhergefundenen Werthen durch Umänderung des Zeichens von dem Reibungscoeffizienten f ableiten. In diesem Falle wird sich dann der Körper an derjenigen Grenze des Gleichgewichtes befinden, wo eine kleine Vermehrung der Kraft P eine Bewegung im Sinne dieser Kraft

hervorbringt, und es wird deßhalb hier besonders darauf zu sehen sein, daß die Kraft P nicht in einem zu weit von der Ebene entfernten Punkte des Körpers angreift, weil dadurch die drehende Wirkung derselben in Bezug auf den höchsten Stützpunkt des Körpers größer werden kann, als die drehende Wirkung des Gewichtes Q in Bezug auf diesen Punkt, und der Körper dann nach oben umschlagen wird. Die Grenze dieser Entfernung wird demnach durch den horizontalen Abstand jenes höchsten Stützpunktes von der Achse der z oder von der Richtung der Kraft Q bedingt; wird dieser Abstand mit q bezeichnet und die Lage des Angriffspunktes der Kraft P durch die von jenem obersten Stützpunkte auf die Richtung dieser Kraft gefällte Senkrechte p ausgedrückt, so darf Pp nicht größer sein, als Qq, wenn der Körper nicht umkippen soll.

IV. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein festes System.

§. 140.

Mit Beibehaltung der Erklärungen und Benennungen, welche in §. 33 des ersten Buches gegeben wurden, kann das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein festes System so ausgesprochen werden:

Wenn an einem festen System beliebige Kräfte thätig sind, und sich dasselbe im Gleichgewichte befindet, sei es vermöge dieser Kräfte allein, oder mittels eines festen Hindernisses, und wenn man die Summe der virtuellen Momente aller Kräfte herstellt für irgend eine virtuelle Bewegung, welche dem System durch eine oder mehrere sehr kleine neue Kräfte ertheilt werden kann, so hat das Verhältniß dieser Summe zu der virtuellen Geschwindigkeit irgend eines der Punkte des Systems immer den Anfangswerth Null; wenn also irgend eine der Kräfte mit $P_{,}$, ihr virtueller Weg mit $\Delta p_{,}$, die virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes mit $\Delta s_{,}$ und mit Δs die virtuelle Versetzung irgend eines Punktes im System bezeichnet wird, so hat man

$$\text{Anf}: \frac{\Sigma . P_{,} \Delta p_{,}}{\Delta s} = \text{Anf}: \Sigma . P_{,} \frac{\Delta p_{,}}{\Delta s_{,}} \cdot \frac{\Delta s_{,}}{\Delta s} = \Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s_{,}} \cdot \frac{\delta s_{,}}{\delta s} = 0 \quad (106.$$

und umgekehrt, wenn diese Gleichung stattfindet, wenn das Verhältniß der Summe der virtuellen Momente aller Kräfte zu der virtuellen Geschwindigkeit eines ihrer Angriffspunkte oder irgend eines der Punkte des Systems für alle virtuelle Verrückungen, welche dem System durch eine oder mehrere sehr kleine neue Kräfte ertheilt werden können, den Anfangswerth Null hat, so befindet sich das System im Gleichgewicht.

Um diese Sätze zu beweisen, beginne ich mit dem einfachsten festen System, nämlich mit demjenigen, welches nur aus zwei materiellen Punkten A und B besteht, die durch eine unbiegsame und der Länge nach unveränderliche Gerade verbunden sind, oder was hier dasselbe ist, mit einem festen System, an welchem nur zwei Kräfte in den Punkten A und B angreifen. Diese Kräfte, von denen man sich jede auch als Resultirende von mehreren an demselben Punkte thätigen Kräften vorstellen kann, seien P_1 und P_2, die Coordinaten von A seien mit x_1, y_1, z_1, die von B mit x_2, y_2, z_2 bezeichnet und die Länge von AB mit l; man hat dann für jede Lage dieser Geraden die Bedingungsgleichung:

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

und für den Uebergang aus einer Lage in eine folgende in Bezug auf die Aenderung der Lage eines beliebigen Punktes C der Geraden AB das Uebergangsgesetz:

$$0 = (x_1 - x_2)\left(\frac{\delta x_1}{\delta s_1}\frac{\delta s_1}{\delta s} - \frac{\delta x_2}{\delta s_2}\frac{\delta s_2}{\delta s}\right) + (y_1 - y_2)\left(\frac{\delta y_1}{\delta s_1}\frac{\delta s_1}{\delta s} - \frac{\delta y_2}{\delta s_2}\frac{\delta s_2}{\delta s}\right)$$
$$+ (z_1 - z_2)\left(\frac{\delta z_1}{\delta s_1}\frac{\delta s_1}{\delta s} - \frac{\delta z_2}{\delta s_2}\frac{\delta s_2}{\delta s}\right).$$

Die Winkel $\widehat{lx}$, $\widehat{ly}$, $\widehat{lz}$, welche die Gerade AB in irgend einer Lage mit jeder der drei Coordinaten-Achsen bildet, werden durch die Beziehungen:

$$\cos\widehat{lx} = \frac{x_1 - x_2}{l}, \quad \cos\widehat{ly} = \frac{y_1 - y_2}{l}, \quad \cos\widehat{lz} = \frac{z_1 - z_2}{l}$$

bestimmt; dividirt man also die vorhergehende Gleichung durch l, so kann ihr die Form gegeben werden:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\delta x_1}{\delta s_1}\cos\widehat{lx}+\frac{\delta y_1}{\delta s_1}\cos\widehat{ly}+\frac{\delta z_1}{\delta s_1}\cos\widehat{lz}\right)\frac{\delta s_1}{\delta s}\\ \qquad-\left(\frac{\delta x_2}{\delta s_2}\cos\widehat{lx}+\frac{\delta y_2}{\delta s_2}\cos\widehat{ly}+\frac{\delta z_2}{\delta s_2}\cos\widehat{lz}\right)\frac{\delta s_2}{\delta s}=0\end{array}\right\}.\ (a.$$

Die virtuellen Geschwindigkeiten der Punkte A und B werden wir mit Δs_1 und Δs_2 bezeichnen, mit Δx_1, Δy_1, Δz_1 die Projectionen der erstern, mit Δx_2, Δy_2, Δz_2 die Projectionen der zweiten auf die drei Coordinaten-Achsen und dadurch für die Cosinus der Winkel, welche die virtuellen Geschwindigkeiten mit den Richtungen der Kräfte P_1 und P_2 einschließen, die Ausdrücke erhalten:

$$\cos\widehat{P_1\Delta s_1}=\frac{\Delta x_1}{\Delta s_1}\cos\widehat{P_1x}+\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}\cos\widehat{P_1y}+\frac{\Delta z_1}{\Delta s_1}\cos\widehat{P_1z}\ ,$$

$$\cos\widehat{P_2\Delta s_2}=\frac{\Delta x_2}{\Delta s_2}\cos\widehat{P_2x}+\frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}\cos\widehat{P_2y}+\frac{\Delta z_2}{\Delta s_2}\cos\widehat{P_2z}\ ;$$

die Summe der virtuellen Momente dieser Kräfte ist demnach

$$P_1 . \Delta s_1 \cos\widehat{P_1\Delta s_1}+P_2 . \Delta s_2 \cos\widehat{P_2\Delta s_2}$$

oder

$$P_1(\Delta x_1\cos\widehat{P_1x}+\Delta y_1\cos\widehat{P_1y}+\Delta z_1\cos\widehat{P_1z})$$

$$+P_2(\Delta x_2\cos\widehat{P_2x}+\Delta y_2\cos\widehat{P_2y}+\Delta z_2\cos\widehat{P_2z})\ ,$$

und man findet als Anfangswerth des Verhältnisses dieser Summe zu der virtuellen Geschwindigkeit Δs des Punktes C

$$\left.\begin{array}{l}P_1\left(\frac{\delta x_1}{\delta s_1}\cos\widehat{P_1x}+\frac{\delta y_1}{\delta s_1}\cos\widehat{P_1y}+\frac{\delta z_1}{\delta s_1}\cos\widehat{P_1z}\right)\frac{\delta s_1}{\delta s}\\ +P_2\left(\frac{\delta x_2}{\delta s_2}\cos\widehat{P_2x}+\frac{\delta y_2}{\delta s_2}\cos\widehat{P_2y}+\frac{\delta z_2}{\delta s_2}\cos\widehat{P_2z}\right)\frac{\delta s_2}{\delta s}\end{array}\right\}.\ (b.$$

Ist nun die Gerade AB ganz frei, so kann sie offenbar nur im Gleichgewichte bleiben, wenn die Richtungen der beiden Kräfte P_1 und P_2 mit ihr oder ihrer Verlängerung zusammenfallen, und wenn diese selbst gleich und in entgegengesetztem Sinne thätig sind. Man kann dann immer

$$\cos\widehat{P_1x}=\cos\widehat{lx}\ ,\quad \cos\widehat{P_1y}=\cos\widehat{ly}\ ,\quad \cos\widehat{P_1z}=\cos\widehat{lz}$$

setzen und hat dann

$$\cos\widehat{P_2 x} = -\cos\widehat{l x}\ ,\quad \cos\widehat{P_2 y} = -\cos\widehat{l y}\ ,\quad \cos\widehat{P_2 z} = -\cos\widehat{l z},$$

und

$$P_2 = P_1\ ;$$

der vorhergehende Ausdruck (b) für $\Sigma . P, \frac{\delta p,}{\delta s}$ nimmt dadurch die Form an:

$$P_1 \Big[\Big(\frac{\delta x_1}{\delta s_1} \cos\widehat{l x} + \frac{\delta y_1}{\delta s_1} \cos\widehat{l y} + \frac{\delta z_1}{\delta s_1} \cos\widehat{l z} \Big) \frac{\delta s_1}{\delta s}$$

$$- \Big(\frac{\delta x_2}{\delta s_2} \cos\widehat{l x} + \frac{\delta y_2}{\delta s_2} \cos\widehat{l y} + \frac{\delta z_2}{\delta s_2} \cos\widehat{l z} \Big) \frac{\delta s_2}{\delta s} \Big]$$

und gibt vermöge der Gleichung (a)

$$P_1 \frac{\delta p_1}{\delta s_1} \frac{\delta s_1}{\delta s} + P_2 \frac{\delta p_2}{\delta s_2} \frac{\delta s_2}{\delta s} = \Sigma . P, \frac{\delta p,}{\delta s,} \frac{\delta s,}{\delta s} = 0\ .$$

Ist die Gerade AB dagegen in ihrer Bewegung auf irgend eine Weise beschränkt, so kann diese Beschränkung immer durch die Bedingung ausgedrückt werden, daß die Endpunkte A und B auf einer gewissen Curve oder Fläche bleiben müssen; nennt man dann die Kräfte, welche in A und B angreifen, P′ und P″, die unbekannten Widerstände, welche die entsprechenden Curven oder Flächen, auf die sich jene Punkte stützen, ihrem Drucke entgegensetzen, N′ und N″, so kann man die Kraft P_1 als Resultirende von P′ und N′, P_2 als Resultirende von P″ und N″ und darnach die Gerade AB wie vorher als frei betrachten. Man hat dann einmal nach §. 33 (31) des ersten Buches die Beziehungen:

$$P_1 \frac{\delta p_1}{\delta s_1} = P' \frac{\delta p'}{\delta s_1} + N' \frac{\delta n'}{\delta s_1}\ ,\quad P_2 \frac{\delta p_2}{\delta s_2} = P'' \frac{\delta p''}{\delta s_2} + N'' \frac{\delta n''}{\delta s_2}\ ,$$

worin $\frac{\delta p'}{\delta s_1}$, $\frac{\delta p''}{\delta s_2}$, $\frac{\delta n'}{\delta s_1}$, $\frac{\delta n''}{\delta s_2}$ die Anfangswerthe der Verhältnisse der virtuellen Wege $\Delta p'$, $\Delta p''$, $\Delta n'$, $\Delta n''$ der entsprechenden Kräfte P′, P″, N′, N″ zu der virtuellen Geschwindigkeit der entsprechenden Angriffspunkte A und B vorstellen. Die vorhergehende Gleichung für die freie Gerade AB:

$$P_1 \frac{\delta p_1}{\delta s_1} \frac{\delta s_1}{\delta s} + P_2 \frac{\delta p_2}{\delta s_2} \frac{\delta s_2}{\delta s} = 0$$

wird dadurch

$$P'\frac{\delta p'}{\delta s_1}\frac{\delta s_1}{\delta s}+P''\frac{\delta p''}{\delta s_2}\frac{\delta s_2}{\delta s}+N'\frac{\delta n'}{\delta s_1}\frac{\delta s_1}{\delta s}+N''\frac{\delta n''}{\delta s_2}\frac{\delta s_2}{\delta s}=0;$$

die virtuellen Verrückungen der Punkte A und B werden aber, wie für einen einzelnen materiellen Punkt (§. 33 des ersten Buches) nun nur noch auf den entsprechenden Flächen oder Curven statthaben, zu welchen N' oder N'' normal gerichtet sind, weßhalb wie dort

$$\frac{\delta n'}{\delta s_1}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta n''}{\delta s_2}=0$$

sein muß; die vorhergehende Gleichung für das Gleichgewicht kommt also wieder auf

$$P'\frac{\delta p'}{\delta s_1}\frac{\delta s_1}{\delta s}+P''\frac{\delta p''}{\delta s_2}\frac{\delta s_2}{\delta s}=\Sigma . P_{,}\frac{\delta p_{,}}{\delta s}=0$$

zurück, wie behauptet wurde.

§. 141.

Um ferner den umgekehrten Satz zu beweisen, nämlich, daß die Gerade AB im Gleichgewichte ist, wenn die Gleichung:

$$\Sigma . P_{,}\frac{\delta p_{,}}{\delta s}=P_1\frac{\delta p_1}{\delta s_1}\frac{\delta s_1}{\delta s}+P_2\frac{\delta p_2}{\delta s_2}\frac{\delta s_2}{\delta s}=0$$

für die beiden an ihren Endpunkten thätigen Kräfte und für alle virtuelle Verrückungen, welche durch eine oder mehrere sehr kleine Kräfte hervorgebracht werden können, befriedigt wird, und zwar zuerst für den Fall, daß die Gerade AB in ihrer Bewegung nicht beschränkt ist, so kann man einmal eine kleine drehende Kraft an derselben angebracht denken, durch welche sie eine kleine Drehung um den Punkt A erhält, so daß der Endpunkt B einen kleinen Kreisbogen Δs_2 beschreibt. Die virtuelle Geschwindigkeit Δs_1 von A ist dann Null, und die obige Gleichung kommt auf die einfache:

$$P_2\frac{\delta p_2}{\delta s_2}\cdot\frac{\delta s_2}{\delta s}=0$$

zurück, aus welcher man nothwendig

$$\frac{\delta p_2}{\delta s_2}=0$$

zieht, da man P_2 nicht gleich Null nehmen kann, ohne auch $P_1=0$

zu setzen, und weil das Verhältniß $\frac{\Delta s_2}{\Delta s}$ immer einen bestimmten Werth behält, nämlich den des Verhältnisses der Längen AB und AC, Fig. 95. Nach §. 33 des ersten Buches drückt aber die vorstehende Gleichung aus, daß die Kraft P_2 normal zu dem kleinen Kreisbogen Δs_2 oder längs des Halbmessers AB desselben gerichtet ist, oder mit andern Worten, daß die Richtung der Kraft P_2 mit der Geraden AB zusammenfallen und man daher

$$\cos \widehat{P_2 x} = \pm \cos \widehat{l x} \;, \quad \cos \widehat{P_2 y} = \pm \cos \widehat{l y} \;, \quad \cos \widehat{P_2 z} = \pm \cos \widehat{l z}$$

haben muß.

Derselbe Schluß wird sich dann auch für die Kraft P_1 ergeben, wenn man B als Mittelpunkt der Drehung annimmt, und die Bedingungsgleichung: $\Sigma . P, \frac{\delta p,}{\delta s} = 0$ wird dadurch

$$P_1 \left(\frac{\delta x_1}{\delta s_1} \cos \widehat{l x} + \frac{\delta y_1}{\delta s_1} \cos \widehat{l y} + \frac{\delta z_1}{\delta s_1} \cos \widehat{l z} \right) \frac{\delta s_1}{\delta s}$$

$$\pm P_2 \left(\frac{\delta x_2}{\delta s_2} \cos \widehat{l x} + \frac{\delta y_2}{\delta s_2} \cos \widehat{l y} + \frac{\delta z_2}{\delta s_2} \cos \widehat{l z} \right) \frac{\delta s_2}{\delta s} = 0 \,.$$

Läßt man endlich eine sehr kleine Kraft längs der Geraden AB angreifen, so werden die virtuellen Geschwindigkeiten Δs_1 und Δs_2 beider Endpunkte gleich, also hat man auch

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \;, \quad \Delta y_2 = \Delta y_1 \;, \quad \Delta z_2 = \Delta z_1 \;,$$

und die vorhergehende Gleichung wird einfach

$$P_1 \pm P_2 = 0 \;,$$

was sich übrigens auch durch die Verbindung der letzten Gleichung mit der Gleichung (a) des vorhergehenden §. ergeben hätte. Wir haben demnach aus der Gleichung: $\Sigma . P, \frac{\delta p,}{\delta s} = 0$ den Schluß gezogen, daß die beiden Kräfte P_1 und P_2 längs derselben Geraden AB thätig sind und daß ihre Resultirende Null ist, und dadurch ist das Bestehen des Gleichgewichtes der Geraden AB offenbar gesichert.

Im andern Falle, wo diese Gerade in ihrer Bewegung beschränkt ist, kann man den gegebenen Kräften den durch die Beschränkung hervorgerufenen Druck in entgegengesetztem Sinne als Widerstand des die Bewegung beschränkenden Hindernisses beifügen; die Gleichung:

$\Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s} = 0$ wird wieder die Form der Gleichung (c) des vorigen §. annehmen und dann ausdrücken, daß die Resultirende der gegebenen Kräfte und der Widerstände der Richtung nach mit der Geraden AB zusammenfällt und daß ihre Intensität Null ist, was für das Gleichgewicht des Systems genügt.

Wenn die festen Hindernisse keine Reibung hervorrufen, so ist es für die Feststellung der Gleichgewichtsbedingungen nicht nothwendig, daß man die unbekannten Widerstände in die Gleichung (106) einführt; es genügt, daß man bei den virtuellen Verrückungen die Beschränkung der Bewegung beachtet. Soll dagegen die Reibung berücksichtigt werden, so muß man die Intensität dieser Widerstände kennen und deßhalb so viele Bedingungsgleichungen zu bilden suchen, als Widerstände vorhanden sind, indem man die Unbekannten N in die Gleichung (106) einführt und das System als ganz frei betrachtet.

§. 142.

Machen wir, ehe wir weiter gehen, von dem Vorhergehenden eine einfache Anwendung, welche sowohl zur Aufklärung des bisher Gesagten dienen, als auch zu einer Bemerkung über die Fassung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten selbst Gelegenheit geben wird. Es sei die Aufgabe gestellt:

Eine schwere, homogene, feste Gerade von gegebener Länge l und gegebenem Gewichte Q lehnt sich einerseits an einen festen Cylinder von dem Halbmesser r und stützt sich mit ihrem untern Endpunkte auf eine horizontale Ebene, auf welcher auch der Cylinder ruht; es soll eine an dem untern Endpunkte angreifende und längs der horizontalen Ebene gerichtete Kraft P gesucht werden, welche die schwere Gerade in einer bestimmten Lage im Gleichgewichte hält, und zwar zuerst ohne und dann mit Rücksicht auf die Reibung.

Der Anfangspunkt O der Coordinaten liege in der Achse des Cylinders, und diese selbst sei die Achse der y; die Ebene der xy sei parallel zu der festen horizontalen Ebene, und die der xz gehe durch den untern Endpunkt A der schweren Geraden AB, wenn sich diese im Gleichgewichte befindet (Fig. 96). Bezeichnet man dann die Winkel, welche die Projection der Geraden AB in der Ebene der xy mit dieser Geraden selbst und mit der Achse der x bildet, mit ϑ und ω, so sind

die Coordinaten des Endpunktes A und zugleich die des Angriffspunktes der Kraft P

$$x_1 = x_1 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad z_1 = -r ,$$

und diejenigen des in der Mitte von AB liegenden Angriffspunktes C des Gewichtes Q

$$x_2 = x_1 - \tfrac{1}{2} l \cos\vartheta \cos\omega \quad , \quad y_2 = \tfrac{1}{2} l \cos\vartheta \sin\omega \quad , \quad z_2 = \tfrac{1}{2} l \sin\vartheta .$$

Ferner hat man für den Punkt D, in welchem die Gerade den Cylinder berührt, die Coordinaten:

$$x_3 = r \sin\vartheta' \quad , \quad y_3 = y_3 \quad , \quad z_3 = r \cos\vartheta' ,$$

wo ϑ' den Winkel bezeichnet, welchen die Projection der Geraden AB in der Ebene der xz mit der Achse der x bildet, und welcher durch die Gleichung:

$$\tang \vartheta' = \frac{\tang \vartheta}{\cos\omega}$$

aus den Winkeln ω und ϑ bestimmt werden kann. Damit lassen sich dann auch die beiden noch unbekannten Coordinaten x_1 von A und y_3 von D ebenfalls in Function von ϑ und ω ausdrücken, und diese Bemerkungen mögen für diejenigen Leser genügen, welche die vorliegende Aufgabe in dieser Allgemeinheit auflösen wollen. Um nicht zu weitläufig zu werden, beschränke ich mich auf den einfacheren Fall, Fig. 97, wo die Gerade senkrecht ist zur Erzeugenden des Cylinders, wo demnach $\omega = 0$ ist.

In diesem Falle hat man auch $y_3 = 0$, für den Mittelpunkt C der Geraden die Coordinaten:

$$x_2 = x_1 - \tfrac{1}{2} l \cos\vartheta \quad , \quad z_2 = \tfrac{1}{2} l \sin\vartheta$$

und für den Berührungspunkt D

$$x_3 = r \sin\vartheta \quad , \quad z_3 = r \cos\vartheta .$$

Es ist aber auch $DE = r(1 + \cos\vartheta) = x_1 \sin\vartheta$; daraus folgt

$$x_1 = r \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta} = r \cot \tfrac{1}{2}\vartheta ,$$

und das Aenderungsgesetz von ϑ in Bezug auf die Aenderung von x_1

$$\frac{\delta\vartheta}{\delta x_1} = -\frac{2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\vartheta}{r} = -\frac{1 - \cos\vartheta}{r} .$$

Nun ist der virtuelle Weg Δq der Kraft Q offenbar gleich $-\Delta z_2$

und der virtuelle Weg Δp der Kraft P gleich $\pm \Delta x_1$, und man hat demnach für eine virtuelle Verrückung $\Delta s = \Delta x_1$ des Punktes A ohne Rücksicht auf Reibung

$$\Sigma\, P \frac{\delta p}{\delta s} = 0 = -Q \frac{\delta z_2}{\delta x_1} + P \frac{\delta p}{\delta x_1} = -Q \frac{\delta z_2}{\delta \vartheta} \cdot \frac{\delta \vartheta}{\delta x_1} + P \frac{\delta p}{\delta x_1} ;$$

der Werth von z_2 gibt ferner

$$\frac{\delta z_2}{\delta \vartheta} = \tfrac{1}{2} l \cos \vartheta ,$$

und damit folgt

$$P \frac{\delta p}{\delta x_1} = -Q \frac{l}{2r} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) = \frac{1}{2} Q \frac{l}{r} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) \cos \pi ,$$

also da P nothwendig positiv ist und $\frac{\delta p}{\delta x_1}$ nur $= \cos 0$ oder $= \cos \pi$ sein kann,

$$P = \frac{1}{2} Q \frac{l}{r} \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta) \quad , \quad \frac{\delta p}{\delta x_1} = \cos \pi = -1 .$$

Die Kraft P ist also, wie von selbst einleuchtet, im Sinne der negativen x von A gegen E gerichtet.

Um nun auch die Reibung zu berücksichtigen, seien N_1 und f_1 der Druck und der Reibungscoeffizient in A, N_2 und f_2 die entsprechenden Größen für den Berührungspunkt D; der virtuelle Weg der Reibung $f_1 N_1$ in A ist $-\Delta x_1$ und der virtuelle Weg der Reibung $f_2 N_2$ in D bis auf sehr kleine Größen gleich $-\Delta x_1 \cos \vartheta$. Die Bedingungsgleichung (106) wird daher für eine virtuelle Verrückung $\Delta s = \Delta x_1$ des Punktes A, indem man in diesem Punkte eine sehr kleine Kraft im Sinne der positiven x angreifen läßt, und wenn man nun den virtuellen Weg der Kraft P sogleich gleich $-\Delta x_1$ setzt,

$$Q \frac{l \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta)}{2r} - P - f_1 N_1 - f_2 N_2 \cos \vartheta = 0 .$$

In diese Gleichung müssen aber noch die Werthe von N_1 und N_2 eingeführt werden, und um diese zu erhalten, betrachtet man die Gerade AB unter der Wirkung der sechs Kräfte P, Q, N_1, N_2, $f_1 N_1$ und $f_2 N_2$ als vollkommen frei und im Gleichgewichte und läßt dieselbe zuerst durch ein kleines Moment um den Punkt A drehen, so daß der Punkt D oder die Kraft N_2 den virtuellen Weg $\Delta n_2 = \overline{AD} . \Delta \vartheta = x_1 \Delta \vartheta$ macht; die virtuellen Wege der Kräfte P, N_1, $f_1 N_1$ und $f_2 N_2$ sind

Null, und für die Kraft Q hat man, da die Länge AD unverändert bleibt,

$$\frac{\delta q}{\delta s}=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{\delta q}{\delta\vartheta}=\frac{1}{x_1}\left(\frac{\delta x_2}{\delta\vartheta}\cos\widehat{Qx}+\frac{\delta z_2}{\delta\vartheta}\sin\widehat{Qx}\right)$$

$$=-\frac{1}{x_1}\cdot\frac{\delta z_2}{\delta\vartheta}=-\frac{l}{2x_1}\cos\vartheta\,,$$

oder wenn für x_1 dessen Werth eingeführt wird,

$$\frac{\delta q}{\delta s}=-\frac{l\sin\vartheta\cos\vartheta}{2r(1+\cos\vartheta)}\,.$$

Man findet dadurch sogleich:

$$N_2=\frac{1}{2}Q\frac{l\sin\vartheta\cos\vartheta}{r(1+\cos\vartheta)}=\frac{1}{2}Q\frac{l}{r}\frac{\cos\vartheta(1-\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\,.$$

Um ebenso den Werth von N_1 zu erhalten, läßt man der ganzen Geraden AB eine virtuelle Verrückung $-\varDelta n_1$ in einem der Kraft N_1 entgegengesetzten Sinne ertheilen; dadurch werden die virtuellen Wege der Kräfte P und $f_1 N_1$ gleich Null, derjenige der Kraft Q, deren Richtung zu der von N_1 parallel, dem Sinne nach aber entgegengesetzt ist, wird $\varDelta n_1$, der virtuelle Weg von $N_2=\varDelta n_1\cos\vartheta$, endlich derjenige von $f_2 N_2$ gleich $-\varDelta n_1\sin\vartheta$, und man findet damit die Gleichung:

$$N_1=Q-N_2(\cos\vartheta+f_2\sin\vartheta)$$

oder mit dem vorhergehenden Werthe von N_2

$$N_1=Q-\frac{1}{2}Q\frac{l}{r}\cdot\frac{\cos\vartheta(1-\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}(\cos\vartheta+f_2\sin\vartheta)\,.$$

Führt man nun diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so ergibt sich nach einigen Reductionen

$$P=\frac{1}{2}Q\frac{l}{r}\cos\vartheta(1-\cos\vartheta)\left[1+f_1f_2-(f_1-f_2)\cot\vartheta\right]-f_1Q\,.$$

Wenn $f_1=f_2=f$ ist, so hat man einfacher

$$P=\frac{1}{2}Q\frac{l}{r}\cos\vartheta(1-\cos\vartheta)(1+f^2)-fQ\,,$$

und wenn dann gefordert wird, daß die Gerade AB nur durch die Reibung im Gleichgewichte gehalten werde, daß also $P=0$ sei, so gibt die Gleichung:

$$\cos^2 \vartheta - \cos \vartheta + \frac{f}{1+f^2} \cdot \frac{2r}{l} = 0$$

den Werth des kleinsten Winkels ϑ, welchen die Gerade AB mit der wagrechten Ebene bilden kann, ohne auszugleiten; man zieht daraus

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4f}{1+f^2} \cdot \frac{2r}{l}},$$

und dieser Werth zeigt, daß es, so lange die Wurzelgröße reel ist, immer zwei solche Winkel gibt, von denen der eine kleiner, der andere größer als $\frac{1}{4}\pi$ ist. Nimmt man z. B. $r = \frac{1}{4} l$, $f = \frac{1}{3}$, so wird

$$\cos \vartheta = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{10}} = 0{,}5 \pm 0{,}316,$$

also entweder $\cos \vartheta = 0{,}816$, oder $\cos \vartheta = 0{,}184$
$\vartheta = 35^0\, 18'$ $\qquad$ $\vartheta = 79^0\, 25'$.

§. 143.

Indem ich es dem Leser überlasse, die vorhergehende Aufgabe nach dem frühern Verfahren in §. 132 u. ff. und umgekehrt die dort aufgelöste Aufgabe mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten aufzulösen, will ich die erstere noch zu einigen Bemerkungen über die Anwendung dieses Princips benützen.

Die vorhergehende Auflösung ist nur für die Voraussetzung gültig, daß die Reibung zu Gunsten der Kraft P wirkt, d. h. daß sich die Gerade AB an derjenigen Grenze des ruhenden Gleichgewichtes befindet, wo die kleinste im Sinne der Kraft Q thätige Kraft das Gleichgewicht stört, während die Kraft P auch größer sein darf, als sie im Vorhergehenden gefunden wurde, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird. Betrachtet man demnach die virtuelle Bewegung, wie wir es thun, als eine wirklich kleine Störung des Gleichgewichtes, welche durch eine oder mehrere sehr kleine und sehr kurze Zeit thätige Kräfte hervorgerufen wird, so sieht man ein, daß in dem vorliegenden Falle eine virtuelle Verrückung der Geraden AB nur in einem mit der Thätigkeit der Kraft Q übereinstimmenden Sinne möglich, und daß die Reibung immer als eine der Bewegung entgegenwirkende Kraft zu nehmen ist. Wollte man dagegen die Bedingungen für die andere Grenze des ruhenden Gleichgewichtes untersuchen, nämlich für diejenige, wo die Reibung zu Gunsten

der Kraft Q wirkt und die Kraft P ihren größten Werth hat, so daß die kleinste in ihrem Sinne thätige Kraft das Gleichgewicht stört, während eine im Sinne der Kraft Q wirkende Kraft eine bestimmte Intensität haben muß, um eine solche Störung bewirken zu können, so wird auch eine virtuelle Bewegung des Systems nur im Sinne der Kraft P oder des Punktes A gegen F möglich sein, wobei die Reibung wieder als eine der Bewegung entgegenwirkende Kraft einzuführen ist, was übrigens, wie man leicht sieht, darauf hinauskommt, daß sich nun das Zeichen des Reibungscoeffizienten in das entgegengesetzte umändert.

Nach der gewöhnlichen Ansicht von der virtuellen Bewegung eines im Gleichgewichte sich befindenden Systems, wornach diese als eine blos denkbare, nur an die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, gebundene betrachtet wird, müssen die Widerstände als unabhängige Kräfte von vorherbestimmter Richtung genommen und wie fortwährend thätige Kräfte behandelt werden. Die Fassung, welche wir oben dem Gesetze der virtuellen Bewegung gegeben haben, ist deßhalb der Natur der Sache viel entsprechender und richtiger; darnach sind die Widerstände der Bewegung immer als Kräfte zu betrachten, welche, wie bei der Bewegung überhaupt, so auch bei der virtuellen Bewegung erst durch die Bewegung hervorgerufen werden und dieser fortwährend entgegenwirken, und man hat in allen Fällen, die für das System gegebenen Verhältnisse mögen sein, welche sie wollen, nur zu untersuchen, ob eine beabsichtigte virtuelle Bewegung durch eine oder mehrere sehr kleine Kräfte hervorgerufen werden kann.

§. 144.

Nachdem nun das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für ein festes System mit zwei Kräften bewiesen ist, hat es keine Schwierigkeit mehr, sich von seiner Wahrheit für jedes andere feste System mit beliebig vielen Angriffspunkten beliebig gerichteter Kräfte zu überzeugen. Der einfachste und natürlichste Weg dazu dürfte folgender sein.

Zuerst überzeugen wir uns, daß wenn ein System eine allgemeine Resultirende hat, die in §. 33 des ersten Buches für Kräfte, welche an demselben Punkte angreifen, bewiesene Gleichung:

$$R\frac{\delta r}{\delta s} = \Sigma . P\frac{\delta p}{\delta s}$$

auch hier noch ihre Gültigkeit hat, d. h. daß bei jedem festen System, dessen Kräfte P sich durch eine einzige Kraft R

ersetzen lassen, die Summe der Verhältnisse der virtuellen Momente aller Kräfte zu der virtuellen Geschwindigkeit irgend eines Punktes denselben Anfangswerth hat, wie das Verhältniß des virtuellen Momentes der Resultirenden zu der virtuellen Geschwindigkeit desselben Punktes.

In der That ist in §. 83 gezeigt worden, daß wenn die eben gemachte Voraussetzung stattfindet und ein beliebiger Punkt in der Richtung der allgemeinen Resultirenden als Anfangspunkt eines Coordinaten-Systems genommen wird, das zur Zerlegung und Zusammensetzung der gegebenen Kräfte dient, die Resultirende der durch diese Zerlegung entstehenden drehenden Kräfte Null wird, daß also diese Kräfte unbeschadet ihrer Gesammtwirkung in irgend einen Punkt der allgemeinen Resultirenden versetzt und dort zu einer einzigen Kraft vereinigt werden können, wie in dem Falle, wo sich alle ihre Richtungen in demselben Punkte schneiden. Wir haben dann für alle Kräfte denselben Angriffspunkt und die Gültigkeit der obigen Gleichung kann demnach auch in unserm jetzigen Falle keinem Zweifel unterliegen. *)

Befindet sich nun ein festes System im Gleichgewicht, und zwar ohne feste Hindernisse der Bewegung, blos durch die an ihm thätigen Kräfte, so lassen sich diese, wie in §. 134 gezeigt wurde, immer auf zwei gleiche und direct entgegengesetzte zurückführen, so daß, wenn man eine Kraft $P_{\prime}$ ausscheidet, die übrigen P', P'', etc. sich zu einer Resultirenden R' vereinigen lassen, deren Richtung mit derjenigen der Kraft $P_{\prime}$ und mit der Geraden, welche die Angriffspunkte dieser beiden Kräfte verbindet, zusammenfällt. Das ganze System ist dadurch auf eines mit zwei Kräften zurückgeführt, und man hat nach den vorhergehenden §§.

$$P_{\prime}\frac{\delta p_{\prime}}{\delta s}+R'\frac{\delta r'}{\delta s}=0\,;$$

wir haben aber auch so eben nachgewiesen, daß

*) Es dürfte hier nicht überflüssig sein, zu bemerken, daß aus dem Obigen nicht der umgekehrte Satz:

$$\Sigma\,.\,P\frac{\delta p}{\delta s}=R\frac{\delta r}{\delta s}$$

gefolgert werden darf, nämlich als könne die Summe der Verhältnisse der virtuellen Momente aller Kräfte zu der virtuellen Geschwindigkeit irgend eines Punktes immer durch das Verhältniß des virtuellen Momentes einer einzigen Kraft zu derselben virtuellen Geschwindigkeit ersetzt werden.

$$R' \frac{\delta r'}{\delta s} = P' \frac{\delta p'}{\delta s} + P'' \frac{\delta p''}{\delta s} + \text{etc.}$$

ist, und es folgt daraus wieder

$$P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s} + P' \frac{\delta p'}{\delta s} + P'' \frac{\delta p''}{\delta s} + \text{etc.} = \Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s} = 0$$

als allgemeiner Ausdruck des Gleichgewichtes.

Ist das System nicht frei, sondern auf irgend eine Weise in seiner Bewegung beschränkt, so ist es einleuchtend, daß diese Beschränkung nicht durch eine beliebig kleine Kraft aufgehoben werden kann, da dieselbe in diesem Falle als nicht vorhanden zu betrachten wäre, daß also auch die virtuelle Bewegung dieser Beschränkung unterworfen bleibt; ferner kann man jede Beschränkung durch die Bedingung ersetzen, daß sich der eine oder der andere oder mehrere Punkte des Systems in bestimmten Curven oder auf gegebenen Flächen bewegen, welche einen dem auf sie ausgeübten Drucke mindestens gleichen Widerstand leisten. Durch Einführung dieser Widerstände in die Reihe der wirksamen Kräfte kommt dann die Untersuchung wieder auf die eines freien Systems zurück, und die Gleichung der virtuellen Momente nimmt die Form an:

$$\Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s} + \Sigma . N_{,} \frac{\delta n_{,}}{\delta s} = 0 .$$

Durch die Beschränkung der Bewegung hat man aber für jeden normalen Widerstand N, wie in §. 140

$$\frac{\delta n_{,}}{\delta s_{,}} = 0 ,$$

und die vorhergehende Gleichung wird wieder einfach

$$\Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s} = 0 ,$$

wie behauptet wurde.

Werden durch die Kräfte N neue Kräfte oder Widerstände, wie die Reibung, hervorgerufen, für welche dann die Intensität jener Widerstände oder drückenden Kräfte bekannt sein muß, so kann man wieder die vollständige Gleichung:

$$\Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s} + \Sigma . N_{,} \frac{\delta n_{,}}{\delta s} = 0$$

anwenden, und die virtuelle Bewegung, jedoch mit Beachtung der für diesen Fall in §. 143 niedergelegten Bemerkung, als unbeschränkte

betrachten, wodurch bei einer entsprechenden Auswahl der virtuellen Verrückungen die Werthe jener unbekannten Kräfte nach einander gefunden werden können. Für die Anwendung dürfte jedoch das frühere Verfahren (§. 136, u. f.) in den meisten Fällen viel leichter zum Ziele führen.

Endlich ist leicht zu sehen, daß auch der zweite Theil unseres Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, wonach immer Gleichgewicht stattfinden muß, wenn die Gleichung (106) befriedigt ist, in voller Wahrheit besteht. Denn diese Gleichung führt auf die nachstehende:

$$P' \frac{\delta p'}{\delta s} + P'' \frac{\delta p''}{\delta s} + \text{etc.} = - P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s},$$

aus welcher, wenn dieselbe für alle möglichen virtuellen Verrückungen des Systems gültig ist, hervorgeht, daß die Kraft P der Resultirenden aller übrigen Kräfte P', P'', etc. gleich und direct entgegengesetzt sein muß, und daß in dem Falle, wo die Bewegung beschränkt, die obige Gleichung also nur für bestimmte virtuelle Verrückungen wahr ist, die Kraft $P_{,}$, in entgegengesetztem Sinne genommen, die Resultirende aus den gegebenen Kräften P', P'', etc. und aus den die Beschränkung verursachenden Widerständen N vorstellt, wodurch jedesmal das Gleichgewicht verbürgt ist.

§. 145.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist in dem Vorhergehenden durch Anwendung von Lehrsätzen bewiesen worden, welche auf den Betrachtungen über die Gesammtwirkung der Kräfte, die an einem festen System thätig sind, beruhen, und aus welchen die in §. 134 aufgestellten Bedingungsgleichungen (104) und (105) für das Gleichgewicht eines freien festen Systems unmittelbar hervorgehen, da es sich hier nicht darum handelte, jenes Princip unabhängig festzustellen und daraus erst die besondern Gleichgewichtsbedingungen abzuleiten, sondern nur darum, seine Gültigkeit auch für ein festes System zu beweisen. Demohngeachtet dürfte es nicht überflüssig sein, zu zeigen, wie aus diesem Princip jene besondern Bedingungsgleichungen abgeleitet werden können.

Dazu ersetze ich zuerst jede der Kräfte P, P_1, etc. durch ihre drei rechtwinkligen Componenten $X = P \cos \widehat{Px}$, $Y = P \cos \widehat{Py}$, $Z = P \cos \widehat{Pz}$, u. s. f. nach drei festen Achsen und bezeichne die diesen Achsen entsprechenden Coordinaten ihrer Angriffspunkte mit

$x\,y\,z$; $x_1\,y_1\,z_1$, u. s. f.; man hat dann nach dem im vorhergehenden §. ausgesprochenen Satze

$$P\frac{\delta p}{\delta s} = X\frac{\delta x}{\delta s} + Y\frac{\delta y}{\delta s} + Z\frac{\delta z}{\delta s}$$

$$P_1\frac{\delta p_1}{\delta s_1} = X_1\frac{\delta x_1}{\delta s_1} + Y_1\frac{\delta y_1}{\delta y_1} + Z_1\frac{\delta z_1}{\delta s_1}$$

u. s. f.

und demnach auch

$$107.)\quad \Sigma\,.\,P_{,}\frac{\delta p_{,}}{\delta s_{,}}\frac{\delta s_{,}}{\delta s} = \Sigma\,.\left(X_{,}\frac{\delta x_{,}}{\delta s_{,}} + Y_{,}\frac{\delta y_{,}}{\delta s_{,}} + Z_{,}\frac{\delta z_{,}}{\delta s_{,}}\right)\frac{\delta s_{,}}{\delta s} = 0$$

als Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.

Der einfachste Weg, jene sechs Bedingungsgleichungen abzuleiten, wäre nun der in §. 35 im ersten Buche eingeschlagene, welcher darin besteht, daß man zuerst dem ganzen System eine fortschreitende virtuelle Bewegung im Sinne einer jeden der drei Coordinaten-Achsen und dann ebenso eine virtuelle drehende Bewegung um jede dieser Achsen ertheilen läßt, wodurch die genannten sechs Gleichungen (104) und (105) nach einander zum Vorschein kommen. Allgemeiner und eleganter ergeben sich dieselben aber zusammen auf folgendem Wege.

Seien α, β, γ die veränderlichen Coordinaten des Anfangspunktes eines neuen Coordinatensystems, welches mit dem festen System von materiellen Punkten fest verbunden ist und seiner Bewegung folgt, und in Bezug auf welches die Lage eines der Punkte des Systems durch die Coordinaten ξ, η, ζ bestimmt wird; ferner sei durch denselben Anfangspunkt ein drittes Achsensystem der x', y', z' so gelegt, daß es mit diesem Punkte fortschreitet, aber zu den ursprünglichen Achsen der x, y, z parallel bleibt. Man hat dann zuerst zwischen den Coordinaten x, y, z eines Punktes im System in Bezug auf die festen Achsen und den Coordinaten x', y', z' desselben Punktes in Bezug auf die zuletzt genannten Achsen die Beziehungen:

$$x = x' + \alpha\quad,\quad y = y' + \beta\quad,\quad z = z' + \gamma\quad.$$

und dann zwischen diesen letztern Coordinaten und denjenigen in Bezug auf die beweglichen Achsen der ξ, η, ζ die Gleichungen:

$$\xi = ax' + by' + cz'\,,$$

$$\eta = a'x' + b'y' + c'z'\,,$$

$$\zeta = a''x' + b''y' + c''z'\,,$$

worin nach §. 23 der Einleitung die Coeffizienten

$$a = \cos\widehat{x\xi} \quad , \quad b = \cos\widehat{y\xi} \quad , \quad c = \cos\widehat{z\xi}$$

$$a' = \cos\widehat{x\eta} \quad , \quad b' = \cos\widehat{y\eta} \quad , \quad c' = \cos\widehat{z\eta}$$

$$a'' = \cos\widehat{x\zeta} \quad , \quad b'' = \cos\widehat{y\zeta} \quad , \quad c'' = \cos\widehat{z\zeta}$$

die Cosinus der Winkel zwischen den festen Achsen der x, y, z und der beweglichen der ξ, η, ζ ausdrücken.

Ertheilt man nun dem festen System, oder was dasselbe ist, dem mit ihm festverbundenen Coordinatensystem der ξ, η, ζ eine beliebige virtuelle Bewegung, wobei natürlich die Werthe der Coordinaten ξ, η, ζ eines bestimmten Punktes im System keine Veränderung erleiden, so erhält man in Bezug auf die virtuelle Verrückung eines bestimmten Punktes die Aenderungs= oder Uebergangsgesetze:

$$\frac{\delta x}{\delta s} = \frac{\delta x'}{\delta s} + \frac{\delta \alpha}{\delta s} \quad , \quad \frac{\delta y}{\delta s} = \frac{\delta y'}{\delta s} + \frac{\delta \beta}{\delta s} \quad , \quad \frac{\delta z}{\delta s} = \frac{\delta z'}{\delta s} + \frac{\delta \gamma}{\delta s} \, ,$$

$$0 = a\frac{\delta x'}{\delta s} + b\frac{\delta y'}{\delta s} + c\frac{\delta z'}{\delta s} + x'\frac{\delta a}{\delta s} + y'\frac{\delta b}{\delta s} + z'\frac{\delta c}{\delta s} \, ,$$

$$0 = a'\frac{\delta x'}{\delta s} + b'\frac{\delta y'}{\delta s} + c'\frac{\delta z'}{\delta s} + x'\frac{\delta a'}{\delta s} + y'\frac{\delta b'}{\delta s} + z'\frac{\delta c'}{\delta s} \, ,$$

$$0 = a''\frac{\delta x'}{\delta s} + b''\frac{\delta y'}{\delta s} + c''\frac{\delta z'}{\delta s} + x'\frac{\delta a''}{\delta s} + y'\frac{\delta b''}{\delta s} + z'\frac{\delta c''}{\delta s} \, .$$

Multiplicirt man dann die drei letzten Gleichungen der Reihe nach zuerst mit a, a′, a″ und nimmt die Summe der drei Producte, dann mit b, b′, b″ und zuletzt mit c, c′, c″ und addirt jedesmal die drei Ergebnisse, so findet man mit Beachtung der zwischen diesen Coeffizienten stattfindenden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{array}\right\} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} ab + a'b' + a''b'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ bc + b'c' + b''c'' = 0 \end{array}\right\}$$

und der daraus folgenden Aenderungsgesetze:

$$\left\{\begin{aligned} a\frac{\partial a}{\partial s}+a'\frac{\partial a'}{\partial s}+a''\frac{\partial a''}{\partial s}&=0\,,\\ b\frac{\partial b}{\partial s}+b'\frac{\partial b'}{\partial s}+b''\frac{\partial b''}{\partial s}&=0\,,\\ c\frac{\partial c}{\partial s}+c'\frac{\partial c'}{\partial s}+c''\frac{\partial c''}{\partial s}&=0\,,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} a\frac{\partial b}{\partial s}+a'\frac{\partial b'}{\partial s}+a''\frac{\partial b''}{\partial s}&=-\left(b\frac{\partial a}{\partial s}+b'\frac{\partial a'}{\partial s}+b''\frac{\partial a''}{\partial s}\right),\\ c\frac{\partial a}{\partial s}+c'\frac{\partial a'}{\partial s}+c''\frac{\partial a''}{\partial s}&=-\left(a\frac{\partial c}{\partial s}+a'\frac{\partial c'}{\partial s}+a''\frac{\partial c''}{\partial s}\right),\\ b\frac{\partial c}{\partial s}+b'\frac{\partial c'}{\partial s}+b''\frac{\partial c''}{\partial s}&=-\left(c\frac{\partial b}{\partial s}+c'\frac{\partial b'}{\partial s}+c''\frac{\partial b''}{\partial s}\right),\end{aligned}\right.$$

die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial s}&=y'\left(b\frac{\partial a}{\partial s}+b'\frac{\partial a'}{\partial s}+b''\frac{\partial a''}{\partial s}\right)-z'\left(a\frac{\partial c}{\partial s}+a'\frac{\partial c'}{\partial s}+a''\frac{\partial c''}{\partial s}\right),\\ \frac{\partial y'}{\partial s}&=z'\left(c\frac{\partial b}{\partial s}+c'\frac{\partial b'}{\partial s}+c''\frac{\partial b''}{\partial s}\right)-x'\left(b\frac{\partial a}{\partial s}+b'\frac{\partial a'}{\partial s}+b''\frac{\partial a''}{\partial s}\right),\\ \frac{\partial z'}{\partial s}&=x'\left(a\frac{\partial c}{\partial s}+a'\frac{\partial c'}{\partial s}+a''\frac{\partial c''}{\partial s}\right)-y'\left(c\frac{\partial b}{\partial s}+c'\frac{\partial b'}{\partial s}+c''\frac{\partial b''}{\partial s}\right).\end{aligned}\right.$$

Setzen wir dann ferner

$$\left\{\begin{aligned} b\frac{\partial a}{\partial s}+b'\frac{\partial a'}{\partial s}+b''\frac{\partial a''}{\partial s}&=\frac{\partial \omega}{\partial s}\cos\nu\\ a\frac{\partial c}{\partial s}+a'\frac{\partial c'}{\partial s}+a''\frac{\partial c''}{\partial s}&=\frac{\partial \omega}{\partial s}\cos\mu\\ c\frac{\partial b}{\partial s}+c'\frac{\partial b'}{\partial c'}+c''\frac{\partial b''}{\partial s}&=\frac{\partial \omega}{\partial s}\cos\lambda\end{aligned}\right.$$

und nehmen den festen Anfangspunkt als anfängliche Lage des beweglichen, so daß wir erhalten

$$\alpha=0\quad,\quad\beta=0\quad,\quad\gamma=0\,,$$

was indessen keinen Einfluß auf die willkürlichen Aenderungsgesetze $\frac{\delta\alpha}{\delta s}$, $\frac{\delta\beta}{\delta s}$, $\frac{\delta\gamma}{\delta s}$ hat, so ergeben sich folgende Werthe für die Aenderungsgesetze der auf das feste System bezogenen Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta s} &= \frac{\delta\alpha}{\delta s} + \frac{\delta\omega}{\delta s}(y\cos\nu - z\cos\mu) \\ \frac{\delta y}{\delta s} &= \frac{\delta\beta}{\delta s} + \frac{\delta\omega}{\delta s}(z\cos\lambda - x\cos\nu) \\ \frac{\delta z}{\delta s} &= \frac{\delta\gamma}{\delta s} + \frac{\delta\omega}{\delta s}(x\cos\mu - y\cos\lambda) \end{aligned}\right\}.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß wenn man die von dem Punkte $x\,y\,z$ auf die Gerade, deren Winkel mit den drei festen Achsen λ, μ, ν sind, gefällte Senkrechte mit p bezeichnet, man hat

$$p = \sqrt{(x\cos\mu - y\cos\lambda)^2 + (z\cos\lambda - x\cos\nu)^2 + (y\cos\nu - z\cos\mu)^2},$$

und daß die Quotienten:

$$\frac{y\cos\nu - z\cos\mu}{p}, \quad \frac{z\cos\lambda - x\cos\nu}{p}, \quad \frac{x\cos\mu - y\cos\lambda}{p}$$

die Cosinus der Winkel l, m, n vorstellen, welche mit den drei festen Coordinaten-Achsen von einer Geraden gebildet werden, die sowohl auf dem zu dem Punkte $x\,y\,z$ gezogenen Fahrstrahl, als auf der vorhergenannten Geraden, welche mit denselben Achsen die Winkel λ, μ, ν einschließt, senkrecht steht. Diese letztere Gerade ist demnach offenbar die Achse für die virtuelle Drehung des Systems, für welche $\Delta\omega$ die allen Punkten des Systems gemeinschaftliche virtuelle Winkelgeschwindigkeit vorstellt; das Product $p\Delta\omega$ ist folglich das Maaß der dieser Drehung entsprechenden wirklichen virtuellen Geschwindigkeit des Punktes, dessen Coordinaten x, y, z sind, und die Ausdrücke:

$$\Delta\omega(y\cos\nu - z\cos\mu) = p\Delta\omega\cos l$$

$$\Delta\omega(z\cos\lambda - x\cos\nu) = p\Delta\omega\cos m$$

$$\Delta\omega(x\cos\mu - y\cos\lambda) = p\Delta\omega\cos n$$

stellen die Projectionen dieser von der Drehung herrührenden virtuellen Verrückung auf die drei Coordinaten-Achsen vor. Nach diesem kann

man nun mittels der vorhergehenden Werthe von $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ der Gleichung (107) die Form geben:

$$0 = \Sigma . \left[X \frac{\delta \alpha}{\delta s} + Y \frac{\delta \beta}{\delta s} + Z \frac{\delta \gamma}{\delta s} \right.$$

$$\left. + \frac{\delta \omega}{\delta s} \Big((Xy - Yx) \cos \nu + (Zx - Xz) \cos \mu + (Yz - Zy) \cos \lambda \Big) \right],$$

oder wenn man beachtet, daß sowohl die Aenderungsgesetze $\frac{\delta \alpha}{\delta s}$, $\frac{\delta \beta}{\delta s}$, $\frac{\delta \gamma}{\delta s}$, als die Winkel λ, μ, ν, ebenso wie das Aenderungsgesetz $\frac{\delta \omega}{\delta s}$ für alle Punkte des Systems denselben Werth haben, die Form:

$$0 = \frac{\delta \alpha}{\delta s} \Sigma X + \frac{\delta \beta}{\delta s} \Sigma Y + \frac{\delta \gamma}{\delta s} \Sigma Z$$

$$+ \frac{\delta \omega}{\delta s} \left[\cos \nu . \Sigma (Xy - Yx) + \cos \mu . \Sigma (Zx - Xz) + \cos \lambda . \Sigma (Yz - Zy) \right].$$

Da aber die Aenderungsgesetze $\frac{\delta \alpha}{\delta s}$, $\frac{\delta \beta}{\delta s}$, $\frac{\delta \gamma}{\delta s}$, $\frac{\delta \omega}{\delta s}$ durchaus willkürlich und unabhängig von einander sind, ebenso wie die Lage der Drehungsachse beliebig ist und die Winkel λ, μ, ν alle mögliche Werthe erhalten können, so kann diese Gleichung nur dann für alle mögliche virtuelle Verrückungen des Systems befriedigt werden, wenn die Coeffizienten der willkürlichen Größen selbst Null sind, d. h. wenn man hat

$$\Sigma X = 0 \quad , \quad \Sigma Y = 0 \quad , \quad \Sigma Z = 0 \,,$$

$$\Sigma (Xy - Yx) = 0 \,, \quad \Sigma (Zx - Xz) = 0 \,, \quad \Sigma (Yz - Zy) = 0 \,,$$

und diese Ausdrücke werden genau die in §. 134 für das Gleichgewicht eines freien festen Systems abgeleiteten Bedingungsgleichungen (104) und (105), wenn man darin statt X, Y, Z die Bezeichnung: $P \cos \widehat{Px}$, $P \cos \widehat{Py}$, $P \cos \widehat{Pz}$ einführt.

§. 146.

Schließlich noch die Bemerkung, daß das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten durchaus unabhängig ist von der Gestalt des Systems

und von der Art der Verbindung der einzelnen Punkte, daß es folglich ebensowohl für ein festes System mit stetig aufeinanderfolgenden Angriffspunkten wie für ein solches ohne stetigen Zusammenhang der einzelnen Punkte gültig sein muß, und nach dem, was man im vierten und sechsten Kapitel des vorigen Abschnitts gesehen hat, wird die Summe: $\Sigma.\left(X\frac{\delta x}{\delta s}+Y\frac{\delta y}{\delta s}+Z\frac{\delta z}{\delta s}\right)$ für ein stetiges System die Form eines dreifachen Integrals annehmen, dessen Grenzen durch die geometrische Form des Körpers gegeben sind. Die Kräfte X, Y, Z werden nämlich die **geometrischen Componenten** für den Punkt xyz und sind, wie man in §. 99 gesehen hat, die **Aenderungsgesetze** der entsprechenden **physischen** Componenten, welche auf einen Körpertheil wirken, der nach einer Seite hin von drei parallel zu den Coordinaten-Ebenen durch jenen Punkt xyz gelegten Ebenen begrenzt wird, in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung dieser Grenzen. Wenn daher $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die auf den genannten Körpertheil parallel zu den Achsen der x, y und z ausgeübten physischen Wirkungen sind, so hat man

$$X=\frac{d^3\mathfrak{X}}{dx\,dy\,dz}\ ,\quad Y=\frac{d^3\mathfrak{Y}}{dx\,dy\,dz}\ ,\quad Z=\frac{d^3\mathfrak{Z}}{dx\,dy\,dz}$$

und umgekehrt

$$\mathfrak{X}=\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.X\ ,\qquad \mathfrak{Y}=\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.Y\ ,$$

$$\mathfrak{Z}=\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.Z\ .$$

Man wird ferner aus der in §. 99 ausgeführten Ableitung schließen, daß für den Fall, wo die Kräfte X, Y, Z bei einem nicht stetigen System durch das Product aus der Masse m des Punktes xyz in eine Function dieser Coordinaten gemessen werden, so daß man hat

$$X=mf_1(x,y,z)\ ,\quad Y=mf_2(x,y,z)\ ,\quad Z=mf_3(x,y,z)\ ,$$

bei einem stetigen System die Masse m durch die geometrische Dichte q desselben Punktes ersetzt werden muß, und daß man für die geometrischen Componenten in dem Punkte xyz die Ausdrücke:

$$X=qf_1(x,y,z)\ ,\quad Y=qf_2(x,y,z)\ ,\quad Z=qf_3(x,y,z)$$

erhält, wodurch sich für die Gesammtwirkungen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ auf den oben bezeichneten begrenzten Körpertheil die Werthe:

$$\mathfrak{X}=\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\,f_1(x,y,z),\quad \mathfrak{Y}=\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\,f_2(x,y,z),$$

$$\mathfrak{Z}=\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.q\,f_3(x,y,z)$$

ergeben, in welchen q im Allgemeinen wie früher eine Function von x, y, z vorstellt.

Aus diesen Erörterungen wird sofort einleuchten, daß die Gleichung (107) für ein System mit stetig aufeinanderfolgenden Angriffspunkten die Form:

$$108.)\quad \int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.\left(X\frac{\delta x}{\delta s}+Y\frac{\delta y}{\delta s}+Z\frac{\delta z}{\delta s}\right)=0$$

annehmen muß, worin nun X, Y, Z als Functionen der drei Veränderlichen x, y, z zu betrachten sind. Wenn dann die Function:

$$X\frac{\delta x}{\delta s}+Y\frac{\delta y}{\delta s}+Z\frac{\delta z}{\delta s}$$

das vollständige Aenderungsgesetz einer Function F(x, y, z) in Bezug auf s ist, und man beachtet, daß bei einem festen System die virtuellen Wege der Kräfte und diese selbst durchaus unabhängig sind von der geometrischen Form oder Begrenzung desselben, so sieht man ein, daß die vorstehende Gleichung auch die Form:

$$109.)\quad \frac{\delta.\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.F(x,y,z)}{\delta s}=0$$

erhalten kann und so den Satz ausspricht, daß im Zustande des Gleichgewichtes die Function:

$$\int_{x_0}^{x}dx.\int_{y_0}^{y}dy.\int_{z_0}^{z}dz.F(x,y,z)$$

im Allgemeinen einen größten oder kleinsten Werth hat, wobei natürlich nicht ausgeschlossen ist, daß in einzelnen Fällen die obige Gleichung befriedigt werden und Gleichgewicht stattfinden kann,

ohne daß diese Function einen größten oder kleinsten Werth hat. Dabei entspricht im Allgemeinen ein größter Werth der stabilen Gleichgewichtslage; ein kleinster oder ein mittlerer, für welchen die obige Gleichung stattfindet, gehört dagegen einer unbeständigen Gleichgewichtslage an.

Um demnach z. B. die Bedingung für das Gleichgewicht eines schweren Körpers allgemein auszudrücken, wird man die Achse der z parallel zur Richtung der Schwere und die positiven z in gleichem Sinne, also nach unten gerichtet, annehmen; man hat dann

$$X = 0 \;, \quad Y = 0 \;, \quad Z = gq \;,$$

und damit nimmt die vorhergehende Function den Werth an (§. 22):

$$\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . gqz = P\mathbf{z} \;,$$

worin P das Gewicht des ganzen Körpers und $\mathbf{z}$ den Abstand seines Schwerpunktes von der Ebene der xy bezeichnet. Die Gleichung (109) wird daher für diesen Fall

$$\frac{\delta . \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . gqz}{\delta s} = \frac{\delta . P\mathbf{z}}{\delta s} = 0 \;,$$

oder da P unveränderlich ist, einfach

$$\frac{\delta \mathbf{z}}{\delta s} = 0 \;.$$

Wenn demnach ein schwerer Körper im Gleichgewicht ist, so hat sein Schwerpunkt im Allgemeinen die tiefste oder die höchste Lage unter allen denen, die ihm durch eine kleine Verrückung ertheilt werden können, und zwar wird er bei der tiefsten Lage oder für einen größten Werth von $\mathbf{z}$ die stabile, in jeder andern eine nicht stabile Lage haben. So wird ein homogener elliptischer Cylinder auf einer horizontalen Ebene im Gleichgewicht bleiben, wenn die durch seine Achse und eine der beiden Achsen der erzeugenden Ellipse gelegte Ebene eine lothrechte Richtung hat, und das Gleichgewicht wird stabil sein, wenn diese Ebene die kleine Achse der Ellipse enthält. Für ein homogenes Ellipsoid dagegen

gibt es drei Gleichgewichtslagen, nämlich diejenigen Lagen, in welchen eine seiner drei Achsen zur Richtung der Schwere parallel ist, und es ist leicht zu sehen, daß wenn dies die mittlere Achse ist, weder ein größter noch ein kleinster Werth für das Product PZ stattfindet; das Gleichgewicht ist aber nur stabil für die lothrechte Lage der kleinsten Achse.

Der eben ausgesprochene Satz kann natürlich nicht mehr angewendet werden, wenn Reibung zwischen dem festen Körper und den Hindernissen der Bewegung stattfindet. Für diesen Fall nimmt die Gleichung (108) die Form an:

$$110.)\quad \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . \left(X\frac{\delta x}{\delta s}+Y\frac{\delta y}{\delta s}+Z\frac{\delta z}{\delta s}\right)-\Sigma . fN\frac{\delta s_{\prime}}{\delta s}=0\,,$$

und für einen schweren Körper hat man demnach als Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$\frac{\delta . PZ}{\delta s}-\Sigma . fN\frac{\delta s_{\prime}}{\delta s}=0\,.$$

Es soll dem Leser überlassen werden, diese Gleichung auf den in §. 128 kurz berührten Fall eines auf einer geneigten Ebene mittels der Reibung im Gleichgewicht bleibenden nicht homogenen Cylinders, dessen Schwerpunkt außerhalb der Achse liegt und dann weder eine tiefste noch eine höchste Lage hat, anzuwenden und daraus weitere Folgerungen zu ziehen.

Dritter Abschnitt.

Bewegung eines festen Systems.

Erstes Kapitel.

Fortschreitende Bewegung.

§. 147.

Die Bewegung eines festen Systems können wir, wie schon in der Einleitung erörtert wurde, in unserer Vorstellung immer in zwei sehr verschiedenartige Bewegungen zerlegen, nämlich in eine fortschreitende und in eine drehende Bewegung. Bei der ersten dieser Bewegungen, welche wir zuerst näher betrachten wollen, denken wir uns alle Punkte des Systems in ganz gleichartiger Bewegung begriffen, so daß alle in demselben Augenblicke dieselbe Geschwindigkeit haben und alle ihre Bahnen parallele und congruente Curven sind. Unter welchen Bedingungen diese Bewegung für sich allein möglich ist, kann erst im vierten Kapitel ausgemacht werden; für jetzt genügt es, uns eine solche Bewegung vorzustellen, um die Ueberzeugung zu gewinnen, daß es für die genaue Kenntniß derselben hinreicht, wenn die Bewegung irgend eines bestimmten Punktes des Systems bekannt ist, theils weil man in den meisten Fällen für diese Bewegung von der nähern Betrachtung einzelner Punkte des Systems Umgang nimmt und sich das Ganze als ein Untheilbares oder als ein Atom vorstellt, wie dies offenbar bei der Bewegung einer Geschützkugel oder bei der Bewegung eines Planeten in seiner Bahn um die Sonne der Fall ist, theils auch weil es nicht schwer sein kann, aus der Bewegung jenes bestimmten oder Hauptpunktes auf die eines andern zu schließen, da nicht nur die Geschwindigkeit

aller Punkte dieselbe ist, sondern auch ihre Lage in Bezug auf ein bewegliches Coordinaten-System, dessen Anfangspunkt der Hauptpunkt und dessen Achsen immer parallel zu denen eines festen Systems bleiben, während der fortschreitenden Bewegung sich nicht ändert.

Wir können uns demnach für die fortschreitende Bewegung eines Systems dessen ganze Masse in dem einen Punkte, welchen wir den Hauptpunkt genannt haben, vereinigt denken und diesen zugleich als Anfangspunkt eines Coordinatensystems zum Zwecke der Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte, also auch als Angriffspunkt der Resultirenden der fördernden Kräfte nehmen, und die Gesetze der fortschreitenden Bewegung eines festen Systems werden dann dieselben sein wie die eines materiellen Punktes, an welchem eine jener Resultirenden aller fördernden Kräfte gleiche Kraft thätig, und dessen Masse der Masse des ganzen Systems gleich ist.

Offenbar ist es bei dieser Betrachtungsweise ganz gleichgültig, welchen Punkt des Systems wir als Hauptpunkt annehmen, da die Resultirende der fördernden Kräfte, wie im fünften Kapitel des ersten Abschnitts gezeigt worden ist, immer dieselbe Intensität und Richtung behält, auf welches Coordinatensystem man auch die Angriffspunkte der gegebenen Kräfte und ihre Richtungen beziehen mag. Es ist aber an und für sich schon am natürlichsten, den Schwerpunkt des Systems, oder wie wir ihn wegen der Unabhängigkeit seiner Lage von der Intensität der Schwere, und weil dieselbe nur durch die Vertheilung der Masse in dem System bedingt wird, in §. 22 schon genannt haben und künftig in dieser Beziehung immer nennen werden, den Mittelpunkt der Masse des Systems als denjenigen Punkt anzunehmen, in welchem die Masse desselben vereinigt und an dem die Resultirende der fördernden Kräfte angreifend gedacht wird, und wir wollen einstweilen auf diese Ansicht hin, um eine bestimmte Vorstellung zu haben, immer den Mittelpunkt der Masse eines festen Systems als dessen Hauptpunkt ansehen und demnach unter der fortschreitenden Bewegung desselben die seines Massenmittelpunktes verstehen. Wir werden im vierten Kapitel zeigen, daß diese Annahme auch auf nothwendigen Gründen beruht.

Nach diesen Erläuterungen können also alle allgemeinen und besondern Bewegungsgesetze, welche im dritten Abschnitte des ersten Buches gefunden wurden, unmittelbar auf die Bewegung des Mittelpunktes der Masse eines festen Systems übertragen werden; wir können z. B. die Bewegung eines schweren Körpers im luftleeren Raume nach

derjenigen eines schweren Punktes beurtheilen, die Bewegung der Planeten nach derjenigen eines Atoms, auf welches eine anziehende Kraft wirkt, deren Intensität dem Quadrate der Entfernung verkehrt proportional ist, und deren Richtung immer durch denselben festen Punkt, den Mittelpunkt der Sonne, geht, u. s. w., und die Lehre von der fortschreitenden Bewegung eines festen Systems wird in jener von der Bewegung eines materiellen Punktes der Hauptsache nach enthalten sein. Es bleibt uns deßhalb nur übrig, jene Gesetze noch auf einen besondern Fall anzuwenden.

§. 148.

Bei allen Bewegungen fester Körper, welche auf der Erde vorkommen, zeigt sich nämlich ein Widerstand, welcher von den sie umgebenden materiellen Flüssigkeiten, meistens der Luft, herrührt und welcher nicht wie die Reibung von der Gestalt und Geschwindigkeit des in Bewegung begriffenen Körpers unabhängig ist, sondern vielmehr in einer sehr engen Beziehung zu diesen Eigenschaften des Körpers und seiner Bewegung steht. Dieser Widerstand, welcher nicht wohl auf einen materiellen Punkt übertragen werden kann, der keine bestimmte Gestalt und deßhalb auch keine bestimmte Oberfläche und keinen meßbaren Rauminhalt hat, soll nun bei der fortschreitenden Bewegung fester Körper berücksichtigt und in einigen besondern Fällen dessen Einfluß auf die Bewegung eines solchen näher untersucht werden.

Zu diesem Zwecke gehe ich von der gewöhnlichen einfachen, wenn auch durch die Erfahrung als nicht strenge richtig erwiesenen Annahme aus, daß der genannte Widerstand bei sonst gleichen Verhältnissen dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers und der Fläche seines zur Richtung der Bewegung senkrechten größten Querschnittes proportional ist, so daß man hat

$$W = f, Q v^2 \text{ Kilogr.},$$

wenn W den betreffenden Widerstand, Q die Fläche des ebenbezeichneten Querschnittes in Quadratmetern, v die Geschwindigkeit in Metern und f, einen Factor ausdrückt, welcher hauptsächlich von der Dichte und Beweglichkeit der den Körper umgebenden Flüssigkeit, zugleich aber auch von der Gestalt des Körpers abhängt und sich selbst mit der Geschwindigkeit etwas ändert, was indessen hier nicht berücksichtigt werden kann.

Dieser Widerstand W kann als eine Kraft betrachtet werden, welche in einem der Bewegung entgegengesetzten Sinne auf den Körper wirkt und ihm eine entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilen oder seine

Bewegungsgröße vermindern will, und man wird einsehen, daß diese entgegengesetzte Geschwindigkeit bei sonst gleichen Umständen, also namentlich bei gleicher Gestalt und Größe des bewegten Körpers, von der Masse oder Dichte desselben abhängen wird, und zwar wird dieselbe im umgekehrten Verhältnisse zu der letztern stehen, die Bewegung also um so mehr verzögert werden, je weniger dicht der Körper ist oder je weniger Masse derselbe enthält.

Um diese Beziehung des Widerstandes zu der Masse des bewegten Körpers auszudrücken und zugleich den analytischen Ausdrücken eine homogene Form zu geben, bezeichne ich durch k diejenige Geschwindigkeit, mit welcher der gegebene Körper in der ihn umgebenden Flüssigkeit bewegt werden muß, damit der Widerstand der letztern dem Gewichte des Körpers an der Oberfläche der Erde gleich wird, und erhalte dadurch die Gleichungen:

$$W_{,} = f_{,}Qk^2 = P = Mg \quad ; \qquad Wk^2 = W_{,}v^2 ,$$

$$W = P\frac{v^2}{k^2} = Mg\frac{v^2}{k^2} ,$$

worin $W_{,}$ den Widerstand der Flüssigkeit für die Geschwindigkeit k, P das Gewicht und M die Masse des bewegten Körpers vorstellt. Man zieht daraus für k den Werth:

$$k = \sqrt{\frac{P}{f_{,}Q}} ,$$

welcher zeigt, daß für Körper von gleichem Stoffe und ähnlicher Gestalt der Werth von k wie die Quadratwurzel aus der entsprechenden Längenausdehnung zunimmt, und daß für denselben Körper k um so kleiner wird, je dichter die ihn umgebende Flüssigkeit oder überhaupt je größer der von ihr geleistete Widerstand ist.

Endlich ist die Richtung der Kraft W immer dieselbe wie die der Tangente an der Bahn des bewegten Körpers, und man hat demnach für ihre drei Componenten nach drei festen Coordinaten-Achsen, auf welche auch die Bahn des Bewegten bezogen ist, die Werthe:

$$W\frac{dx}{ds} \quad , \qquad W\frac{dy}{ds} \quad , \qquad W\frac{dz}{ds} .$$

Führt man nun diese Kräfte in die allgemeinen Gleichungen (68) im ersten Buche für die Bewegung eines materiellen Punktes ein, so werden diese

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= X - Mg\frac{v^2}{k^2}\frac{dx}{ds} \\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= Y - Mg\frac{v^2}{k^2}\frac{dy}{ds} \\ M\frac{d^2z}{dt^2} &= Z - Mg\frac{v^2}{k^2}\frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\}; \qquad (111.$$

die Gleichung (69) daselbst wird ebenso

$$M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2s}{dt^2} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} - Mg\frac{v^2}{k^2}, \quad (112.$$

und diese kann in solchen Fällen, wo die Bahn des Bewegten bekannt oder gegeben ist, also namentlich bei der gezwungenen Bewegung, vortheilhaft angewendet werden; in solchen Fällen dagegen, wo die Bahn des Bewegten und seine Geschwindigkeit zu bestimmen ist, muß man sich immer der drei ersten Gleichungen (111) bedienen. Um diese Anwendung und die analytische Behandlung der vorhergehenden Gleichungen zu zeigen, wollen wir einige besondere Fälle ins Einzelne verfolgen.

§. 149.

Untersuchen wir zuerst die Bewegung eines schweren Körpers, welcher in einer homogenen schweren Flüssigkeit lothrecht gegen die Oberfläche der Erde fällt.

Wenn die Flüssigkeit nicht schwer wäre, so wäre das Gewicht P des fallenden Körpers die bewegende Kraft; in einer schweren Flüssigkeit eingetaucht, erleidet derselbe aber nach einem bekannten Gesetze, einen von unten nach oben gerichteten Druck, welcher dem Gewichte einer ihm an Rauminhalt gleichen Menge der Flüssigkeit gleich ist und jene abwärts gerichtete bewegende Kraft um ebensoviel vermindert. Ist daher p das Gewicht für die Raumeinheit des festen Körpers, p' dasselbe für die Raumeinheit der Flüssigkeit, so wird der Quotient $\frac{P}{p}$ den Rauminhalt des Körpers und $p'\frac{P}{p}$ oder $\frac{p'}{p}P$ das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit ausdrücken, und die bewegende Kraft R durch

$$R = P - \frac{p'}{p}P = P\left(1 - \frac{p'}{p}\right)$$

gemessen werden; sie wird also nur in solchen Flüssigkeiten im Sinne der Schwere wirken, für welche $p' < p$ ist; im entgegengesetzten Falle wird R negativ, und der Körper wird sich aufwärts bewegen. Diese Verminderung der bewegenden Kraft P wird übrigens noch größer, wenn der Körper in Bewegung ist, weil er vermöge der Adhäsion immer einen Theil der Flüssigkeit mit sich fortführt, und daher ein Theil der bewegenden Kraft für diese bewegte Masse in Anspruch genommen wird. Von dieser weiteren Verminderung wollen wir indessen für jetzt Umgang nehmen und uns unter $k_,$ eine Geschwindigkeit vorstellen, bei welcher der Widerstand, welchen der Körper in der Flüssigkeit erleidet, der bewegenden Kraft R oder dem Unterschiede zwischen dem Gewichte des Körpers und dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich wird, so daß man nun hat

$$W = P\left(1 - \frac{p'}{p}\right)\frac{v^2}{k_,^2} \quad \text{und} \quad \frac{g}{k^2} = \frac{g\left(1 - \frac{p'}{p}\right)}{k_,^2}.$$

Nehmen wir nun die Achse der z parallel zur Richtung der Schwere, ihre positive Seite abwärts gerichtet an und den Anfang derselben in dem Orte, von welchem der Bewegte ohne anfängliche Geschwindigkeit ausgeht, so haben wir

$$X = 0 \;, \quad Y = 0 \;, \quad Z = R = Mg\left(1 - \frac{p'}{p}\right),$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = 0 \;, \quad \frac{dz}{ds} = 1 \;, \quad s = z \;,$$

und die Gleichung (112) oder die dritte der Gleichungen (111), welche nun allein hinreicht, wird

$$M\frac{d^2z}{dt^2} = M\frac{dv}{dt} = Mg\left(1 - \frac{p'}{p}\right) - W$$

oder einfach, indem man W durch seinen obigen Werth und $g\left(1 - \frac{p'}{p}\right)$ durch $g_,$ ersetzt,

$$\text{a)} \qquad \frac{dv}{dt} = g_,\left(1 - \frac{v^2}{k_,^2}\right).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung gibt

$$\frac{g_, t}{k_,} = \int_0^v dv \, . \, \frac{k_,}{k_,^2 - v^2} = \frac{1}{2} \, logn \, \frac{k_, + v}{k_, - v} \, ,$$

und wenn daraus der Werth von v in Function von t gezogen wird, so ergibt sich der Ausdruck:

$$v = k_{,} \frac{e^{\frac{2g_{,}t}{k_{,}}} - 1}{e^{\frac{2g_{,}t}{k_{,}}} + 1} = k_{,} \frac{e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} - e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}}{e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}}$$

in welchen e die Basis der natürlichen Logarithmen vorstellt.

Setzt man dann für v seinen Werth: $\frac{dz}{dt}$ so ergibt sich weiter

$$z = \int_0^t dt \,.\, k_{,} \frac{e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} - e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}}{e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}},$$

und mit einiger Aufmerksamkeit wird man sogleich wahrnehmen, daß der Zähler der unter dem Integralzeichen stehenden Größe, mit $\frac{g_{,}}{k_{,}}$ multiplicirt, die abgeleitete Function des Nenners gibt, daß man also zwischen den angedeuteten Grenzen

$$z = \frac{k_{,}^2}{g_{,}} \, logn \,.\, \frac{1}{2} \left(e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}} \right)$$

als Ausdruck für die in der Zeit t zurückgelegte Fallhöhe erhält.

Um dieselbe Größe in Function von v zu erhalten, zieht man aus der Gleichung (a) dadurch, daß man die linke Seite mit $v\frac{dt}{dz}$ multiplicirt,

$$v\frac{dv}{dz} = g_{,}\left(1 - \frac{v^2}{k_{,}^2}\right),$$

und die Integration führt auf

$$\frac{2g_{,}z}{k_{,}^2} = \int_0^v dv \,.\, \frac{v}{k_{,}^2 - v^2} = \frac{1}{2} \, logn \, \frac{k_{,}^2}{k_{,}^2 - v^2},$$

woraus sich sofort

$$z = \frac{k_{,}^{2}}{2g_{,}}\, logn \frac{k_{,}^{2}}{k_{,}^{2}-v^{2}} = \frac{k_{,}^{2}}{g_{,}}\, logn \frac{k_{,}}{\sqrt{k_{,}^{2}-v^{2}}}$$

als der gesuchte Werth ergibt.

Der Werth von v in Function von t kann nun auch unter die Form gebracht werden:

$$v = k_{,}\left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2g_{,}t}{k_{,}}}+1}\right),$$

und man schließt daraus, daß die Geschwindigkeit v des Bewegten immer kleiner ist, als die Geschwindigkeit $k_{,}$, daß sie sich aber dieser letztern immer mehr und um so rascher nähert, je länger die Bewegung dauert, weil das Glied $e^{\frac{2g_{,}t}{k_{,}}}$ sehr rasch wächst, wenn t größere Werthe erhält, vorausgesetzt, daß der Werth von $k_{,}$ nicht sehr groß ist, was übrigens selbst für das Verhältniß unserer dichtesten Stoffe zu der atmosphärischen Luft nicht stattfindet; die Bewegung nähert sich also immer nach einiger Zeit mehr und mehr einer gleichförmigen. Für die Bewegung eines festen Körpers im Wasser z. B. erhält $k_{,}$ nur sehr kleine Werthe; dieselbe ist deßhalb sehr bald von einer gleichförmigen nicht mehr zu unterscheiden.

Auf ähnliche Ergebnisse führt auch der Werth von z in t, wenn man darin das Glied $e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}$ gegen $e^{+\frac{g_{,}t}{k_{,}}}$ vernachlässigt und beachtet, daß $logn\, e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} = \frac{g_{,}t}{k_{,}}$ ist; denn man erhält dadurch

$$z = k_{,}t - \frac{2k_{,}^{2}}{g_{,}},$$

also die Gleichung einer gleichförmigen Bewegung, welche aber nicht von dem Anfang der z, sondern in einer Entfernung $\frac{2k_{,}^{2}}{g_{,}}$ von demselben ausgegangen zu sein scheint.

Will man nun aber von unserer so eben untersuchten Bewegung

auf jene im leeren Raume zurückgehen, so wird $k_{,}$ unendlich, und die Werthe von v und z erscheinen unter der unbestimmten Form $0 . \infty$, welche auf die Form $\frac{0}{0}$ zurückkommt, wenn man die Werthe von v und z in folgender Weise darstellt:

$$v = \frac{e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} - e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}}{\dfrac{e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}}{k_{,}}}, \quad z = \frac{logn . \frac{1}{2}\left(e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}\right)}{\frac{g_{,}}{k_{,}^2}},$$

und man erhält den wahren Werth von v nach den bekannten Regeln durch das Verhältniß der Aenderungsgesetze von Zähler und Nenner des ersten Werthes, in Bezug auf $k_{,}$ genommen; der wahre Werth von z dagegen ergibt sich erst durch die zweiten Aenderungsgesetze seines Zählers und Nenners in Bezug auf $k_{,}$ oder auch mittels der ersten und des Werthes von v.

Für große Werthe von $k_{,}$ kann man die Werthe von v und z auch in Reihen entwickeln, welche nach negativen Potenzen von $k_{,}$ fortschreiten, und aus diesen erhält man dann unmittelbar die richtigen Werthe von v und z für $k_{,} = \infty$. Man hat nämlich

$$e^{\pm\frac{g_{,}t}{k_{,}}} = 1 \pm \frac{g_{,}t}{k_{,}} + \frac{1}{2}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2} \pm \frac{1}{6}\frac{g_{,}^3t^3}{k_{,}^3} + \frac{1}{24}\frac{g_{,}^4t^4}{k_{,}^4} \pm \text{etc.}$$

und demnach wird

$$e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2} + \frac{1}{24}\frac{g_{,}^4t^4}{k_{,}^4} + \text{etc.}\right),$$

$$e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} - e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}} = 2\left(\frac{g_{,}t}{k_{,}} + \frac{1}{6}\frac{g_{,}^3t^3}{k_{,}^3} + \text{etc.}\right),$$

wodurch sich dann mit Beschränkung auf die ersten Glieder

$$v = g_{,}t\left(1 - \frac{1}{3}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2} + \text{etc.}\right)$$

ergibt. Ferner hat man

$$\log n \cdot \frac{1}{2}\left(e^{\frac{g_{,}t}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t}{k_{,}}}\right) = \log n\left[1 + \frac{1}{2}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2} + \text{etc.}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2} + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{1}{8}\frac{g_{,}^4t^4}{k_{,}^4}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2} + \text{etc.}\right)^2$$

$$+ \text{etc.},$$

und damit findet man sofort

$$z = \frac{1}{2}g_{,}t^2\left(1 - \frac{1}{6}\frac{g_{,}^2t^2}{k_{,}^2} + \text{etc.}\right).$$

Diese Reihen sind jedenfalls convergent, so lange $\frac{g_{,}t}{k_{,}}$ kleiner als 1 bleibt, und können in solchen Fällen zur annähernden Berechnung benützt werden. Für $k_{,} = \infty$ und $g_{,} = g$ geben sie sogleich

$$v = gt\ ,\quad z = \tfrac{1}{2}gt^2$$

als Werthe für die Geschwindigkeit und die Fallhöhe im leeren Raume, wie sie in §. 49 des ersten Buches gefunden wurden.

Die allgemeinen Werthe von v und z in t zeigen endlich, daß wenn $g_{,}$ negativ wird, d. h. wenn der bewegte Körper spezifisch leichter ist, als die ihn umgebende Flüssigkeit, jene Größen nur die Zeichen ändern, daß also die Bewegung bis auf den Sinn ihrer Richtung dieselbe bleibt; in den Werth von $k_{,}$ darf aber der Werth von $g_{,}$ nicht negativ eingeführt werden, weil dieser in diesem Falle imaginär würde.

§. 150.

Als zweiter Fall sei die Bewegung eines mit einer anfänglichen Geschwindigkeit aufsteigenden schweren Körpers, für welchen $g\left(1 - \frac{p'}{p}\right)$ einen positiven Werth hat, zu untersuchen.

Dazu werden wir die positive Achse der z, im Sinne der anfänglichen Geschwindigkeit v_0, also nach Oben gerichtet, annehmen und demnach als bewegende Kraft $Z = -Mg\left(1 - \frac{p'}{p}\right)$ und als Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit den Ausdruck

$$\frac{dv}{dt} = -g_,\left(1+\frac{v^2}{k_,^2}\right)$$

erhalten, worin wieder $g_,$ und $k_,$ die frühere Bedeutung haben; wir ziehen daraus auf gewöhnliche Weise

$$\frac{g_, t}{k_,} = -\int_{v_0}^{v} dv \cdot \frac{1}{k_,\left(1+\frac{v^2}{k_,^2}\right)} = arc\ tang\,\frac{v_0}{k_,} - arc\ tang\,\frac{v}{k_,}\,,$$

und wenn diese Gleichung wieder in Bezug auf v aufgelöset wird, so ergibt sich

$$v = k_,\ tang\left(arc\ tang\,\frac{v_0}{k_,} - \frac{g_, t}{k_,}\right),$$

also durch Entwickelung

$$v = k_,\,\frac{v_0 - k_,\ tang\,\frac{g_, t}{k_,}}{k_, + v_0\ tang\,\frac{g_, t}{k_,}} = k_,\,\frac{v_0\cos\frac{g_, t}{k_,} - k_,\sin\frac{g_, t}{k_,}}{v_0\sin\frac{g_, t}{k_,} + k_,\cos\frac{g_, t}{k_,}}\,.$$

Für $t = 0$ gibt dieser Ausdruck natürlich $v = v_0$; wenn dann t wächst, so wächst auch $\sin\frac{g_, t}{k_,}$, während $\cos\frac{g_, t}{k_,}$ immer kleiner wird; es wird also auch v immer kleiner werden, und folglich ein Zeitpunkt eintreten, wo der Zähler des vorhergehenden Werthes und damit v selbst Null wird; dieses wird stattfinden, wenn

$$tang\,\frac{g_, t}{k_,} = \frac{v_0}{k_,}\,, \text{ oder } t = \frac{k_,}{g_,}\,arc\ tang\,\frac{v_0}{k_,} = T_,$$

geworden ist. Von diesem Augenblicke an wird v negativ, der Körper fällt also zurück und nimmt die im vorigen §. untersuchte Bewegung an; zugleich ändert sich aber auch der Sinn des Widerstandes in Bezug auf den der bewegenden Kraft, und $k_,$ wird imaginär. Setzt man daher für t die Zeit $T_, + t'$ in den vorhergehenden Werth von v, und $k_,\sqrt{-1}$ für $k_,$, so muß man für v denselben Werth, wie im vorigen Falle, aber mit entgegengesetztem Zeichen finden. Auf diese Weise ergibt sich aber zunächst mit Beachtung des vorstehenden Werthes von T, und nach einigen Reductionen

$$v = -k_{,}\sqrt{-1}\, \mathit{tang}\, \frac{g_{,}t'}{k_{,}\sqrt{-1}},$$

und nach den bekannten imaginären Beziehungen zwischen den Winkelfunctionen und den Exponentialgrößen, nämlich

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right),$$

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right),$$

$$\mathit{tang}\, x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}},$$

folgt dann, wie behauptet wurde,

$$v = -k_{,} \frac{e^{\frac{g_{,}t'}{k_{,}}} - e^{-\frac{g_{,}t'}{k_{,}}}}{e^{\frac{g_{,}t'}{k_{,}}} + e^{-\frac{g_{,}t'}{k_{,}}}}.$$

Um nun die Höhe z zu finden, bis zu welcher sich der Bewegte in der Zeit t erhebt, ersetzt man wieder v durch $\frac{dz}{dt}$ und hat dann

$$z = k_{,}\int_0^t dt. \frac{v_0 \cos\frac{g_{,}t}{k_{,}} - k_{,} \sin\frac{g_{,}t}{k_{,}}}{v_0 \sin\frac{g_{,}t}{k_{,}} + k_{,} \cos\frac{g_{,}t}{k_{,}}} = \frac{k_{,}^2}{g_{,}} \mathit{logn} \frac{v_0 \sin\frac{g_{,}t}{k_{,}} + k_{,} \cos\frac{g_{,}t}{k_{,}}}{k_{,}}.$$

Durch v ausgedrückt erhält man dagegen

$$\frac{2g_{,}z}{k_{,}^2} = -\int_{v_0}^{v} dv. \frac{v}{k_{,}^2 + v^2} = \mathit{logn} \frac{k_{,}^2 + v_0^2}{k_{,}^2 + v^2}$$

und dadurch

$$z = \frac{k_{,}^2}{2g_{,}} \mathit{logn} \frac{k_{,}^2 + v_0^2}{k_{,}^2 + v^2} = \frac{k_{,}^2}{g_{,}} \mathit{logn} \sqrt{\frac{k_{,}^2 + v_0^2}{k_{,}^2 + v^2}}.$$

Wird nun in diesem Werthe $v = 0$ gesetzt, so folgt als Ausdruck für die ganze Steighöhe h

$$h = \frac{k_,^2}{2g} \; logn \; \frac{k_,^2 + v_0^2}{k_,^2},$$

und wenn derselbe dem in v ausgedrückten allgemeinen Werthe der Fallhöhe z des vorigen §. gleichgesetzt wird, so kann aus der sich ergebenden Gleichung:

$$\frac{k_,^2}{k_,^2 + v^2} = \frac{k_,^2 + v_0^2}{k_,^2}$$

der Werth für die Endgeschwindigkeit $v_,$ gezogen werden, mit welcher der zurückfallende Körper an der Oberfläche der Erde wieder ankommt; man findet daraus

$$v_, = v_0 \sqrt{\frac{k_,^2}{k_,^2 + v_0^2}},$$

und dieser Ausdruck zeigt, daß die Endgeschwindigkeit $v_,$ immer kleiner ist als die anfängliche v_0, und zwar um so mehr, je kleiner $k_,$ oder je größer der Widerstand der Flüssigkeit ist.

Endlich wird man die Zeit T_2 für das Zurückfallen erhalten, wenn man den vorhergehenden Werth der Endgeschwindigkeit $v_,$ in den im vorigen §. abgeleiteten Werth von t einführt, nachdem man denselben unter die Form gebracht hat:

$$t = \frac{k_,}{g_,} \, logn \, \frac{k_, + v}{\sqrt{k_,^2 - v^2}}.$$

Dieses Verfahren gibt

$$T_2 = \frac{k_,}{g_,} \; logn \; \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + k_,^2}}{k_,},$$

und damit folgt zuletzt der Ausdruck:

$$T = \frac{k_,}{g_,} \left(arc\ tang \frac{v_0}{k_,} + logn \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + k_,^2}}{k_,} \right)$$

für die ganze Zeit $T = T_1 + T_2$ der Bewegung; dieser Werth kann dazu dienen, v_0 oder $k_,$ zu bestimmen, wenn T durch Beobachtung gegeben ist.

§. 151.

Ehe ich weiter gehe, will ich die Anwendung des Vorhergehenden in einem besonderen Beispiele zeigen. Es sei beobachtet worden, daß eine vertical aufwärts geworfene Kugel von Gußeisen und 5 Kilogr. Gewicht nach 20 Secunden wieder an der Erdoberfläche angekommen ist, und es soll daraus ihre anfängliche Geschwindigkeit, die Höhe, welche sie erreicht hat, u. s. f. berechnet werden.

Nehmen wir an, daß der Widerstand der Luft für eine Kugel durch

$$W = 0{,}06253\, Q v^2 \text{ Kilogr.}$$

ausgedrückt werde, und bezeichnen wir das spezifische Gewicht der gegebenen Kugel mit p, ihr absolutes Gewicht in der Luft mit P, ihren Durchmesser mit d, so haben wir allgemein, alle Längenmaaße in Metern genommen,

$$P = \frac{1000}{6} p \pi d^3 \text{ Kil.} \quad , \qquad Q = \frac{1}{4} \pi d^2 = \sqrt[3]{\frac{9 \pi P^2}{16 p^2 (1000)^2}}$$

und demnach

$$k_{,} = \sqrt{\frac{P}{0{,}06253\, Q}} = 100 \sqrt[6]{\frac{16 p^2 P}{(6{,}253)^3 . 9 \pi}} .$$

Mit den gegebenen Werthen $P = 5$, $p = 7{,}2$ folgt sonach

$$\log k_{,} = 1{,}96301 \quad , \quad k_{,} = 91^{m}{,}836 \quad , \quad \log k_{,}^2 = 3{,}92602 ,$$

und damit und mit dem Werthe $T = 20$ Sec. ergibt sich, wenn g für $g_{,}$ genommen wird,

$$\log \frac{g_{,}}{k_{,}} = \log \frac{9{,}809}{91{,}836} = 9{,}02861 \quad , \quad \frac{g_{,} T}{k_{,}} = 2{,}1362 .$$

Setzen wir nun in dem allgemeinen Werthe von T am Ende des vorigen §. $\mathit{arc\ tang}\, \frac{v_0}{k_{,}} = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, so wird

$$\frac{v_0}{k_{,}} = \cot \varphi \quad , \quad \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{k_{,}^2}} = \mathit{cosec}\, \varphi ,$$

und da man hat

$$\cot \varphi + \mathit{cosec}\, \varphi = \frac{\cos \varphi + 1}{\sin \varphi} = \cot \tfrac{1}{2} \varphi ,$$

so nimmt jener Werth die Form an:

$$\frac{g_{,}T}{k_{,}} = \frac{1}{2}\pi - \varphi - logn\ tang\ \frac{1}{2}\varphi ,$$

und die Auflösung der Aufgabe hängt nun von der Auflösung der Gleichung:

$$\varphi + logn\ tang\ \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\pi - \frac{g_{,}T}{k_{,}}$$

und in unserm besondern Falle zufolge des Werthes von $\frac{g_{,}T}{k_{,}}$ von der Auflösung der Gleichung:

$$\varphi + logn\ tang\ \tfrac{1}{2}\varphi + 0{,}5654 = 0$$

ab, welche am einfachsten durch ein zweckmäßiges Probiren in folgender Weise erreicht wird.

Man setzt die linke Seite dieser Gleichung für einen beliebigen Werth von φ gleich y und berechnet zuerst den Werth dieser Veränderlichen für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, wie folgt, wobei zu beachten ist, daß die Logarithmen der Tangenten unter 45° negativ sind, und daß M den Modul der natürlichen Logarithmen oder die Zahl 2,302585 bezeichnet.

$$log\ tang\ \tfrac{1}{2}\varphi = log\ tang\ 22^{0}\ 30' = -\ 0{,}38278$$

$$log\,(-0{,}38278) = \quad 9{,}58295 -$$

$$log\ M = \quad 0{,}36222$$

$$log\ logn\ tang\ \tfrac{1}{2}\varphi = \quad 9{,}94517 -$$

$$logn\ tang\ \tfrac{1}{2}\varphi = -\ 0{,}8814$$

$$y = 0{,}7854 - 0{,}8814 + 0{,}5654 = +\ 0{,}4694\ .$$

Auf dieselbe Weise findet man für $\varphi = \frac{1}{6}\pi$, $logn\ tang\ \frac{1}{2}\varphi = -1{,}3170$,

$$y = 0{,}5236 - 1{,}3170 + 0{,}5654 = -\ 0{,}2280$$

und schließt daraus, daß der gesuchte Werth von φ zwischen $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{1}{6}\pi$ oder zwischen 45° und 30° liegt, und zwar im Verhältniß 1 : 2 näher an dem letztern, also nahe an 35°. Die Rechnung wird dann

$\varphi = 35^0$ $\quad$ $log\, 2100 = 3{,}32222$ $\quad$ $log\, tang\, 17^0\, 30' = -0{,}50128$

$= 2100'$ $\quad$ d.E. $log\, 3437' = 6{,}46373$ $\quad$ $log\, (-0{,}50128) = 9{,}70008-$

$log\, \varphi = 9{,}78595$ $\quad$ $log\, M = 0{,}36222$

$\varphi = 0{,}6109$ $\quad$ $log\, logn\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi = 0{,}06230-$

$logn\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi = -1{,}1543$

$$y = 0{,}6109 - 1{,}1543 + 0{,}5654 = +\, 0{,}0220\ .$$

Ebenso berechnet man y für $\varphi = 34^0$ und findet

$$y = 0{,}5934 - 1{,}1851 + 0{,}5654 = -\, 0{,}0263\ ,$$

und die Vergleichung dieser beiden letzten Werthe zeigt, daß der gesuchte Werth von φ etwas näher an 35^0 liegt, und zwar sehr nahe an $34^0\, 32'$. Man berechnet demnach von neuem die Werthe von y für $\varphi = 34^0\, 32'$ und $\varphi = 34^0\, 33'$ und erhält

$$y = -\, 0{,}0004 \quad \text{und} \quad y = +\, 0{,}0004\ ,$$

woraus der wahre Werth: $\varphi = 34^0\, 32',5$ folgt.

Nun ist

$$v_0 = k_{,} cot\, \varphi\ , \qquad \text{also} \quad v_0 = 133^m{,}41\ ,$$

und für die Zeit T_1 des Steigens erhält man

$$T_1 = \frac{k_{,}}{g_{,}} \left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) = 9'',063\ .$$

Die Steighöhe h berechnet sich am einfachsten nach dem Ausdrucke:

$$h = \frac{k_{,}^2}{2\, g_{,}}\, logn\, \frac{k_{,}^2 + v_0^2}{k_{,}^2}\ ,$$

welcher nun die Form annimmt:

$$h = \frac{k_{,}^2}{g_{,}}\, logn\, \frac{1}{sin\, \varphi} = -\, \frac{k_{,}^2}{g_{,}}\, logn\, sin\, \varphi\ ,$$

und mit dem obigen Werthe von φ hat man

$$h = 487^m{,}84\ .$$

Legen wir nun, um noch einige andere der obengefundenen Ausdrücke anzuwenden, diesen Werth von h zu Grunde, um darnach die Zeit T_2 für das Zurückfallen und die Endgeschwindigkeit $v_{,}$ zu berechnen, so haben wir allgemein

$$2e^{\frac{g_, h}{k_,^2}} = e^{\frac{g_, t}{k_,}} + e^{-\frac{g_, t}{k_,}},$$

oder wenn wir $e^{\frac{g_, t}{k_,}} = x$ setzen, die reciproke Gleichung:

$$x^2 - 2xe^{\frac{g_, h}{k_,^2}} + 1 = 0,$$

deren Wurzeln bekanntlich x und $\frac{1}{x}$ oder $e^{\frac{g_, t}{k_,}}$ und $e^{-\frac{g_, t}{k_,}}$ sind. Man zieht daraus

$$e^{\frac{g_, t}{k_,}} = e^{\frac{g_, h}{k_,^2}}\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2g_, h}{k_,^2}}}\right),$$

und indem man die Logarithmen auf beiden Seiten nimmt,

$$T_2 = \frac{h}{k_,} + \frac{k_,}{g_,} \, logn\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{2g_, h}{k_,^2}}}\right).$$

Aus dem vorher erhaltenen Werthe von h in Function von φ findet man aber auch

$$e^{-\frac{g_, h}{k_,^2}} = \sin\varphi,$$

und der vorstehende Ausdruck für T_2 nimmt damit die Form an:

$$T_2 = \frac{h}{k_,} + \frac{k_,}{g_,} \, logn\,(1 + \cos\varphi).$$

Die bereits gefundenen Zahlenwerthe geben darnach

$$T_2 = 5{,}312 + 5{,}625 = 10'', 937.$$

Endlich gibt der Ausdruck:

$$v_, = v_0 \sqrt{\frac{k_,^2}{k_,^2 + v_0^2}} = v_0 \sin\varphi$$

die Endgeschwindigkeit $v_, = 75^m{,}65$, während die Gleichung:

$$z = \frac{k_,^2}{2g} \, logn \, \frac{k_,^2}{k_,^2 - v^2}$$

auf den Werth:

$$v_, = k_, \sqrt{1 - e^{-\frac{2g_, h}{k_,^2}}} = k_, \cos \varphi$$

führt, durch welchen man mit dem obigen Werthe von h oder jenem von φ für die Endgeschwindigkeit $v_,$ denselben Zahlenwerth findet, wie vorher, und womit die Aufgabe in jeder Beziehung gelöst erscheint.

§. 152.

An das Vorhergehende schließt sich sehr einfach die fortschreitende Bewegung eines schweren festen Körpers auf einer geneigten Ebene an, und zwar mit Berücksichtigung des Reibungs- und Luft-Widerstandes und unter der Voraussetzung, daß außer der Schwere noch eine constante, zur Richtung der Bewegung parallele Kraft V an dem Bewegten thätig sei, daß aber kein Drehen oder Wälzen stattfindet und daß der Schwerpunkt sich in einer zur geneigten Ebene parallelen Geraden bewegt.

Die Ebene der xz lege man senkrecht zu der geneigten Ebene, und nehme die Achse der z wieder parallel zur Richtung der Schwere, die positive Hälfte aufwärts gerichtet; der Winkel zwischen der Normalen zu der geneigten Ebene und der Achse der z sei α, das Gewicht des Bewegten in der Luft wie früher P. Der Druck N auf die schiefe Ebene und die dadurch erzeugte Reibung sind dann

$$N = P \cos \alpha \quad , \quad fN = fP \cos \alpha \, ,$$

wobei f wie gewöhnlich den Reibungscoefficienten oder das von der Berührungsfläche unabhängige Verhältniß des Druckes zur Reibung vorstellt. Die zur Richtung der Bewegung parallele Componente des Gewichtes P ist $P \sin \alpha$ und demnach die aus diesem Gewichte und der Reibung sich ergebende bewegende Kraft

$$P(\sin \alpha \pm f \cos \alpha) = Mg' \, .$$

Die Intensität der fördernden Kraft V sei durch die Bewegungsgröße Mc ausgedrückt, welche sie dem Bewegten in jeder Secunde zu ertheilen vermag, und daher die Stärke der ganzen bewegenden Kraft

$$P_, = M(c \pm g') \, ,$$

je nachdem die Schwere zum Vortheil oder Nachtheil der Bewegung wirkt. Endlich sei der Widerstand der Luft wie vorher dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional und werde durch eine Geschwindigkeit $k_{,}$ ausgedrückt, bei welcher seine Intensität der bewegenden Kraft: $M(c \pm g')$ gleich wird, so daß man nun hat

$$0{,}06253 Q k_{,}^2 = M[c \pm g(\sin\alpha \mp f\cos\alpha)]$$

und allgemein

$$W = M(c \pm g')\frac{v^2}{k_{,}^2}.$$

Das Aenderungsgesetz der Bewegung wird dann, so lange $c \pm g'$ und $k_{,}^2$ positiv ist,

$$\frac{dv}{dt} = (c \pm g')\left(1 - \frac{v^2}{k_{,}^2}\right)$$

und gibt wie in §. 149, aber unter der Voraussetzung, daß die anfängliche Geschwindigkeit nicht Null, sondern v_0 sei, zuerst

$$\frac{c \pm g'}{k_{,}}t = \frac{1}{2}\,logn\,\frac{(k_{,}+v)(k_{,}-v_0)}{(k_{,}-v)(k_{,}+v_0)}$$

und dann unter die Form:

$$\frac{d\,.\,v^2}{ds} = 2(c \pm g')\left(1 - \frac{v^2}{k_{,}^2}\right)$$

gebracht, indem man den Weg s vom untern oder obern Anfang der geneigten Ebene an rechnet,

$$\frac{c \pm g'}{k_{,}^2}s = \frac{1}{2}\,logn\,\frac{k_{,}^2 - v_0^2}{k_{,}^2 - v^2}.$$

Der erste Ausdruck in Bezug auf v aufgelöset, führt zu der Gleichung:

$$v = \frac{ds}{dt} = k_{,}\frac{(k_{,}+v_0)e^{c't} - (k_{,}-v_0)e^{-c't}}{(k_{,}+v_0)e^{c't} + (k_{,}-v_0)e^{-c't}},$$

worin zur Abkürzung c' für $\frac{c \pm g'}{k_{,}}$ steht, und aus welcher man wie früher den Werth von s:

$$s = \frac{k_{,}^2}{c \pm g'} \; logn \; \frac{(k_{,} + v_0) e^{c't} + (k_{,} - v_0) e^{-c't}}{2k_{,}}$$

in Function von t zieht.

Soll die Bewegung von oben anfangen und abwärts stattfinden, so gelten die obern Zeichen, im entgegengesetzten Falle die untern, und wenn $\alpha = 0$, die Ebene also horizontal ist, so kann man offenbar nur $c - fg \cos \alpha$ für die Beschleunigung nehmen. Es kann aber in den beiden ersten Fällen $c \pm g'$ negativ und dadurch $k_{,}$ imaginär werden; dann werden die Gesetze der Bewegung bis zu dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit Null ist, durch die in §. 150 abgeleiteten, und von da an wieder durch die in §. 149 gefundenen Gleichungen ausgedrückt, wenn man dort $g_{,}$ durch $c \pm g'$ ersetzt.

In dem besondern Falle dagegen, wo $c \pm g' = 0$ ist, muß man

$$k^2 = \frac{Mg}{f_{,}Q}$$

nehmen; die Gleichung der Bewegung nimmt dadurch die Form:

$$\frac{dv}{dt} = - g \frac{v^2}{k^2}$$

an und gibt

$$gt = k^2 \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) \quad , \quad v = v_0 \frac{k^2}{k^2 + v_0 g t} ;$$

die Geschwindigkeit nimmt also fortwährend ab, ohne jemals Null zu werden. Aus dem Werthe von v zieht man den Ausdruck für den zurückgelegten Weg s in Function von t:

$$s = \frac{k^2}{g} \; logn \; \frac{k^2 + v_0 g t}{k^2} = \frac{k^2}{g} \; logn \; \frac{v_0}{v} ,$$

woraus man schließt, daß auch der Weg sich keiner bestimmten Grenze nähert, sondern über jeden denkbaren Werth hinauswächst.

Soll endlich die fördernde Kraft $V = Mc$ so bestimmt werden, daß die Bewegung eine gleichförmige wird, daß man also

$$\frac{dv}{dt} = (c \pm g')\left(1 - \frac{v^2}{k_{,}^2}\right) = 0$$

erhält, so muß $k_{,} = v = v_0$ und demnach

$$M[c \pm g(\sin \alpha \mp f \cos \alpha)] = f_{,}Q v_0^2$$

werden, und man schließt daraus

$$Mc = f, Q v_0^2 \mp Mg\ (sin\ \alpha \mp f\ cos\ \alpha)$$

als Intensität jener constanten Kraft.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen können dazu dienen, die Bewegung einer Locomotive oder eines ganzen Zuges auf einer geneigten Ebene zu untersuchen, z. B. die Zeit, in welcher diese zurückgelegt wird, und die Geschwindigkeit, mit welcher der Zug am Ende derselben ankommt, zu berechnen, oder die Dampfkraft zu bestimmen, welche erforderlich ist, um eine gleichförmige Bewegung zu erhalten, u. s. f., und man kann dazu nach den bis jetzt gewonnenen Erfahrungen und den üblichen Größeverhältnissen

$$f = \frac{1}{220}\ , \qquad W = 0{,}033\,v^2 \text{ Kilogr.}$$

nehmen. Was indessen die genauere Ermittelung dieser Verhältnisse, insbesondere den für die Anwendung zweckmäßigen Ausdruck der Dampfkraft betrifft, so muß darüber auf die technische Mechanik verwiesen werden.

§. 153.

Im ersten Buche haben wir die Bewegung eines schweren materiellen Punktes untersucht, welcher eine beliebig gerichtete anfängliche Geschwindigkeit erhalten hat; wir wollen nun diese Untersuchung wieder auf einen festen Körper und zwar von der Form einer Kugel ausdehnen und dabei den Widerstand der unbewegten Luft berücksichtigen. *)

Dieser Widerstand läßt sich bei dem genannten Körper offenbar auf eine fördernde Kraft zurückführen, deren Richtung durch den Mittelpunkt geht, da rings um den zur Richtung der Bewegung parallelen Durchmesser die Widerstände gegen dieselben entsprechenden Flächentheile gleich und gleich gerichtet sind; es kann also auch die Kugel durch den Gesammtwiderstand nicht aus der durch die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit gelegten lothrechten Ebene entfernt werden, und wir dürfen demnach die Untersuchung auf die einer Bewegung in einer Ebene und zwar in der verticalen Ebene der xz beschränken.

---

*) Ein Körper von beliebiger Form würde dem Widerstande der Luft bei einer krummlinigen fortschreitenden Bewegung ohne Drehung in jeder Lage einen andern zur Richtung der Bewegung senkrechten Querschnitt darbieten, und es würde demnach jener Widerstand auch in dieser Beziehung veränderlich.

Ist also wieder v_0 die anfängliche Geschwindigkeit, α der Winkel zwischen ihrer Richtung und der zur Richtung der Schwere senkrechten Achse der x und der Anfang der Coordinaten der Ort, von dem die Bewegung ihren Ausgang nimmt; ist ferner die Intensität des Luftwiderstandes $W = f, Qv^2$ und k eine Geschwindigkeit, bei welcher derselbe dem Gewichte der bewegten Kugel in der Luft gleich ist, so haben wir zur Bestimmung der Gesetze ihrer Bewegung nach §. 148 (111) die beiden Gleichungen:

$$\text{c.)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -g\frac{dx}{ds}\frac{v^2}{k^2} = -\frac{g}{k^2}\frac{dx}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g - \frac{g}{k^2}\frac{dz}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Die erste dieser Gleichungen läßt sich unter die Form bringen:

$$\frac{d.u_x}{dt} = -\frac{g}{k^2}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} = -\frac{g}{k^2}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot u_x$$

und gibt nach vorgenommener Trennung der Veränderlichen in Bezug auf t das allgemeine Integral:

$$\overset{t}{\underset{0}{\Delta}}{}_t \,.\, \mathit{logn}\, u_x = -\frac{g}{k^2}\overset{t}{\underset{0}{\Delta}}{}_t \,.\, s\,;$$

also hat man mit der Beachtung, daß s mit t Null wird, und u_x für $t = 0$ in $v_0 \cos\alpha$ übergeht,

$$\mathit{logn}\frac{u_x}{v_0\cos\alpha} = -\frac{gs}{k^2}, \quad u_x = v_0\cos\alpha\,.\,e^{-\frac{gs}{k^2}}.$$

Wenn man dann

$$\frac{dz}{dx} = \mathit{tang}\,\tau = p, \quad \frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt},$$

setzt, woraus das Aenderungsgesetz in Bezug auf t folgt:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + p\frac{d^2x}{dt^2},$$

und wenn man diese Werthe in die zweite der Gleichungen (c) einführt, nachdem man sie wie die erste unter die Form:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{g}{k^2}\cdot\frac{dz}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}$$

gebracht hat, und die erste, nachdem sie mit p multiplicirt worden, davon abzieht, so ergibt sich die neue Gleichung:

$$\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = -g\,, \qquad (d.$$

welche durch das Quadrat des vorher erhaltenen Werthes von u_x dividirt in die folgende übergeht:

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = -\frac{g}{v_0^2\,cos^2\,\alpha}\,e^{\frac{2gs}{k^2}} \qquad (e.$$

und zuletzt, wenn man für $\frac{ds}{dx} = sec\,\tau$ seinen Werth $\sqrt{1+p^2}$ einführt, die Form:

$$\frac{dp}{ds}\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{v_0^2\,cos^2\,\alpha}\,e^{\frac{2gs}{k^2}}$$

annimmt. Das unbestimmte Integral dieser Gleichung ist

$$\Delta\cdot\left[p\sqrt{1+p^2} + logn\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right] = -\Delta\cdot\frac{k^2}{v_0^2\,cos^2\,\alpha}\,e^{\frac{2gs}{k^2}}$$

und gibt mit der Beachtung, daß für $s = 0$, $p = tang\,\alpha$ wird, und wenn man den Ausdruck:

$$tang\,\alpha\sqrt{1+tang^2\,\alpha} + logn\left(tang\,\alpha+\sqrt{1+tang^2\,\alpha}\right) + \frac{k^2}{v_0^2}sec^2\,\alpha$$

durch die Bezeichnung $f(\alpha)$ abkürzt, die Gleichung:

$$p\sqrt{1+p^2} + logn\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = f(\alpha) + \frac{k^2}{v_0^2\,cos^2\,\alpha}\,e^{\frac{2gs}{k^2}}\,, \qquad (f.$$

welche als Gleichung der Bahn des Bewegten zwischen den Veränderlichen s und τ zu betrachten ist.

Für die Anwendung ist indessen diese Gleichung von keinem Nutzen, weßhalb man aus derselben mittels der vorausgehenden neue Gleichungen zwischen x und p und zwischen y und p ableitet. Zuerst eliminirt man aus der Gleichung (f) mittels der Gleichung (e) die Exponentialgröße und findet dadurch das Aenderungsgesetz von x in Bezug auf p

$$\frac{dx}{dp} = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{1}{p\sqrt{1+p^2} + logn\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) - f(\alpha)},$$

und daraus folgt sogleich mittels der Beziehung $\frac{dz}{dp} = p\frac{dx}{dp}$ das Aenderungsgesetz von z in Bezug auf dieselbe Veränderliche:

$$\frac{dz}{dp} = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{p}{p\sqrt{1+p^2} + logn\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) - f(\alpha)}.$$

Bringt man dann die Gleichung (d) unter die Form:

$$\frac{dx}{dp} = -g\left(\frac{dt}{dp}\right)^2,$$

führt für $\frac{dx}{dp}$ den vorhergehenden Werth ein und nimmt auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man auch das Aenderungsgesetz von t in Bezug auf p, und zwar wird mit der Beachtung, daß p vom Anfang der Bewegung an abnimmt, wenn t wächst, daß also $\frac{dt}{dp}$ negativ sein muß,

$$\frac{dt}{dp} = -\frac{k}{g} \cdot \frac{1}{\left[f(\alpha) - p\sqrt{1+p^2} - logn\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Mittels dieser Aenderungsgesetze, welche nur Functionen der einzigen unabhängigen Veränderlichen p sind, und demnach immer auf dem Wege der Annäherung integrirt werden können, erhält man die Werthe von x, z und t in Function von p, d. h. die Lage des Bewegten und die zur Erreichung derselben nothwendige Zeit für gegebene Werthe des Winkels τ; berechnet man also jene Größen für regelmäßig fortschreitende Werthe dieser letztern, so kann man durch Interpolation die Lage des Bewegten für irgend eine Zeit bestimmen und die Gestalt seiner Bahn construiren, womit die Aufgabe als gelöst betrachtet werden muß.

Die Geschwindigkeit des Bewegten kann unmittelbar in Function von ausgedrückt werden; man zieht nämlich aus den beiden ersten der vorhergehenden Gleichungen sehr leicht die Werthe von $u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$ und $u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$, und die Summe der Quadrate dieser Aus=

drücke, aus welchen man den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$ mittels der letzten Gleichung eliminiren wird, gibt für v^2 den Werth:

$$v^2 = \frac{k^2(1+p^2)}{f(\alpha) - p\sqrt{1+p^2} - \mathit{logn}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)},$$

aus welchem die Größe g ganz verschwunden ist, so daß es den Anschein hat, als sei die Geschwindigkeit unabhängig von der Intensität der Schwere, was offenbar nicht möglich ist; man wird auch leicht einsehen, daß die Wirkung der Schwere schon in dem Werthe von p eingerechnet ist, da die Aenderung von p oder von τ, d. i. die Richtungsänderung der Bewegung allein durch die Intensität der Schwere bedingt wird.

§. 154.

Im luftleeren Raume war die Bahn des Bewegten eine Parabel (§. 75 d. erst. B.); in der Luft dagegen beschreibt derselbe eine der in Fig. 98 dargestellten ähnliche Curve, welche zu beiden Seiten ihres Scheitels C aus zwei unsymmetrischen Theilen besteht, deren Zweige geradlinige Asymptoten haben, und zwar der erste AC eine, deren Richtung von derjenigen der anfänglichen Geschwindigkeit wenig abweicht, während die des zweiten CE mit der Richtung der Schwere zusammenfällt. Die Wurfweite AB und die Steighöhe CD sind nun für denselben Werth von α kleiner als bei der Parabel, und die erstere erreicht ihren größten Werth bei einem kleineren Winkel α, als $\frac{1}{4}\pi$ oder 45°.

Das Vorhandensein und die Lage der Asymptoten läßt sich auf folgende Weise zeigen. Betrachten wir zuerst den abwärts gehenden Zweig CE und lassen die Zeit t von dem Augenblicke anfangen, wo der Bewegte durch den Scheitel C gegangen ist, so wächst der absolute Werth von p mit t, p selbst wird aber wie der Winkel τ negativ, und das Aenderungsgesetz von t in Bezug auf p wird

$$\frac{dt}{dp} = \frac{k}{g} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(\alpha) + p\sqrt{1+p^2} + \mathit{logn}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}},$$

und umgekehrt das Aenderungsgesetz von p in Bezug auf t

$$\frac{dp}{dt} = \frac{g}{k}\sqrt{\frac{k^2}{v_{,}^2} + p\sqrt{1+p^2} + \mathit{logn}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)},$$

da man, für $t = 0$, $\alpha = 0$, und $v_0 = v_,$ hat, wenn $v_,$ die Geschwindigkeit im Scheitel C bezeichnet. Dieses Aenderungsgesetz ist demnach positiv und reel für jeden Werth von p zwischen Null und Unendlich; p muß also fortwährend mit der Zeit wachsen, und zwar, weil dadurch das Aenderungsgesetz selbst wieder wächst, in einem viel größeren Verhältniß, als die Zeit, so daß p bald sehr groß und $-\tau$ nahe gleich $\frac{1}{2}\pi$ geworden sein wird. Ist aber dieser Zeitpunkt eingetreten, so kann man von da an in den Aenderungsgesetzen von x und z statt $\sqrt{1+p^2}$ einfach p setzen, und die constante Größe $\frac{k^2}{v_,^2}$, sowie das Glied $logn\,.\,2p$ neben p^2 vernachlässigen; dadurch nehmen jene die Form an:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{k^2}{gp^2} \quad , \quad \frac{dz}{dp} = -\frac{k^2}{gp}$$

und geben durch Integration die Gleichungen:

$$x - x_, = \frac{k^2}{g}\left(\frac{1}{p_,} - \frac{1}{p}\right) \quad , \quad z - z_, = \frac{k^2}{g}\, logn \frac{p_,}{p} \, ,$$

welche die Gestalt des äußersten Zweiges der Bahn von einem Punkte $x_,z_,$ an darstellen, in welchem τ schon dem Werthe $-\frac{1}{2}\pi$ sehr nahe kommt und $p_, = tang\,\tau$ sehr groß ist. Der größte Werth, welchen x erhalten kann, ist demnach

$$x = x_, + \frac{k^2}{gp_,} \, ,$$

und wie man sieht, nur sehr wenig größer, als $x_,$, während sich der Ausdruck für z fortwährend dem Werthe:

$$z = z_, + \frac{k^2}{g}\, logn\,.\,0 = -\infty$$

nähert, folglich keine Grenze hat. Der Zweig CE der Bahncurve hat demnach eine zur Achse der z parallele Asymptote, deren Abstand DF vom Scheitel C dem obigen Werthe von x sehr nahe kommt und durch die Integration des vollständigen Aenderungsgesetzes von x zwischen den Grenzen 0 und ∞ von p gefunden wird. Zugleich zeigt der oben erhaltene Werth von v^2, daß sich die Geschwindigkeit des Bewegten in diesem Zweige immer mehr der Geschwindigkeit k, die Bewegung also immer mehr der gleichförmigen nähert, wie beim lothrechten Fall.

Noch leichter ist einzusehen, daß auch der Zweig CA eine Asymptote hat; denn denkt man sich denselben von A an rückwärts verlängert, so

wird x und z negativ, während p positiv und die Zeit negativ wächst; die Aenderungsgesetze von x und z werden demnach

$$\frac{dx}{dp} = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{1}{f(\alpha) - p\sqrt{1+p^2} - logn\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)},$$

$$\frac{dz}{dp} = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{p}{f(\alpha) - p\sqrt{1+p^2} - logn\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)},$$

und das Aenderungsgesetz von t zeigt, daß p nicht weiter wachsen kann, als bis

$$f(\alpha) - p\sqrt{1+p^2} - logn\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = 0$$

geworden ist, weil dasselbe für größere Werthe imaginär wird und bleibt. Der Zweig CA nähert sich also einer Geraden, welche einen Winkel α' mit der Achse der x bildet, von solcher Größe, daß der Werth von $tang\,\alpha' = p'$ die vorstehende Gleichung befriedigt; der Abstand $AG = x'$ des Durchgangspunktes G dieser Geraden durch die Achse der x wird durch das Integral:

$$x' = \frac{k^2}{g}\int_{tang\,\alpha}^{tang\,\alpha'} dp \cdot \frac{1}{f(\alpha) - p\sqrt{1+p^2} - logn\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}$$

bestimmt werden, und dann die Gleichung dieser Asymptote

$$z = (x + x')\, tang\,\alpha'$$

sein.

§. 155.

In denjenigen Fällen, wo der Winkel α, welchen die Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit mit der wagrechten Achse der x bildet, ziemlich klein ist, und die Bewegung nur so lange verfolgt wird, bis der Bewegte wieder in die Nähe der Achse der x gekommen ist, in denen also auch der Winkel τ immer sehr klein bleibt, kann man ohne großen Fehler das Quadrat der Tangente p gegen die Einheit vernachlässigen, oder den Cosinus von τ gleich 1 setzen; man hat alsdann

$$\frac{dx}{ds} = 1\,, \qquad x = s\,,$$

und die Gleichung (e) in §. 153 wird

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} e^{\frac{2gx}{k^2}} .$$

Zwischen den entsprechenden Grenzen x und 0 für x, p und *tang α* für p erhält man daraus als allgemeines Integral das Aenderungsgesetz:

$$p = \frac{dz}{dx} = \tan \alpha - \frac{k^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right) .$$

Integrirt man dann zum zweitenmale mit der Beachtung, daß z mit x Null wird, so folgt

$$z = x\left(\tan \alpha + \frac{k^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) - \frac{k^4}{4g v_0^2 \cos^2 \alpha}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right)$$

als Gleichung der Bahn des Bewegten.

Um die Zeit t zu bestimmen, welche dieser letztere braucht, um vom Anfang an bis zu dem Punkte xz zu gelangen, zieht man aus der Gleichung:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha . e^{-\frac{gs}{k^2}} ,$$

in welcher man nun gleichfalls s durch x ersetzt,

$$t = \frac{1}{v_0 \cos \alpha}\int_0^x dx . e^{\frac{gx}{k^2}} = \frac{k^2}{g v_0 \cos \alpha}\left(e^{\frac{gs}{k^2}} - 1\right) .$$

Endlich hat man durch die vorhergehenden Gleichungen mit gleicher Annäherung

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{ds}{dx} = v_0 \cos \alpha . e^{-\frac{gx}{k^2}} \frac{ds}{dx} ,$$

oder wenn man auf der rechten Seite $\frac{ds}{dx} \cos \alpha$ gleich 1 setzt,

$$v = v_0 e^{-\frac{gx}{k^2}}$$

als Ausdruck für die Geschwindigkeit des Bewegten in Function der horizontalen Entfernung x. Will man dieselbe dagegen durch die Zeit t bestimmen, so muß man in dem letzten Werthe die Exponentialgröße mittels des vorausgehenden Werthes von t eliminiren, wodurch

$$v = v_0 \frac{k^2}{k^2 + g v_0 t \cos\alpha}$$

gefunden wird.

Durch die vorhergehenden Werthe von z, t und v in x, von denen die beiden ersten wieder ganz auf die in §. 75 im ersten Buche gefundenen zurückkommen, wenn die Exponentialgröße in eine Reihe entwickelt und $k = \infty$ genommen wird, während der letzte für diesen Fall von der Wahrheit wenig abweichend $v = v_0$ gibt, hat die Aufgabe ihre vollständige Lösung gefunden, und man kann mittels dieser Gleichungen ebensowohl die Lage des Bewegten am Ende einer gegebenen Zeit berechnen, als auch, wie es bei der ähnlichen Aufgabe an dem genannten Orte geschehen ist, die anfängliche Geschwindigkeit oder ihre Richtung bestimmen, welche dem Bewegten gegeben werden muß, wenn er einen bestimmten Punkt treffen soll. Diese Gleichungen können aber auch dazu dienen, nach wirklich erfolgter Bewegung, bei welcher der Winkel α und die Coordinaten a und c des Ortes, wo der Bewegte am Ende der beobachteten Zeit t angekommen ist, durch directe Messung bestimmt worden sind, die Geschwindigkeiten v_0 und k zu berechnen und damit die Größe der Triebkraft, welche die Kugel in Bewegung gesetzt hat, und die Stärke des Luftwiderstandes zu finden, zu welchem Zwecke man die gefundenen Gleichungen leicht unter die entsprechenden Formen bringen wird.

§. 156.

Ich beschließe dieses Kapitel mit der Untersuchung der Bewegung einer kleinen, im Verhältniß zur Luft sehr dichten Kugel, welche in den beiden Endpunkten eines horizontalen Durchmessers durch zwei gleich lange, parallele, gewichtlose und undehnbare Fäden mit zwei festen Punkten so verbunden ist, daß sie sich ohne einen andern als den Luftwiderstand um diese letztern bewegen kann, wobei ich ferner voraussetze, daß die Kugel aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt und dann sich selbst ohne anfängliche Geschwindigkeit überlassen worden sei, so daß sich ihr Mittelpunkt in einem verticalen Kreisbogen bewegt und keine Drehung der Kugel in Bezug auf ein festes Coordinatensystem stattfindet, daß viel-

mehr derjenige Durchmesser, welcher in der anfänglichen Lage der Kugel lothrecht war, immer lothrecht bleibt.

Sei $l_,$ die Länge des Fadens, welcher, im Mittelpunkte der Kugel befestigt gedacht, für unsere Betrachtung die beiden vorhergehenden ersetzen kann, und der zugleich den Halbmesser des von dem Mittelpunkte beschriebenen Kreisbogens vorstellt; ferner seien wieder P und M das Gewicht in der Luft und die Masse der Kugel und $k_,$ eine Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand der Luft dem Gewichte P derselben gleich ist; endlich sei α die anfängliche Winkelausweichung des Fadens aus der Gleichgewichtslage, ϑ diese Ausweichung am Ende der Zeit t und $\varphi = -\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit des Bewegten in demselben Augenblicke, so daß die wirkliche oder fördernde Geschwindigkeit v seines Mittelpunktes gleich $l_,\varphi$ ist.

Die allgemeine Gleichung (112) nimmt für diesen Fall, indem man den Bogen mit der Zeit wachsen läßt, die Form an:

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = P\frac{dz}{ds} - \frac{P}{k_,^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

oder wenn man $P = Mg\left(1 - \frac{p'}{p}\right) = Mg_,$ setzt und beachtet, daß

$$\frac{ds}{dt} = l_,\varphi \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \sin\vartheta$$

ist, die einfachere:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{g_,}{l_,}\sin\vartheta - \frac{g_,l_,}{k_,^2}\varphi^2,$$

und daraus folgt weiter, wenn man das erste Glied mit $-\varphi\frac{dt}{d\vartheta} = 1$ multiplicirt, die Gleichung:

$$\text{g.)} \qquad \frac{d\,.\,\varphi^2}{d\vartheta} + 2\frac{g_,}{l_,}\sin\vartheta = 2\frac{g_,l_,}{k_,^2}\varphi^2 .$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man

$$\varphi^2 = uw \quad , \quad \frac{d.\varphi^2}{d\vartheta} = u\frac{dw}{d\vartheta} + w\frac{du}{d\vartheta},$$

worin u und w zwei willkürliche Functionen von ϑ vorstellen, über welche man so verfügt, daß die Gleichung (g) auf zwei Glieder zurückkommt; man macht also

$$\frac{dw}{d\vartheta} - \frac{2g_{,}l_{,}}{k_{,}^{2}} w = 0 \,, \qquad (h.$$

und die Gleichung (g) wird alsdann

$$w \frac{du}{d\vartheta} + 2 \frac{g_{,}}{l_{,}} \sin\vartheta = 0 \,.$$

Die Integration der Gleichung (h) gibt dann unter der Voraussetzung, daß *logn* w mit ϑ Null wird, die Werthe:

$$logn\, w = \frac{2g_{,}l_{,}}{k_{,}^{2}} \vartheta \quad , \quad w = e^{\frac{2g_{,}l_{,}}{k_{,}^{2}} \vartheta} \,,$$

mit deren letzterem die vorhergehende Gleichung in die folgende übergeht:

$$\frac{du}{d\vartheta} = - \frac{2g_{,}}{l_{,}} \sin\vartheta \,.\, e^{-\frac{2g_{,}l_{,}}{k_{,}^{2}} \vartheta} \,.$$

Das unbestimmte Integral dieses Ausdruckes ist nun, wenn man zur Abkürzung $\frac{2g_{,}l_{,}}{k_{,}^{2}} = \mu$ setzt,

$$(1+\mu^{2}) \Delta u = \frac{2g_{,}}{l_{,}} \Delta \,.\, e^{-\mu\vartheta} (\cos\vartheta + \mu \sin\vartheta) \,,$$

und wenn man dann beachtet, daß man für $\vartheta = \alpha$, $\varphi^{2} = 0$ und $w = e^{\mu\alpha}$ hat, und u = 0 werden muß, so ergibt sich als bestimmtes Integral die Gleichung:

$$(1+\mu^{2}) u = \frac{2g_{,}}{l_{,}} \left[e^{-\mu\vartheta} (\cos\vartheta + \mu \sin\vartheta) - e^{-\mu\alpha} (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) \right]$$

und damit erhält man für die Winkelgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$(1+\mu^{2}) \varphi^{2} = \frac{2g_{,}}{l_{,}} \left[\cos\vartheta + \mu \sin\vartheta - e^{\mu(\vartheta - \alpha)} (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) \right] . \qquad (k.$$

Im tiefsten Punkte hat man $\vartheta = 0$, und man zieht damit aus der vorstehenden Gleichung für das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher der Bewegte durch die Gleichgewichtslage geht, den Werth:

$$v_{,}^{2} = l_{,}^{2} \varphi_{,}^{2} = \frac{2g_{,}l_{,}}{1+\mu^{2}} \left[1 - e^{-\mu\alpha} (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) \right] ,$$

welcher, mit dem für den leeren Raum (I. Buch, §. 101) gefundenen Ausdrucke:

$$v^2 = 2 g z_0 = 2 g l (1 - \cos\alpha)$$

verglichen, zeigt, daß diese Geschwindigkeit in unserm jetzigen Falle kleiner ist, und zwar um so mehr, je größer μ oder je kleiner $k_,^2$ ist.

Setzt man ferner in der Gleichung (k) φ gleich Null, so zieht man aus dem Ausdrucke:

$$(\cos\vartheta + \mu \sin\vartheta) e^{+\mu\vartheta} = (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) e^{-\mu\alpha}$$

alle Werthe von ϑ, für welche die Geschwindigkeit des Bewegten Null wird. Solcher Werthe gibt es unendlich viele; der größte derselben ist offenbar $\vartheta_0 = \alpha$, und für den nächsten, welcher, wie man leicht sieht, negativ sein muß, kann man $-\vartheta_,$ für ϑ setzen, wodurch sich

$$(\cos\vartheta_, - \mu \sin\vartheta_,) e^{\mu\vartheta_,} = (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) e^{-\mu\alpha}$$

ergibt. Beachtet man nun, daß wir es blos mit dem Widerstande der Luft gegen eine kleine dichte Kugel zu thun haben, daß also $k_,^2$ sehr groß oder μ sehr klein sein wird, und beschränken wir uns auch auf Schwingungen von kleiner Ausweichung, so werden die Exponentialgrößen $e^{\mu\vartheta_,}$ und $e^{-\mu\alpha}$ sehr nahe durch die beiden ersten Glieder: $1 + \mu\vartheta_,$ und $1 - \mu\alpha$ der Reihen ausgedrückt, in welche sie sich entwickeln lassen, und mit diesen wird die vorhergehende Gleichung, indem man durchaus μ^2 vernachlässigt,

$$\cos\vartheta_, - \mu(\sin\vartheta_, - \vartheta_, \cos\vartheta_,) = \cos\alpha + \mu(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) .$$

Der größte Werth von $\vartheta_,$, welcher daraus gezogen werden kann, und den wir suchen, ist von α nur sehr wenig verschieden; macht man daher $\vartheta_, = \alpha - \delta$, so kann man

$$\cos\vartheta_, = \cos\alpha + \delta \sin\alpha \quad , \quad \sin\vartheta_, = \sin\alpha - \delta\cos\alpha$$

setzen und das Product $\mu\delta$ vernachlässigen; es ergibt sich dadurch

$$\delta \sin\alpha = 2\mu(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) ,$$

also auch

$$\vartheta_, = \alpha - 2\mu(1 - \alpha \cot\alpha)$$

als Größe der negativen Ausweichung am Ende der ersten Schwingung. Dieser Ausdruck erfordert gerade nicht, daß die Schwingungen sehr klein sind; für solche kann man denselben noch mehr vereinfachen, indem man $\alpha \cot\alpha$ durch $1 - \frac{1}{3}\alpha^2$ ersetzt, wodurch

$$\vartheta_, = \alpha - \tfrac{2}{3}\mu\alpha^2$$

folgt. Bezeichnet man nun den bisherigen Werth von α, d. i. die Ausweichung am Anfang der Bewegung mit α_0, den ebengefundenen Werth von ϑ, oder die Ausweichung am Ende der ersten Schwingung mit α_1, diejenige am Ende der zweiten Schwingung mit α_2, u. s. f., so findet man nach und nach

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \tfrac{2}{3}\mu\alpha_0^2 \quad , \quad \alpha_2 = \alpha_1 - \tfrac{2}{3}\mu\alpha_1^2 \; ,$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 - \tfrac{2}{3}\mu\alpha_2^2 \quad , \quad \text{etc.}$$

und schließt daraus, daß die Abnahme der Ausweichung der Schwingungen mit den aufeinanderfolgenden Schwingungen selbst kleiner wird, daß diese also am Anfange der Bewegung viel schneller abnehmen, als gegen das Ende derselben.

§. 157.

Um nun auch die Schwingungsdauer für die Bewegung in der Luft kennen zu lernen, zieht man aus der Gleichung (k) wie gewöhnlich durch Vertauschung von φ^2 mit $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ das Aenderungsgesetz:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{dt}{d\vartheta} = -\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta+\mu\sin\vartheta) - e^{\mu(\vartheta-\alpha)}(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}}.$$

Entwickelt man dann unter der Voraussetzung sehr kleiner Schwingungsbogen die Größe unter dem Wurzelzeichen nach der Maclaurin'schen Reihe nach den Potenzen von ϑ, so findet man zuerst

$$\begin{aligned}
f(\vartheta) &= \cos\vartheta + \mu\sin\vartheta - e^{\mu(\vartheta-\alpha)}(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) ,\\
f'(\vartheta) &= -\sin\vartheta + \mu\cos\vartheta - \mu\, e^{\mu(\vartheta-\alpha)}(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) ,\\
f''(\vartheta) &= -\cos\vartheta - \mu\sin\vartheta - \mu^2 e^{\mu(\vartheta-\alpha)}(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) ,\\
f'''(\vartheta) &= \sin\vartheta - \mu\cos\vartheta - \mu^3 e^{\mu(\vartheta-\alpha)}(\cos\alpha+\mu\sin\alpha) ,\\
\text{etc.} &\quad , \quad \text{etc.} ,
\end{aligned}$$

und damit ergibt sich, wenn $e^{-\mu\alpha}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = A$ gesetzt wird,

$$f'(0) = 1 - A \quad , \quad f''(0) = \mu(1 - A) \; ,$$
$$f'''(0) = -(1 + \mu^2 A) \quad , \quad f''''(0) = -\mu(1 + \mu^2 A) \; ,$$
$$\text{etc.} \; , \qquad \text{etc.} \; .$$

Für kleine Werthe von α und ϑ genügt es dann, die dritten Potenzen dieser Größen und die mit der ersten Potenz von μ multiplicirten Glieder beizubehalten und demnach $\alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$ für $\sin\alpha$, $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ für $\cos\alpha$, $1 - \mu\alpha$ für $e^{-\mu\alpha}$ zu setzen, wodurch man

$$A = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\mu\alpha^3 \; ,$$

und wenn dieser Werth in die vorhergehenden von $f(0)$, $f'(0)$, etc., und mit diesen in die Reihe:

$$f(\vartheta) = f(0) + \vartheta f'(0) + \tfrac{1}{2}\vartheta^2 f''(0) + \text{etc.}$$

eingeführt wird,

$$f(\vartheta) = \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \tfrac{1}{3}\mu\alpha^3 + \tfrac{1}{2}\mu\alpha^2\vartheta - \tfrac{1}{2}\vartheta^2 - \tfrac{1}{6}\mu\vartheta^3$$

erhält, und man sieht auch unter dieser Form, wie es im Vorhergehenden gefunden wurde, daß $f(\vartheta) = (1 + \mu^2)\frac{l_,}{2g_,}\varphi^2$ Null wird, entweder, wenn $\vartheta = \alpha$, oder wenn $\vartheta = -(\alpha - \frac{2}{3}\mu\alpha^2)$ genommen wird, im letztern Falle natürlich nur mit Vernachläſſigung sehr kleiner Glieder von der Ordnung $\mu^2\alpha^4$.

Beachtet man nun weiter, daß man zur Erleichterung der Integration in dem Ausdrucke von $f(\vartheta)$ das letzte sehr kleine Glied $\frac{1}{6}\mu\vartheta^3$ durch $\frac{1}{6}\mu\alpha^2\vartheta$ ersetzen kann, ohne daß die für $\vartheta = \alpha$, $\vartheta = 0$, $\vartheta = -(\alpha - \frac{2}{3}\mu\alpha^2)$ daraus hervorgehenden Werthe sich ändern, daß demnach auch der Ausdruck:

$$f(\vartheta) = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \tfrac{2}{3}\mu\alpha^3 + \tfrac{2}{3}\mu\alpha^2\vartheta - \vartheta^2)$$

zwischen diesen Werthen, also für die erste Schwingung nicht merklich von dem wahren Werthe von $f(\vartheta)$ abweichen wird und macht dann zur Abkürzung

$$\alpha^2 - \tfrac{2}{3}\mu\alpha^3 = a^2 \quad , \quad \tfrac{1}{3}\mu\alpha^2 = b \; ,$$

so ergibt sich

$$\sqrt{\frac{g_,}{l_,}}\, t = \int_\alpha^\vartheta d\vartheta \,.\, \frac{-1}{\sqrt{a^2 + 2b\vartheta - \vartheta^2}} = \operatorname{arc\,cos} \frac{\vartheta - b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \; ,$$

da, wie leicht zu sehen, $arc\cos\frac{\alpha - b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = arc\cos 1 = 0$ ist. Man hat dadurch umgekehrt

$$\vartheta = \frac{1}{3}\mu\alpha^2 + \left(\alpha - \frac{1}{3}\mu\alpha^2\right)\cos t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}}$$

und zieht daraus den Werth:

$$-\frac{d\vartheta}{dt} = \varphi = \left(\alpha - \frac{1}{3}\mu\alpha^2\right)\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}}\sin t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}}$$

für die Winkelgeschwindigkeit in Function der Zeit.

Dieser letztere Ausdruck wird Null, wenn $t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}}$ die Werthe 0 und π erhält *), und man schließt daraus, daß die Zeit T für die Dauer einer Schwingung von der Größe der Schwingungsbogen, diese indessen immer sehr klein vorausgesetzt, sowie von dem Luftwiderstande unabhängig ist und immer denselben Werth:

---

*) Der Werth von φ wird wohl auch Null, wenn $t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}}$ die Werthe 2π, 3π, ... $m\pi$ erhält; man überzeugt sich aber leicht, daß der Werth von ϑ, aus welchem derjenige von φ abgeleitet ist, nur für **eine** Schwingung gültig ist; denn er gibt für $t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}} = 2\pi$ wieder $\vartheta = \alpha$, für $t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}} = 3\pi$ wieder $\vartheta = -(\alpha - \frac{2}{3}\mu\alpha^2)$, u. s. f., während er nach dem vorhergehenden §. im ersten Falle $\vartheta = \alpha - \frac{4}{3}\mu\alpha^2$, im zweiten $\vartheta = -(\alpha - \frac{8}{3}\mu\alpha^2)$, u. s. f. geben sollte. Derselben Beschränkung ist übrigens auch der zusammengesetztere Ausdruck:

$$\vartheta = \frac{1}{4}\mu\alpha^2 + \left(\alpha - \frac{1}{3}\mu\alpha^2\right)\cos t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}} + \frac{1}{12}\mu\alpha^2\cos 2t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}}$$

unterworfen, welchen Poisson (tom. I, §. 189) auf anderem Wege abgeleitet hat. Die obigen Ausdrücke für ϑ und φ sind indessen doch insofern für **alle** Schwingungen gültig, als α alle die verschiedenen anfänglichen Werthe α_0, α_1, α_2, etc. von ϑ vertreten kann, und was in dieser Beziehung für **eine** Schwingung gilt, demnach auch für alle andern richtig sein wird.

$$T = \pi \sqrt{\frac{l_{,}}{g_{,}}}$$

behält, welcher sich von der Schwingungsdauer im leeren Raume nur dadurch unterscheidet, daß hier statt der Beschleunigung g des freien Falles im luftleeren Raume die durch den Luftdruck verminderte Beschleunigung $g\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ in Rechnung kommt, daß also nach dem obigen Werthe die Schwingungsdauer verlängert wird, wenn $g_{,}$ kleiner wird oder wenn der Luftdruck zunimmt. Führt man für $g_{,}$ seinen Werth $g\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ ein, so kann man dem Werthe von T wegen der Kleinheit des Bruches $\frac{p'}{p}$ auch die Form geben:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l_{,}}{g}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{p'}{p}\right),$$

unter welcher die Größe der durch den Luftdruck bewirkten Verzögerung der Schwingungsdauer besser in die Augen fällt.

Soll darnach die Schwingungsdauer der kleinen Kugel dieselbe sein, wie die eines materiellen Punktes an einem Faden von der Länge l, so muß der Faden, welcher die Kugel trägt, in dem Verhältnisse $1:1-\frac{p'}{p}$ kürzer, also gleich $l\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ sein, und umgekehrt hat man

$$l = \frac{l_{,}}{1-\frac{p'}{p}} = l_{,}\left(1+\frac{p'}{p}\right)$$

für die Länge des mathematischen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer besitzt, wie die kleine Kugel.

Zweites Kapitel.

Bewegung eines festen Systems um eine feste Achse.

§. 158.

Bei der drehenden Bewegung eines festen Systems setzen wir entweder einen Punkt desselben oder mehrere, welche in einer Geraden liegen, als unbeweglich voraus, während alle übrigen ihre Lage in Bezug auf ein festes Coordinatensystem fortwährend ändern und sich in unveränderlichen Entfernungen um diese Gerade, welche Drehungsachse genannt wird, oder um jenen einzelnen Punkt, den Mittelpunkt der drehenden Bewegung, herumbewegen, woraus von selbst hervorgeht, daß sie im ersten Falle nur Kreise beschreiben können, deren Ebenen zur Drehungsachse senkrecht sind, daß sie dagegen im zweiten Falle im Allgemeinen doppeltgekrümmte Curven beschreiben werden, deren gemeinschaftliche bezeichnende Eigenschaft die unveränderliche Länge des Fahrstrahles ist.

Beschäftigen wir uns zunächst mit der Bewegung eines festen Systems um eine feste Achse, als der einfacheren von beiden.

Irgend ein Punkt der Geraden, welche als unbewegliche Drehungsachse gedacht wird, und welche ebensowohl außerhalb, als innerhalb des Systems liegen kann, wenn nur das letztere auf eine unveränderliche Weise mit ihr verbunden ist, werde als Anfangspunkt eines festen Coordinatensystems angenommen, dessen eine Achse, z. B. die der z, mit der Drehungsachse selbst zusammenfällt, so daß alle Punkte des Systems sich in Kreisen bewegen, deren Ebenen zur Ebene der xy, in welcher die Achse der x eine beliebige Richtung haben kann, parallel sind. Sei dann m die Masse eines bestimmten materiellen Punktes im System und r seine unveränderliche senkrechte Entfernung von der Drehungsachse; ferner seien wie gewöhnlich x, y, z seine drei Coordinaten am Ende der Zeit t, P die im Allgemeinen veränderliche Intensität der an ihm thätigen Kraft, $P \cos \widehat{Px} = X$, $P \cos \widehat{Py} = Y$, $P \cos \widehat{Pz} = Z$ ihre drei fördernden Componenten nach den drei Coordinatenachsen und $P(x \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px}) = Yx - Xy$,

$P(z\cos\widehat{Px} - x\cos\widehat{Pz}) = Xz - Zx$ und $P(y\cos\widehat{Pz} - z\cos\widehat{Py}) = Zy - Yz$ ihre drehenden Wirkungen in Bezug auf den Anfangspunkt, und sei alles auf ähnliche Weise für die übrigen Punkte des Systems bezeichnet.

Zuerst nehme man nun an, es sei nur ein einziger materieller Punkt vorhanden und an der Drehungsachse durch eine nicht dehnbare und unbiegsame Gerade befestigt; es werden dann die Gleichungen (76) in §. 71 des ersten Buches seine Bewegung um die Achse der z ausdrücken, wenn man in dieselben die Bedingung einführt, daß seine Entfernung von dieser Achse unveränderlich und seine anfängliche Geschwindigkeit senkrecht zu derselben gerichtet ist. Die erste jener Gleichungen, welche nun zur Bestimmung der Bewegung allein hinreicht, nimmt dadurch die Form an:

$$mr^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} = Yx - Xy$$

oder, wenn man das Aenderungsgesetz des Winkels ω, welchen der unveränderliche Fahrstrahl r mit der Ebene der xz bildet, durch die Winkelgeschwindigkeit φ ersetzt, die Form:

$$A.)\qquad mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = Yx - Xy\,.$$

Man könnte auch die fördernde Geschwindigkeit $v = r\varphi$ und deren Aenderungsgesetz $\frac{dv}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}$ einführen, wodurch sich die Gleichung

$$mr\frac{dv}{dt} = Yx - Xy$$

ergäbe, welche aber hier weniger beachtenswerth ist, als die vorhergehende, da es sich bei der Bewegung eines festen Systems um eine feste Achse weniger um die fördernde Geschwindigkeit der einzelnen Punkte handelt, welche von einem zum andern eine andere wird, als um die Winkelgeschwindigkeit derselben, welche für alle Punkte des Systems dieselbe und demzufolge auch die Winkelgeschwindigkeit oder Umdrehungsgeschwindigkeit des ganzen Systems ist, und weil es immer leicht ist, mittels dieser letztern und der Entfernung r eines bestimmten Punktes von der Drehungsachse dessen fördernde Geschwindigkeit zu berechnen.

Drückt man übrigens in den beiden vorhergehenden Gleichungen die drehende Kraft $Yx - Xy$ nach §. 81 durch $Pq\sin\widehat{Pz} = Pp$ oder noch einfacher durch M_z aus, so sieht man, daß beide in der Form

sehr große Aehnlichkeit mit der Differential-Gleichung der geradlinigen Bewegung haben, daß hier aber eine drehende Kraft als wirkende auftritt, während es dort eine fördernde war, und daß in unserm jetzigen Falle die Geschwindigkeit der Bewegung für dieselbe drehende Kraft, wenn man sich diese von dem materiellen Punkte getrennt und an dem unbiegsamen Fahrstrahl r angreifend denkt, nicht blos von der Masse des Bewegten abhängt, sondern auch von seiner Entfernung von der Drehungsachse, so daß durch dieselbe drehende Kraft M_z zwei Punkte, für welche das Product mr denselben Werth hat, die gleiche fördernde Geschwindigkeit und zwei Punkte, für welche das Product mr^2 denselben Werth hat, die gleiche Winkelgeschwindigkeit erhalten. Untersuchen wir diese Beziehungen noch etwas näher.

Sei C, Fig. 99, der Durchschnitt der Drehungsachse mit einer durch den materiellen Punkt M gelegten senkrechten Ebene, CM der unbiegsame Fahrstrahl r und $MP = P$ die Intensität einer in jener Ebene senkrecht zu CM an M angreifenden Kraft, welche diesem Punkte in jeder Zeiteinheit die Bewegungsgröße mv ertheilen kann. Denken wir uns dann diesen materiellen Punkt nebst der an ihm thätigen Kraft nach A in die Einheit der Entfernung von C versetzt, so wird die Bewegungsgröße mv dieselbe bleiben, die drehende Wirkung der Kraft P dagegen, welche vorher Pr war, nun $P \times 1$ oder r mal kleiner werden. Soll daher diese drehende Wirkung dieselbe bleiben, also die Kraft P noch in dem Punkte M des Fahrstrahls CM oder eine r mal größere Kraft rP in A angreifen, so muß man in A auch die r fache Masse m oder die Masse rm anbringen, damit die Geschwindigkeit v denselben Werth behält. Die Winkelgeschwindigkeit φ war aber im Punkte M gleich $\frac{v}{r}$ und ist nun im Punkte A gleich $\frac{v}{1} = v$, also noch r mal so groß, als dort; damit also diese in A dieselbe ist, wie in M, so muß die fördernde Geschwindigkeit in A selbst r mal kleiner und demnach für dieselbe Kraft die Masse noch einmal die r fache werden, und man muß folglich in der Einheit der Entfernung die Masse mr^2 anbringen, damit derselben von der nämlichen drehenden Kraft rP dieselbe Winkelgeschwindigkeit ertheilt wird, wie der Masse m in der Entfernung r.

Dem Producte mr^2 hat man einen besondern Namen gegeben, und zwar gemäß der Vorstellung, als wenn die Masse sich nur widerstrebend der Wirkung der Kräfte füge, den Namen: Trägheitsmoment; ich werde dasselbe unsern Begriffen besser entsprechend Massemoment

nennen, um dadurch den Einfluß zu bezeichnen, welchen die Masse eines Punktes und seine Entfernung von der Drehungsachse auf die von einer auf ihn wirkenden drehenden Kraft erzeugte wahrnehmbare Wirkung, d. h. auf die von ihr demselben mitgetheilte Winkelbeschleunigung ausübt, und ich bemerke zugleich dabei, daß das Massemoment $m r^2 = p r \frac{r}{g}$ der Form nach mit einer drehenden Kraft oder einem Kraft-Moment homogen ist, daß also keine besondere Einheit dafür festgestellt werden darf, sondern das Meterkilogramm auch als Einheit für die Massenmomente angenommen werden kann.

§. 159.

Nach diesen Erläuterungen schließen wir aus der Gleichung (A), daß bei der drehenden Bewegung um eine feste Achse das Massemoment eines Punktes, seine Winkelgeschwindigkeit und die drehende Wirkung der an ihm thätigen Kraft in Bezug auf die Drehungsachse ganz in derselben Beziehung zu einander stehen, wie die Masse des Bewegten, seine Geschwindigkeit und die bewegende Kraft bei der geradlinigen oder die tangentiale Componente der letztern bei der in einer krummen Linie stattfindenden fortschreitenden Bewegung, daß nämlich das Product aus dem Massemoment in das Aenderungsgesetz der Winkelgeschwindigkeit in Bezug auf die Zeit das Maaß der drehenden Kraft in Function derselben Veränderlichen ist, und es können hier in Bezug auf die Auflösung der Gleichung (A) ähnliche Fälle unterschieden werden, wie es in §. 47 des ersten Buches für die geradlinige Bewegung geschehen ist.

Für die gegenwärtige Betrachtung ist es aber wichtiger, die Wirkung zu untersuchen, welche die bewegende Kraft P in Folge der festen Verbindung ihres Angriffspunktes mit der Drehungsachse auf diese letztere ausübt, oder was dasselbe ist, welche Widerstände diese letztere gegen jene Wirkungen zu leisten hat.

Zu diesem Zwecke gehe ich auf die allgemeinen Gleichungen (68) der freien Bewegung eines materiellen Punktes zurück und füge darin, wie bei der gezwungenen Bewegung im dritten Abschnitte (3ten Kap.) des ersten Buches, der bewegenden Kraft P, welche eine beliebige Richtung haben kann, eine oder zur leichtern Unterscheidung der gesuchten Widerstände mehrere solche Kräfte von unbekannter Intensität bei, daß die

Bewegung des betreffenden Punktes nach Erforderniß beschränkt wird. Dazu reichen zwei Kräfte N_1 und N_2 hin, von denen die eine parallel zur Ebene der Bewegung und fortwährend gegen die feste Achse gerichtet und deren zweite parallel zur Drehungsachse thätig ist. Jene Gleichungen werden dadurch, und wenn ω den Winkel bezeichnet, welchen der verbindende Fahrstrahl mit der Ebene der xz bildet,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X - N_1 \cos\omega \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= X - N_1 \sin\omega \\ 0 &= Z - N_2 \end{aligned}\right\} \qquad (B.$$

Die letzte derselben gibt sogleich

$$N_2 = Z = P \cos \widehat{Pz}$$

und zeigt, daß der Druck, den die Achse parallel zu ihrer Richtung erleidet, blos von der dazu parallelen fördernden Componenten $P \cos \widehat{Pz}$ herrührt. Ersetzt man dann in den beiden ersten x durch $r \cos\omega$, y durch $r \sin\omega$, wodurch man, weil r unveränderlich ist, die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dx}{dt} = - r \sin\omega \frac{d\omega}{dt} = - \varphi y \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = - \varphi^2 x - y\frac{d\varphi}{dt} \, ,$$

$$\frac{dy}{dt} = r \cos\omega \frac{d\omega}{dt} = \varphi x \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = - \varphi^2 y + x\frac{d\varphi}{dt} \, ,$$

erhält, so findet man damit als Werthe der Componenten $N_1 \cos\omega$ und $N_1 \sin\omega$ die Ausdrücke:

$$N_1 \cos\omega = X + m y \frac{d\varphi}{dt} + m x \varphi^2 \, ,$$

$$N_1 \sin\omega = Y - m x \frac{d\varphi}{dt} + m y \varphi^2 \, ,$$

und schließt aus denselben wie in §. 94 des ersten Buches, daß der Druck, welcher parallel zu einer der Coordinatenachsen auf die Drehungsachse ausgeübt wird, nicht blos nach den entsprechenden Componenten der bewegenden Kraft P und des dynamischen Druckes $m r \varphi^2$ bemessen werden kann, sondern außer dieser letztern aus dem Unterschiede zwischen der Componenten der bewegenden Kraft und derjenigen Kraft besteht, welche die Aenderung in der Geschwindigkeit des Bewegten parallel zu

der entsprechenden Coordinatenachse bewirken würde, wenn der materielle Punkt ganz frei wäre und sich auf dieselbe Weise bewegte. Denn stellt $MV = v = r\varphi$, Fig. 100, die Geschwindigkeit des Bewegten M in dem Augenblicke vor, wo x und y seine Coordinaten sind, und wird die drehende Bewegung als eine positive, im Sinne eines Uhrzeigers vor sich gehende vorausgesetzt, so sind die zu den Achsen der x und y parallelen Componenten derselben offenbar

$$-\frac{y}{r}v = -\varphi y \quad , \quad +\frac{x}{r}v = \varphi x \, ;$$

die Kraft, welche die Aenderung der Geschwindigkeit v erzeugen würde, wäre $m\frac{dv}{dt} = mr\frac{d\varphi}{dt}$, und demnach ihre Componenten nach den beiden Achsen

$$-my\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{und} \quad +mx\frac{d\varphi}{dt} \, .$$

Der Druck auf die Achse nach einer bestimmten Richtung ist demnach um so kleiner, je mehr sich die Aenderung der Geschwindigkeit des Bewegten, in dieser Richtung genommen, der nach derselben Richtung zerlegten Wirkung der bewegenden Kraft nähert, und er ist, abgesehen von dem dynamischen Drucke, dieser Wirkung selbst gleich, wo die Geschwindigkeitsänderung nach der Richtung des Druckes Null ist, oder wo die Richtung der Bewegung diejenige des Druckes schneidet.

Der ganze Druck N_1 ist daher wieder der Summe aus dem statischen und dem dynamischen Drucke gleich; denn multiplicirt man die erste der Gleichungen (B) mit $\cos\omega$, die zweite mit $\sin\omega$, nimmt ihre Summe und ersetzt die Aenderungsgesetze $m\frac{d^2x}{dt^2}$ und $m\frac{d^2y}{dt^2}$ durch ihre obigen Werthe, so folgt

$$N_1 = X\cos\omega + Y\sin\omega + mr\varphi^2 \, ,$$

wie vorauszusehen war, da die beiden Glieder $X\cos\omega + Y\sin\omega$ offenbar die zur Drehungsachse und zur augenblicklichen Richtung der Bewegung senkrechte Componente der Kraft P vorstellen und die zur Achse senkrechte, mit der Richtung der Bewegung zusammenfallende Componente durch die Aenderung der Geschwindigkeit des Bewegten in Anspruch genommen ist.

Die Kräfte N_1 und N_2 üben aber auch drehende Wirkungen auf die Achse der Bewegung aus und bilden demgemäß zwei Momente, deren Achsen mit den Coordinatenachsen der x und der y zusammen=

fallen; denn das Moment, dessen Achse die Achse der z oder die Drehungsachse selbst sein sollte, ist offenbar Null, da die Kraft N_2 zu dieser Achse parallel ist, und die Richtung der Kraft N_1 dieselbe fortwährend schneidet. In der That findet man auch aus den Gleichungen (B), wenn man die erste mit y, die zweite mit x multiplicirt und jene von dieser abzieht, die Gleichung:

$$N_1 (x \sin\omega - y \cos\omega) = 0 = m r^2 \frac{d\varphi}{dt} - Y x + X y ,$$

welche gerade die Gleichung der Bewegung des materiellen Punktes um die feste Drehungsachse ist. Jene Widerstände nun, welche diese Achse gegen eine Drehung um die Achsen der y und der x zu leisten hat, werden ebenso erhalten, wenn man einmal die erste der Gleichungen (B) mit z und die dritte mit $-x$ multiplicirt und die Summe der Producte nimmt, und dann die dritte mit y, die zweite mit $-z$ multiplicirt und die Ergebnisse addirt; man findet so die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} N_1 z \cos\omega - N_2 x &= X z - Z x + m\varphi^2 x z + m y z \frac{d\varphi}{dt} \\ N_2 y - N_1 z \sin\omega &= Z y - Y z + m\varphi^2 y z - m x z \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} , \quad (C.$$

deren Bedeutung leicht zu erklären ist. Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite bilden das Moment der bewegenden Kraft in Bezug auf die betreffende Achse, das dritte das Moment des dynamischen Druckes und das letzte das Moment derjenigen Kraft, welche die augenblickliche Geschwindigkeitsänderung erzeugen würde, wenn der Bewegte ganz frei wäre und sich auf gleiche Weise bewegte.

§. 160.

Dehnen wir nun die vorhergehenden Betrachtungen auf alle Punkte des Systems aus, und nehmen wir dasselbe zuerst wieder als ein nicht stetig zusammenhängendes, so können wir uns für seine drehende Bewegung, deren Winkelgeschwindigkeit allen Punkten gemeinschaftlich ist, jeden materiellen Punkt desselben durch einen andern in der Einheit der Entfernung von der Drehungsachse ersetzt vorstellen, dessen Masse dem Massemoment mr^2 des ersten gleich ist, und dann alle diese letztern in einen einzigen materiellen Punkt vereinigt denken, dessen

Masse der Summe ihrer Massen oder der Summe der Massenmomente aller gegebenen Punkte gleich kommen, also durch

$$\Sigma . m r^2$$

ausgedrückt werden muß, was einfach darauf hinauskommt, daß diese Massemomente in Bezug auf eine feste Achse ebenso zu einem resultirenden Massemoment summirt werden können, wie Kräftemomente, deren Achsen parallel sind. Vereinigen wir dann auch alle an dem System thätigen drehenden Kräfte in Bezug auf die Drehungsachse zu einem einzigen Momente: $\Sigma . (Yx - Xy) = \Sigma . M_z$, so erscheint das ganze System auf jenen einzigen materiellen Punkt und dieses resultirende Moment zurückgeführt, und die Gleichung (A) wird also wieder keine Bewegung ausdrücken, aber die Form:

$$113.) \qquad \Sigma . m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \Sigma . (Yx - Xy) = \Sigma . M_z$$

annehmen, worin φ immer die Winkelgeschwindigkeit des Systems oder eines beliebigen Punktes bezeichnet, und $\Sigma . m r^2$ das Massemoment des ganzen Systems genannt wird.

Ist dieses dann ein stetig zusammenhängendes, und bezeichnen wir sein Massemoment in Bezug auf die Drehungsachse mit $\mathfrak{M}$, so ist nach dem Frühern leicht zu schließen, daß der Zuwachs $\Delta \mathfrak{M}$, welchen dieses Massemoment noch durch Hinzufügung einer kleinen Masse Δm erhält, deren Rauminhalt Δv und für welche die kleinste und größte Entfernung eines Punktes von der Drehungsachse r und $r + \Delta r$ ist, zwischen $r^2 \Delta m$ und $(r + \Delta r)^2 \Delta m$ liegt und demnach durch $(r^2 + \alpha r \Delta r) \Delta m$ ausgedrückt werden kann. Das Verhältniß dieses Zuwachses zu dem des Raumes Δv erhält darnach den Anfangswerth:

$$\text{Anf:} \frac{\Delta \mathfrak{M}}{\Delta v} = \text{Anf:} \frac{\Delta m}{\Delta v} (r^2 + \alpha r \Delta r) = \frac{dm}{dv} r^2 = q r^2 \ ,$$

worin q die geometrische Dichte in der Entfernung r von der Achse bezeichnet. Werden daher alle Größen als Functionen der Coordinaten genommen, so erhält man das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d^3 \mathfrak{M}}{dx\, dy\, dz} = \frac{d^3 m}{dx\, dy\, dz} r^2 = q r^2 = q (x^2 + y^2) \ ,$$

woraus zwischen den entsprechenden Grenzen des gegebenen Körpers

$$114.) \qquad \mathfrak{M} = \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . q (x^2 + y^2)$$

als Ausdruck für das Massemoment desselben folgt. Für Polarcoordinaten hat man (§. 75)

$$\frac{d^3 m}{dr\, d\omega\, d\vartheta} = q r^2 \sin\vartheta ,$$

und damit ergibt sich, wenn die Drehungsachse auch als Polar-Achse genommen wird, in welchem Falle $x^2 + y^2 = r_{,}^2 = r^2 \sin^2\vartheta$ wird,

$$\mathfrak{M} = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \int_{r_0}^{r} dr . q r^4 \sin^3\vartheta . \qquad (115.$$

Sind ferner in diesem Falle eines stetig zusammenhängenden Systems auch die Kräfte P oder ihre Componenten von den Massetheilchen des bewegten Körpers der Intensität und Richtung nach abhängig, so kann man die Componenten der fördernden geometrischen Wirkung für den Punkt xyz, wie in §. 146, mit

$$X = q f_1(x, y, z) \ , \ Y = q f_2(x, y, z) \ , \ Z = q f_3(x, y, z) ,$$

oder zur Abkürzung mit $q f_1$, $q f_2$, $q f_3$ bezeichnen, und hat damit wie dort für die physischen fördernden Gesammtwirkungen ΣX, ΣY, ΣZ auf einen in jenem Punkte begrenzten Körpertheil die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d^3 . \Sigma X}{dx\, dy\, dz} = q f_1 \ , \ \frac{d^3 . \Sigma Y}{dx\, dy\, dz} = q f_2 \ , \ \frac{d^3 . \Sigma Z}{dx\, dy\, dz} = q f_3 ;$$

ferner gehen aus den drehenden geometrischen Wirkungen auf denselben Punkt xyz für die resultirenden Momente $\Sigma . M_X$, $\Sigma . M_Y$, $\Sigma . M_Z$ die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d^3 . \Sigma M_Z}{dx\, dy\, dz} = q(x f_2 - y f_1) \ , \ \frac{d^3 . \Sigma M_Y}{dx\, dy\, dz} = q(z f_1 - x f_3) ,$$

$$\frac{d^3 . \Sigma M_X}{dx\, dz\, dz} = q(y f_3 - z f_2)$$

hervor, durch welche sich diese letztern Gesammtwirkungen ebenso, wie die erstern zwischen den entsprechenden Grenzen des Systems als dreifache bestimmte Integrale ergeben. Im Allgemeinen wollen wir dieselben jedoch für beide Fälle, für Systeme mit und ohne stetigen Zusammenhang nach der bisherigen Weise bezeichnen, so daß mit Beachtung des Vorhergehenden die Gleichung (113), in welcher man $\Sigma . mr^2$ auch durch $\mathfrak{M}$ ersetzen kann, für jedes feste System das Aenderungsgesetz der Winkelgeschwindigkeit oder das Aenderungsgesetz der drehenden Bewegung um die Achse der z ausdrückt.

§. 161.

Nach diesem ist es nun nicht schwer, den Druck zu ermitteln, welchen das ganze System bei seiner Bewegung auf die Drehungsachse ausübt, sei es ein stetig zusammenhängendes oder ein aus einzelnen getrennten Punkten bestehendes System.

Die fördernde Wirkung parallel zur Achse der z, welche die Drehungsachse in der Richtung ihrer Länge zu verschieben strebt, ist einfach

$$\Sigma Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz} ;$$

dagegen wird der fördernde Druck, welcher senkrecht zur Drehungsachse gerichtet ist und diese parallel mit sich selbst fortbewegen will, durch

$$\Sigma (X \cos \omega + Y \sin \omega) + \Sigma . m r \varphi^2$$

vorgestellt, und seine beiden Componenten nach den Achsen der x und der y sind

$$\Sigma \left(X + m y \frac{d\varphi}{dt}\right) + \Sigma . m x \varphi^2 ,$$

$$\Sigma \left(Y - m x \frac{d\varphi}{dt}\right) + \Sigma . m y \varphi^2 ,$$

oder mit der Beachtung, daß die Winkelgeschwindigkeit φ für alle Punkte des Systems gemeinschaftlich, mithin von dem Summenzeichen unabhängig ist, in anderer Form

$$\Sigma X + \frac{d\varphi}{dt} \Sigma \; m y + \varphi^2 \Sigma . m x ,$$

$$\Sigma Y - \frac{d\varphi}{dt} \Sigma . m x + \varphi^2 \Sigma . m y .$$

Ebenso erhält man für die drehenden Wirkungen in Bezug auf die Achsen der x und der y die Ausdrücke:

$$\Sigma M_Y + \varphi^2 \Sigma . m x z + \frac{d\varphi}{dt} \Sigma \; m y z ,$$

$$\Sigma M_X + \varphi^2 \Sigma . m y z - \frac{d\varphi}{dt} \Sigma . m x z ,$$

worin die Glieder $\Sigma . mxz$ und $\Sigma . myz$ für ein stetig zusammenhängendes System, wie die Glieder $\Sigma . mx$, $\Sigma . my$, welche schon bei der Bestimmung des Schwerpunktes vorgekommen sind, in dreifache Integrale übergehen und demnach die Formen annehmen:

$$\int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . qxz \quad , \quad \int_{x_0}^{x} dx . \int_{y_0}^{y} dy . \int_{z_0}^{z} dz . qyz .$$

Wenn die Drehungsachse oder die Achse der z durch den Schwerpunkt des Systems oder durch den Mittelpunkt seiner Masse geht, so hat man

$$\Sigma . mx = 0 \quad , \quad \Sigma . my = 0 ;$$

die Componenten des senkrecht auf sie ausgeübten Druckes kommen dann auf ΣX, ΣY, also auf die des statischen Druckes der fördernden Resultirenden

$$\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}$$

zurück, und der ganze fördernde Druck auf die Achse wird dieser Resultirenden selbst gleich sein.

Hat ferner die Drehungsachse im System eine solche Lage, daß auch

$$\Sigma . mxz = 0 \quad , \quad \Sigma . myz = 0$$

wird, so kommen die drehenden Wirkungen, welche auf die Drehungsachse ausgeübt werden, ebenso auf die Momente:

$$\Sigma . M_Y = \Sigma(Xz - Zx) \quad , \quad \Sigma . M_X = \Sigma(Zy - Yz)$$

zurück. Für eine auf solche Weise gelegene Achse wird demnach sowohl der fördernde als der drehende Druck Null, wenn blos das Moment $\Sigma . M_Z$ an dem Systeme thätig ist; die Achse hat also in diesem Falle gar keinen Druck zu erleiden und braucht während der Bewegung nicht festgehalten zu werden.

§. 162.

Wenn die Drehungsachse keinen Druck erleidet, also auch keinen Widerstand zu leisten hat, so wird sich das System, auch wenn es ganz frei gegeben wird, fortwährend um diese Achse geradeso bewegen, als wenn dieselbe fest wäre, d. h. diese Achse wird weder eine fortschreitende Bewegung annehmen, noch ihre Richtung oder überhaupt ihre Lage ändern, auch wenn sie durch Nichts festgehalten wird. Damit dieses eintrete, müssen sich die Werthe, welche wir vorher für die fördernden und drehenden drückenden Wirkungen auf die Drehungsachse gefunden haben, für die ganze Dauer der Bewegung auf Null reduziren, und dieses ist offenbar nur möglich, wenn jedes einzelne von den Gliedern, aus welchen jene Werthe bestehen, für sich Null ist und bleibt. Die erste Bedingung für die Unbeweglichkeit der Drehungsachse wird demnach die sein, daß sich alle Kräfte, welche an dem System thätig sind,

auf ein Moment M_z, dessen Achse mit der Drehungsachse zusammenfällt, zurückführen lassen, so daß man hat

$$\Sigma X = 0\ ,\quad \Sigma Y = 0\ ,\quad \Sigma Z = 0\ ,\quad \Sigma . M_x = 0\ ,\quad \Sigma . M_y = 0\ .$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird es noch auf die Lage der Achse im System oder richtiger auf die Vertheilung der Masse des Systems in Bezug auf die Drehungsachse ankommen, und die obengefundenen Ausdrücke zeigen, daß die einzigen nothwendigen und genügenden Bedingungen in dieser Hinsicht durch die schon oben angenommenen Gleichungen:

$$\Sigma . mx = 0 \quad , \quad \Sigma . my = 0$$

für das Unterbleiben der fortschreitenden Bewegung und

$$\Sigma . mxz = 0 \quad , \quad \Sigma . myz = 0$$

für die Unveränderlichkeit der Richtung der Drehungsachse ausgedrückt werden.

Die Bedeutung der beiden ersten dieser Gleichungen ist schon ausgesprochen worden; sie drücken aus, daß die Achse der z, die Drehungsachse, durch den Mittelpunkt der Masse des Systems geht. Die Bedeutung der beiden andern Gleichungen läßt sich nicht einfach aussprechen. Man kann sich aber die Producte mx, m′x′, etc. als Maaße von Kräften denken, welche alle zur Achse der x parallel sind; ebenso die Producte my, m′y′, etc. als Kräfte, welche zur Achse der y parallel gerichtet sind; es werden dann $\Sigma . mx$ und $\Sigma . my$ die allgemeinen Resultirenden dieser Kräfte sein, und man hat nach der Lehre von der Gesammtwirkung paralleler Kräfte für die Entfernungen z_1 und z_2 der Richtungen dieser Resultirenden von der Ebene der xy die Gleichungen:

$$z_1 = \frac{\Sigma . mxz}{\Sigma . mx} \quad , \quad z_2 = \frac{\Sigma . myz}{\Sigma . my} \ .$$

Die vorhergehenden Gleichungen:

$$\Sigma . mxz = 0 \quad , \quad \Sigma . myz = 0$$

drücken demnach aus, daß diese Richtungen in der Ebene der xy selbst liegen, oder daß die Masse des Systems zu beiden Seiten dieser Ebene so vertheilt ist, daß sich die Kräfte: $mr = m\sqrt{x^2+y^2}$, $m'r' = m'\sqrt{x'^2+y'^2}$, etc. um jede in dieser Ebene liegende Achse und folglich um den Anfangspunkt selbst im Gleichgewichte halten.

Wenn demnach diese beiden letzten Bedingungsgleichungen für eine als Achse der z angenommene Drehungsachse befriedigt werden, so

genügt es, den Anfangspunkt selbst festzuhalten, um jede Bewegung dieser Achse zu verhindern; eine solche Achse wird deßhalb Haupt-Drehungsachse oder kürzer Hauptachse des Systems für diesen Punkt genannt. Ist dann dieser Punkt zugleich Mittelpunkt der Masse des Systems, oder mit andern Worten, ist die Drehungsachse eine Hauptachse für den Massemittelpunkt oder Schwerpunkt, in welchem Falle auch die beiden ersten Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma . mx = 0 \quad , \quad \Sigma . my = 0$$

befriedigt werden, so bedarf es, wie erwähnt, auch keines Hindernisses mehr gegen die fortschreitende Bewegung der Drehungsachse, und man nennt deßhalb eine solche Hauptachse im Schwerpunkte eine natürliche Drehungsachse des Systems.

Aus dem Vorhergehenden wird man leicht schließen, daß wenn für irgend einen Punkt eines festen Systems in Bezug auf ein durch denselben gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem zu gleicher Zeit die drei Gleichungen:

$$\Sigma . mxy = 0 \quad , \quad \Sigma . mxz = 0 \quad , \quad \Sigma . myz = 0 \quad (116.$$

bestehen, jede der drei Coordinatenachsen eine Hauptachse für diesen Punkt sein wird, sowie die drei Gleichungen:

$$\Sigma . mx = 0 \quad , \quad \Sigma . my = 0 \quad , \quad \Sigma . mz = 0 \quad (117.$$

ausdrücken, daß jede dieser Achsen durch den Mittelpunkt der Masse des Systems geht, daß also der betreffende Punkt selbst dieser Mittelpunkt ist; die sechs vorhergehenden Gleichungen zusammen sprechen demnach die nothwendigen und genügenden Bedingungen dafür aus, daß drei durch den Schwerpunkt gelegte rechtwinklige Coordinatenachsen natürliche Drehungsachsen des Systems sind.

Die Hauptachsen stehen in einer sehr innigen Beziehung zu den Massemomenten des Systems und besitzen in dieser Hinsicht sehr beachtenswerthe Eigenschaften, welche, ehe wir die drehende Bewegung weiter verfolgen, erörtert werden müssen.

§. 163.

Untersuchen wir zuerst, ob es in jedem Punkte eines festen Systems Hauptachsen gibt, und wie viele.

Dazu nehmen wir irgend einen beliebigen Punkt des Systems als Durchschnittspunkt dreier unter sich rechtwinkligen, sonst aber willkürlich

gerichteten Coordinatenachsen an und drücken das Massenmoment $\mathfrak{M}$ des Systems in Bezug auf eine durch jenen Punkt gehende, gegen die drei Achsen beliebig geneigte Gerade, welche als Drehungsachse gedacht und deren Richtung durch die drei Winkel α, β, γ zwischen ihr und jenen Achsen bestimmt werde, durch die Coordinaten der einzelnen materiellen Punkte des Systems aus.

Die Entfernung r eines solchen Punktes, dessen Masse und Coordinaten m, x, y und z seien, von dieser Drehungsachse ist nämlich nach §. 20 der Einl.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma)^2}$$

$$= \sqrt{(x\cos\beta - y\cos\alpha)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (y\cos\gamma - z\cos\beta)^2}\,,$$

und man zieht daraus in anderer Form

$$r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (x^2 + z^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma\,.$$

Das Massemoment dieses Punktes in Bezug auf dieselbe Drehungsachse ist demnach

$$mr^2 = m(y^2 + z^2)\cos^2\alpha + m(x^2 + z^2)\cos^2\beta + m(x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2mxy\cos\alpha\cos\beta - 2mxz\cos\alpha\cos\gamma - 2myz\cos\beta\cos\gamma\,,$$

und man wird leicht einsehen, daß die drei Factoren:

$$m(y^2 + z^2)\quad,\quad m(x^2 + z^2)\quad,\quad m(x^2 + y^2)$$

die Massemomente des betreffenden Punktes in Bezug auf die drei Coordinatenachsen, diese als Drehungsachsen gedacht, vorstellen.

Der Ausdruck für das Massemoment $\mathfrak{M} = \Sigma . mr^2$ des ganzen Systems in Bezug auf die allgemeine Drehungsachse wird nach diesem

$$118).\ \begin{cases} \mathfrak{M} = \Sigma.m(y^2+z^2)\cos^2\alpha + \Sigma.m(x^2+z^2)\cos^2\beta + \Sigma.m(x^2+y^2)\cos^2\gamma \\ \quad - 2\Sigma.mxy\cos\alpha\cos\beta - 2\Sigma.mxz\cos\alpha\cos\gamma - 2\Sigma.myz\cos\beta\cos\gamma\,, \end{cases}$$

und wenn man dann beachtet, daß die Winkel α, β, γ für alle Punkte des Systems unverändert bleiben, daß also die Functionen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ Factoren aller Glieder derselben Summe sind, ferner daß die Ausdrücke:

$$\Sigma . m(y^2 + z^2)\quad,\quad \Sigma . m(x^2 + z^2)\quad,\quad \Sigma . m(x^2 + y^2)$$

die Massemomente des ganzen Systems in Bezug auf die drei Coordinaten-Achsen vorstellen, so kann man diese durch die Bezeichnung:

$$\mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{C}$$

abkürzen und ebenso zur Abkürzung

$$\Sigma . mxy = \mathfrak{F} \quad , \quad \Sigma . mxz = \mathfrak{G} \quad , \quad \Sigma . myz = \mathfrak{H}$$

setzen, und man erhält so einfacher

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cos^2\alpha + \mathfrak{B} \cos^2\beta + \mathfrak{C} \cos^2\gamma \\ \quad - 2\mathfrak{F} \cos\alpha \cos\beta - 2\mathfrak{G} \cos\alpha \cos\gamma - 2\mathfrak{H} \cos\beta \cos\gamma \end{array}\right\} (119.$$

als Ausdruck für das Massemoment des ganzen Systems in Bezug auf die allgemein angenommene Drehungsachse.

Dieser Werth ändert sich nun für dasselbe Coordinatensystem nur mit den Winkeln α, β, γ und diese Aenderung wird eine stetige werden, wenn man der Drehungsachse eine stetige Bewegung innerhalb des Systems um den Anfangspunkt gibt, wodurch dieselbe nach und nach alle mögliche Lagen einnimmt und die Winkel α, β, γ alle mögliche, mit der Bedingung: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ vereinbare Werthe annehmen. Das Massemoment $\mathfrak{M}$ wird auf diese Weise, wie die genannten Winkel, eine veränderliche Größe, und wir können uns die Beziehung zwischen ihr und jenen Winkeln oder zwischen ihr und der Lage der Drehungsachse auf folgende Art anschaulich machen.

Man setze

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{r^2} \quad , \quad r = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{M}}}$$

und denke sich diese stetig veränderliche, von den Winkeln α, β, γ abhängige Größe r als Fahrstrahl auf die Drehungsachse vom Anfangspunkte aus aufgetragen, so daß dadurch ein Punkt bestimmt wird, dessen Coordinaten: r, α, β, γ sind; die vorhergehende Gleichung nimmt dadurch die Form an:

$$\begin{array}{l} 1 = \mathfrak{A} r^2 \cos^2\alpha + \mathfrak{B} r^2 \cos^2\beta + \mathfrak{C} r^2 \cos^2\gamma \\ \quad - 2\mathfrak{F} r^2 \cos\alpha \cos\beta - 2\mathfrak{G} r^2 \cos\alpha \cos\gamma - 2\mathfrak{H} r^2 \cos\beta \cos\gamma \end{array}$$

und wird die Gleichung einer Fläche, die jene Beziehung zwischen der Lage der Drehungsachse und dem Massemoment des Systems durch diejenige der Lage ihres Fahrstrahls zu seiner Länge anschaulich darstellt. Führt man dann die rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi = r \cos\alpha \quad , \quad \eta = r \cos\beta \quad , \quad \zeta = r \cos\gamma$$

ein, so zeigt die neue Form:

120.) $1 = \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 - 2\mathfrak{F}\xi\eta - 2\mathfrak{G}\xi\zeta - 2\mathfrak{H}\eta\zeta$,

daß dies die Gleichung eines Ellipsoids ist, das seinen Mittelpunkt im Anfang der Coordinaten hat, dessen Achsen aber mit den Achsen der Coordinaten nicht zusammenfallen, was man einestheils aus der Abwesenheit der Glieder mit den einfachen Potenzen von ξ, η, ζ und anderntheils aus der Anwesenheit der drei Glieder mit den Producten $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ der Veränderlichen schließt. Der erstere Schluß kann übrigens auch daraus gezogen werden, daß die Lage der Drehungsachse dieselbe ist, ob man sie durch die Winkel α, β, γ oder durch die Winkel $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$ bestimmt, daß also auch das Massemoment in beiden Fällen dasselbe sein muß; es wird demnach dieselbe Länge r jedesmal nach zwei entgegengesetzten Richtungen vom Anfangspunkte aus aufgetragen, oder dieser letztere halbirt alle Geraden, die innerhalb unserer Fläche durch denselben gezogen werden, und ist folglich Mittelpunkt dieser Fläche.

Man kann nun immer die Coordinatenachsen so drehen, daß sie mit den Achsen des Ellipsoids zusammenfallen und die Gleichung dieser Fläche die Form annimmt:

121.) $1 = \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2$,

daß also die Glieder mit den Producten der Veränderlichen Null werden, d. h. daß man hat

$$\mathfrak{F} = \Sigma . m\xi\eta = 0 \quad , \quad \mathfrak{G} = \Sigma . m\xi\zeta = 0 \quad , \quad \mathfrak{H} = \Sigma . m\eta\zeta = 0 \, ,$$

und diese Gleichungen zeigen, daß in diesem Falle die neuen Coordinaten-Achsen, also die Achsen des Ellipsoids, *Hauptachsen* des Systems für den Mittelpunkt des Ellipsoids oder für den als Anfang der Coordinaten angenommenen Punkt des Systems sind.

Es gibt demnach in jedem Punkte eines festen Systems drei unter sich rechtwinklige Hauptachsen und folglich auch in jedem festen System drei natürliche Drehungsachsen, deren Richtungen je zwei einen rechten Winkel unter sich einschließen.

Die geometrischen Halbachsen unseres Ellipsoids ergeben sich durch die Vergleichung der zuletzt erhaltenen Gleichung desselben mit der allgemeinen Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \, ,$$

und zwar findet man

$$a = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}};$$

man schließt daraus, daß der kleinsten Achse, welche zugleich der kleinste Fahrstrahl des Ellipsoids ist, das größte, der größten Achse, welche zugleich der längste Fahrstrahl ist, das kleinste Massemoment entspricht. Die Hauptachsen zeichnen sich demnach auch dadurch aus, daß sich unter den drei Massemomenten des Systems in Bezug auf diese Achsen das größte und kleinste unter allen Massemomenten befindet, welche das System in Bezug auf eine durch ihren Durchschnittspunkt gehende Achse erhalten kann.

Die vorhergehende Betrachtung bietet dann auch das Mittel, um die Hauptachsen für einen gegebenen Punkt eines Körpers zu bestimmen. Man wählt dazu drei willkürliche Coordinatenachsen und berechnet für diese die Massenmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und die mit $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ bezeichneten Größen, stellt damit die Gleichung des vorher betrachteten Ellipsoids, welches wir Ellipsoid der Massemomente nennen wollen, auf und dreht nun die Coordinatenachsen so, daß die Coefficienten $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ der Producte $\xi'\eta'$, $\xi'\zeta'$, $\eta'\zeta'$ der neuen Coordinaten Null werden. Dazu werden wieder die allgemeinen Beziehungen in §. 22 der Einleitung zwischen den Coordinaten eines Punktes in Bezug auf zwei verschiedene Coordinatensysteme dienen, und die Winkel ω, ψ, ϑ, welche sich aus den Bedingungsgleichungen:

$$\mathfrak{F}' = 0, \quad \mathfrak{G}' = 0, \quad \mathfrak{H}' = 0$$

ergeben, werden die Lage der gesuchten Hauptachsen in Bezug auf die zuerst angenommenen Coordinatenachsen bestimmen. Ein einfaches Beispiel für diese Bestimmung wird man in §. 168 finden.

§. 164.

Nehmen wir nun diese Hauptachsen eines beliebigen Punktes im System als Achsen eines Coordinatensystems an, so erhält der Ausdruck für das Massemoment des Systems in Bezug auf eine durch denselben Punkt gehende Drehungsachse, welche die Winkel α, β, γ mit jenen Achsen bildet, die Form:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\cos^2\alpha + \mathfrak{B}\cos^2\beta + \mathfrak{C}\cos^2\gamma, \qquad (122.$$

worin immer noch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Massemomente in Bezug auf die drei Coordinatenachsen, also jetzt in Bezug auf die drei Hauptachsen vorstellen. Es genügt demnach, diese Massemomente des gegebenen Systems in Bezug auf seine drei Hauptachsen in einem bestimmten Punkte herzustellen, um das Massemoment desselben in Bezug auf jede andere Drehungsachse, die durch denselben Punkt geht, einfach berechnen zu können.

Aber auch diese Hauptachsen haben im Allgemeinen eine solche Lage im System, daß es für die Rechnung schwierig und umständlich wird, die Massemomente in Bezug auf sie unmittelbar allgemein auszudrücken, abgesehen davon, daß es im Allgemeinen sehr schwer ist, die Lage dieser Hauptachsen von vornherein und ohne Hülfe der Massemomente zu bestimmen. Glücklicherweise ist dies auch nicht nothwendig; denn es reicht hin, die Massemomente eines Systems in Bezug auf seine natürliche Drehungsachsen berechnen zu können, um damit einfach das Massemoment desselben in Bezug auf jede andere Drehungsachse zu erhalten, deren Lage gegen jene drei Hauptachsen im Mittelpunkte der Masse vollständig bestimmt ist.

Um dies nachzuweisen, lege ich durch diesen Mittelpunkt der Masse des gegebenen Systems ein beliebig gerichtetes rechtwinkliges Coordinatensystem und bezeichne wieder die Winkel, welche irgend eine innerhalb oder außerhalb des Systems liegende, mit diesem aber fest verbundene Gerade, die Drehungsachse, mit den drei Achsen jenes Systems bildet, mit α, β, γ, die Coordinaten eines bestimmten Punktes derselben mit $x_,$, $y_,$, $z_,$. Ein dem System angehörender materieller Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, ist von dieser Drehungsachse um eine Länge r entfernt, für welche man nach §. 20 der Einl. den Ausdruck hat:

$$r^2 = (x - x_,)^2 + (y - y_,)^2 + (z - z_,)^2$$
$$- [(x - x_,) \cos\alpha + (y - y_,) \cos\beta + (z - z_,) \cos\gamma]^2 ,$$

womit der Werth für sein Massemoment in Bezug auf die Drehungs-Achse nach einigen Umwandlungen die Form annimmt:

$$mr^2 = m(x - x_,)^2 \sin^2\alpha + m(y - y_,)^2 \sin^2\beta + m(z - z_,)^2 \sin^2\gamma$$
$$- 2m(x - x_,)(y - y_,) \cos\alpha \cos\beta - 2m(x - x_,)(z - z_,) \cos\alpha \cos\gamma$$
$$- 2m(y - y_,)(z - z_,) \cos\beta \cos\gamma .$$

Das Massemoment $\mathfrak{M}$ des ganzen Systems in Bezug auf dieselbe Gerade wird demnach, wenn man entwickelt und beachtet, daß die

Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, sowie die Winkel α, β, γ für alle Glieder derselben Summe gemeinschaftlich sind, die Form annehmen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} = \Sigma . m(&x^2 \sin^2\alpha + y^2 \sin^2\beta + z^2 \sin^2\gamma - 2xy \cos\alpha \cos\beta \\ &- 2xz \cos\alpha \cos\gamma - 2yz \cos\beta \cos\gamma) \\ + M(&x_{,}^2 \sin^2\alpha + y_{,}^2 \sin^2\beta + z_{,}^2 \sin^2\gamma - 2x_{,}y_{,} \cos\alpha \cos\beta \\ &- 2x_{,}z_{,} \cos\alpha \cos\gamma - 2y_{,}z_{,} \cos\beta \cos\gamma) \\ &- 2(x_{,} \sin^2\alpha - y_{,} \cos\alpha \cos\beta - z_{,} \cos\alpha \cos\gamma)\, \Sigma . mx \\ &- 2(y_{,} \sin^2\beta - x_{,} \cos\alpha \cos\beta - z_{,} \cos\beta \cos\gamma)\, \Sigma . my \\ &- 2(z_{,} \sin^2\gamma - x_{,} \cos\alpha \cos\gamma - y_{,} \cos\beta \cos\gamma)\, \Sigma . mz\,.\end{aligned}$$

Die beiden ersten Zeilen dieses Ausdruckes sind aber, wie leicht zu sehen ist, wenn man für $\sin^2\alpha$, etc. die Werthe $1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ wieder einführt, vollkommen gleichbedeutend mit dem Werthe (118) von $\mathfrak{M}$, sie stellen also das Massemoment des ganzen Systems in Bezug auf eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten, nun zugleich Massemittelpunkt des Systems, gehende Achse vor, welche die Winkel α, β, γ mit den Coordinatenachsen bildet, also zu der durch den Punkt $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ gehenden Drehungsachse parallel ist. Ferner findet man durch Vergleichung der beiden folgenden Zeilen mit dem Werthe von r^2 im vorhergehenden §., daß der Factor von der Masse M des ganzen Systems das Quadrat der senkrechten Entfernung l des Anfangspunktes von der obengenannten Drehungsachse oder auch den Abstand dieser letztern von der zu ihr parallelen, durch den Anfangspunkt gehenden Geraden ausdrückt. Endlich gibt die Voraussetzung, daß der Anfangspunkt der Schwerpunkt des Systems ist, die Gleichungen (117):

$$\Sigma . mx = 0\,, \quad \Sigma . my = 0\,, \quad \Sigma . mz = 0\,,$$

wodurch die noch übrigen Glieder des Werthes von $\mathfrak{M}$ verschwinden. Dieser Werth kommt demnach auf den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cos^2\alpha + \mathfrak{B} \cos^2\beta + \mathfrak{C} \cos^2\gamma &- 2\mathfrak{F} \cos\alpha \cos\beta \\ &- 2\mathfrak{E} \cos\alpha \cos\gamma - 2\mathfrak{D} \cos\beta \cos\gamma \\ &+ Ml^2\end{aligned}$$

zurück und zeigt, daß das **Massemoment eines festen Systems in Bezug auf eine beliebige Drehungsachse dem Massemoment desselben in Bezug auf eine parallele durch den Schwerpunkt gehende Achse und dem Massemomente des**

die ganze Masse des Systems in sich vereinigenden Mittelpunktes der Masse in Bezug auf die gegebene Achse zusammen gleich ist.

Werden die Hauptachsen im Massemittelpunkt als Coordinaten-Achsen genommen, so hat man $\mathfrak{F} = 0$, $\mathfrak{G} = 0$, $\mathfrak{H} = 0$ und demnach einfacher

$$123.)\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cos^2 \alpha + \mathfrak{B} \cos^2 \beta + \mathfrak{C} \cos^2 \gamma + \mathrm{M} l^2 ,$$

worin nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Massemomente des Systems in Bezug auf diese Hauptachsen vorstellen, deren Lage meistens leicht zu erkennen ist, sowie denn auch die Bestimmung der ebengenannten Massemomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ für regelmäßige geometrische Körper von constanter Dichte keine Schwierigkeit darbietet.

Aus dem vorhergehenden Satze folgt dann noch, daß das Massemoment in Bezug auf eine beliebige Achse immer größer ist, als das in Bezug auf die parallele durch den Massemittelpunkt gezogene Gerade, und daß demnach das kleinste Massemoment in Bezug auf diesen letztern Punkt überhaupt das kleinste für das gegebene System ist.

§. 165.

Gehen wir nun wieder zu der allgemeinen Gleichung:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cos^2 \alpha + \mathfrak{B} \cos^2 \beta + \mathfrak{C} \cos^2 \gamma$$

zurück, in welcher $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Massemomente eines festen Systems in Bezug auf drei Hauptachsen für einen beliebigen, als Anfang der Coordinaten genommenen Punkt desselben vorstellen und $\mathfrak{M}$ dessen Massemoment für eine durch denselben Punkt gelegte Drehungsachse, deren Lage in Bezug auf jene Achsen durch die Winkel α, β, γ bestimmt ist, bezeichnet. Wird in diesem Ausdrucke $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, so hat man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) + \mathfrak{C} \cos^2 \gamma = \mathfrak{A} \sin^2 \gamma + \mathfrak{C} \cos^2 \gamma ;$$

das Massemoment $\mathfrak{M}$ wird demnach unabhängig von den Winkeln α und β und behält denselben Werth für alle Drehungsachsen, welche denselben Winkel γ mit der Achse des Massemomentes $\mathfrak{C}$ bilden. Man schließt daraus, daß wenn die Massemomente für zwei Hauptachsen einander gleich sind, die Massemomente für alle Drehungsachsen, welche denselben Winkel mit der dritten Hauptachse bilden, gleiche Werthe haben. Man wird sich

auch leicht überzeugen, daß in diesem Falle das durch die Gleichung (120) dargestellte Ellipsoid der Massemomente in ein Umdrehungsellipsoid übergeht, und daraus wird man weiter schließen, daß alle zur geometrischen Achse dieses Körpers senkrechte Geraden Hauptachsen sein müssen. Dasselbe folgt übrigens auch aus dem Werthe von $\mathfrak{M}$; denn da die Achse der z eine Hauptachse ist, so hat man

$$\Sigma . mxz = \mathfrak{G} = 0 \quad , \quad \Sigma . myz = \mathfrak{H} = 0 \, ,$$

der allgemeine Werth von $\mathfrak{M}$ wird demnach für unsern Fall, wo die Massemomente in Bezug auf alle Achsen, die zur Achse der z senkrecht sind, gleiche Werthe haben,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \sin^2 \gamma + \mathfrak{C} \cos^2 \gamma - 2 \mathfrak{F} \cos \alpha \cos \beta \; .$$

Für $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ muß man aber immer haben

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \, ,$$

also

$$\mathfrak{F} = \Sigma . mxy = 0 \, ,$$

und diese Bedingung zeigt in Verbindung mit den vorhergehenden:

$$\mathfrak{G} = 0 \quad , \quad \mathfrak{H} = 0 \, ,$$

daß irgend zwei zur Achse der z senkrechte Coordinatenachsen auch Hauptachsen sind.

Dieser Fall findet offenbar bei jedem homogenen Körper, welcher von einer Umdrehungsfläche begrenzt wird, für alle Punkte der geometrischen Achse oder der Geraden statt, um welche sich die erzeugende Curve drehen muß und welche für alle ihre Punkte die dritte Hauptachse vorstellt, während man leicht sieht, daß irgend zwei zu ihr und unter sich senkrechte Geraden als die beiden andern Hauptachsen genommen werden können, für welche die Massemomente gleich sind. Er findet ebenso statt für ein homogenes Prisma, dessen Querschnitt ein regelmäßiges Vieleck ist, für alle Punkte der geometrischen Achse, u. s. f.

Wird ferner in der obigen Gleichung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so hat man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = \mathfrak{A}$$

und folgert daraus, daß **wenn die Massemomente in Bezug auf drei Hauptachsen in einem Punkte dieselben Werthe haben, das Massemoment in Bezug auf jede andere Gerade, welche durch denselben Punkt geht, auch den gleichen Werth hat.**

Dies ist z. B. nicht nur bei der Kugel und dem Würfel für den Mittelpunkt der geometrischen Begrenzung und der Masse der Fall, sondern kann auch bei den vorhergenannten Umdrehungskörpern und

Prismen vorkommen und zwar für Punkte der geometrischen Achse, wo das Massemoment in Bezug auf eine zu dieser Achse senkrechte Gerade durch eine entsprechende Entfernung vom Massemittelpunkte dem Massemomente für die geometrische Achse gleich geworden ist, was natürlich voraussetzt, daß dieses letztere Massemoment größer ist, als das für jede andere durch den Schwerpunkt gezogene Gerade. Wir werden später die Lage solcher Punkte näher bestimmen.

Umgekehrt läßt sich auch wieder zeigen, daß wenn die Massemomente in Bezug auf alle Achsen desselben Punktes gleich sind, alle diese Achsen auch als Hauptachsen anzusehen sind. Denn nimmt man irgend drei in diesem Punkte sich rechtwinklig durchkreuzende Geraden als Coordinatenachsen an, so hat man für das Massemoment in Bezug auf irgend eine andere Gerade, welche mit jenen die Winkel α, β, γ einschließt, den Werth:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cos^2\alpha + \mathfrak{B} \cos^2\beta + \mathfrak{C} \cos^2\gamma - 2\mathfrak{F} \cos\alpha \cos\beta$$
$$- 2\mathfrak{G} \cos\alpha \cos\gamma - 2\mathfrak{H} \cos\beta \cos\gamma \; ,$$

und da nach der Voraussetzung alle Massemomente gleich sein sollen, so hat man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

und demnach, welches auch die Winkel α, β, γ sein mögen,

$$\mathfrak{F} \cos\alpha \cos\beta + \mathfrak{G} \cos\alpha \cos\gamma + \mathfrak{H} \cos\beta \cos\gamma = 0 \; .$$

Diese Bedingung kann aber nur erfüllt werden, wenn

$$\mathfrak{F} = \Sigma . mxy = 0 \; , \quad \mathfrak{G} = \Sigma . mxz = 0 \; , \quad \mathfrak{H} = \Sigma . myz = 0$$

ist, und diese Gleichungen sprechen aus, daß die willkürlich gewählten Coordinatenachsen Hauptachsen sind; es müssen folglich alle Geraden, welche durch denselben Anfangspunkt gehen, Hauptachsen sein.

Einfacher folgt übrigens dieser Schluß wieder aus der Betrachtung, daß das Ellipsoid der Massemomente für diesen Fall in eine Kugel übergeht, für welche jeder Durchmesser eine geometrische Achse ist.

§. 166.

Untersuchen wir ferner, für welche Punkte eines festen Systems die Hauptachsen parallel gerichtet sind.

Seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes M, für welchen die Lage oder Richtung der Hauptachsen bekannt ist in Bezug auf ein

rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang der Mittelpunkt der Masse ist und dessen Achsen zu den Hauptachsen des Punktes M parallel sind, und $x_,$, $y_,$, $z_,$ die Coordinaten eines dem System angehörenden materiellen Punktes, dessen Masse m sei. Man hat dann als Bedingungen, daß drei durch den Punkt $x_,$, $y_,$, $z_,$ gezogene und einzeln den Coordinatenachsen parallele Geraden Hauptachsen für diesen Punkt sind, indem man sich das Coordinatensystem einen Augenblick parallel mit sich selbst nach M verlegt denkt, die Gleichungen:

$$\Sigma . m(x-x_,)(y-y_,)=0 \quad , \quad \Sigma . m(x-x_,)(z-z_,)=0 ,$$
$$\Sigma . m(y-y_,)(z-z_,)=0 ;$$

man hat aber auch wieder als Bedingungen, daß der Anfang der Coordinaten der Mittelpunkt der Masse ist,

$$\Sigma . mx = 0 \quad , \quad \Sigma . my = 0 \quad , \quad \Sigma . mz = 0 ,$$

und dadurch werden die vorhergehenden Gleichungen mit gleichen Beachtungen, wie früher, und indem man wieder die Masse $\Sigma . m$ des Systems durch M ersetzt,

$$\left. \begin{array}{c} \Sigma . mxy + Mx_,y_, = 0 \quad , \quad \Sigma . mxz + Mx_,z_, = 0 , \\ \Sigma . myz + My_,z_, = 0 . \end{array} \right\} \quad (124.$$

Betrachtet man nun die Coordinaten $x_,$, $y_,$, $z_,$ als veränderliche und zieht aus den vorstehenden Gleichungen ihre Werthe, so wird man die Coordinaten aller Punkte erhalten, für welche die Hauptachsen den Coordinatenachsen, also auch einander selbst parallel sind. Diese Gleichungen geben aber für jede jener Veränderlichen im Allgemeinen nur zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, z. B. für $x_,$ die Werthe:

$$x_, = \pm \sqrt{-\frac{\Sigma . mxy . \Sigma . mxz}{\Sigma . myz}} .$$

Es gibt also im Allgemeinen nur noch einen Punkt, für welchen die Hauptachsen zu denen im Punkte M oder $x, y, z,$ parallel sind, und dieser zweite Punkt liegt so, daß seine Verbindungslinie mit dem Punkte M durch den Mittelpunkt der Masse geht und von dem letztern halbirt wird.

Solcher Punkte, deren Hauptachsen zu denen des Punktes M parallel sind, gibt es dagegen sehr viele, wenn wenigstens eine der Hauptachsen dieses Punktes zu einer Hauptachse des Schwerpunktes parallel ist. Denn diese Voraussetzung bedingt nach der vorhergehenden Annahme, daß eine der Coordinatenachsen, z. B. die der z, eine Hauptachse im Schwer-

punkte ist, während die beiden andern Coordinatenachsen noch willkürlich oder vielmehr noch zu den Hauptachsen des gegebenen Punktes parallel sind und natürlich auch noch in der Ebene der beiden andern Haupt-Achsen des Massemittelpunktes liegen; man hat darnach

$$\Sigma . m x z = 0 \quad , \quad \Sigma . m y z = 0 ,$$

und die drei Gleichungen (124) verwandeln sich in folgende:

125.) $\Sigma . m x y + M x_{,} y_{,} = 0 \quad , \quad M x_{,} z_{,} = 0 \quad , \quad M y_{,} z_{,} = 0 .$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daß $x_{,}$ und $y_{,}$ nicht Null werden können, ohne daß auch $\Sigma . m x y$ Null wird, in welchem Falle dann alle drei Coordinatenachsen Hauptachsen im Schwerpunkte wären, was noch nicht stattfinden soll. Die beiden andern Gleichungen geben demnach $z_{,} = 0$, und man schließt daraus, daß alle Punkte, welche ihre Hauptachsen einzeln unter sich und zugleich eine derselben, aber nur **eine**, zu einer Hauptachse im Schwerpunkte parallel haben, in der Ebene der beiden andern Hauptachsen des Massemittelpunktes liegen.

Die erste der vorhergehenden Gleichungen, unter die Form:

$$x_{,} y_{,} = \frac{\Sigma . m x y}{M}$$

gebracht, zeigt ferner, daß alle diese Punkte in einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Asymptoten zu den Hauptachsen des Punktes M parallel sind. Ist also die Ebene der Fig. 101 die Ebene zweier Hauptachsen OA, OB im Mittelpunkte O der Masse eines gegebenen Systems und M ein Punkt dieser Ebene, für welchen OC und OD die Richtungen seiner beiden Hauptachsen angeben, so darf man nur durch O die beiden Parallelen OX und OY zu OC und OD ziehen und nach der bekannten Eigenschaft der Hyperbel:

$$x y = a^2 ,$$

worin der Werth von a^2 durch die Lage des Punktes M, nämlich durch die Fläche des Rechtecks OpMq bestimmt wird, zwischen den Parallelen OX und OY als Asymptoten die Curven UGV und U′G′V′ construiren, um in den letztern den Ort aller Punkte zu kennen, für welche die Hauptachsen parallel zu denen des Punktes M sind.

Will man die Lage und Gestalt dieser Curven in Bezug auf die beiden Hauptachsen des Schwerpunktes, welche in derselben Ebene liegen, erhalten, so kann man die laufenden Coordinaten in Bezug auf die letztern Achsen für die Punkte des Systems mit u, v, für die gesuchten

Punkte M oder für die Hyperbel mit $u_,$, $v_,$ und den Winkel zwischen den Achsen der x und u mit ω bezeichnen; man hat dann

$$x = u \cos\omega - v \sin\omega \quad , \qquad x_, = u_, \cos\omega - v_, \sin\omega \ ,$$

$$y = v \cos\omega + u \sin\omega \quad , \qquad y_, = v_, \cos\omega + u_, \sin\omega \ ,$$

und die letzte Gleichung nimmt mit der Beachtung der Bedingungsgleichung: $\Sigma . muv = 0$ die Form an:

$$M(u_,^2 - v_,^2) + Mu_,v_, \cot 2\omega + \Sigma . m(u^2 - v^2) = 0 \ .$$

Setzt man ferner darin

$$\Sigma . m(u^2 - v^2) = \Sigma . m(u^2 + z^2) - \Sigma . m(v^2 + z^2) = \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \ ,$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Massemomente des Systems in Bezug auf die beiden Hauptachsen OA und OB vorstellen und wobei vorausgesetzt sein soll, daß $\mathfrak{A}$ größer als $\mathfrak{B}$ ist, und setzt nach einander $u_, = 0$, $v_, = 0$, so zieht man daraus entweder

$$\left.\begin{array}{l} u_, = 0 \\ v_, = \pm\sqrt{\dfrac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{M}} \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} v_, = 0 \\ u_, = \pm\sqrt{-\dfrac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}}{M}} \end{array}\right.$$

als Coordinaten der Durchschnittspunkte G und G' der Hyperbeläste mit den Achsen OA und OB, und man sieht, daß unter der obigen Voraussetzung: $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$, die letzten Werthe von $u_,$ unmöglich sind, daß diese Durchschnittspunkte also immer auf derjenigen Haupt-Achse liegen, für welche das Massemoment das kleinere ist.

Wird aber $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so löst sich die Hyperbel in zwei im Schwerpunkte sich rechtwinklig schneidende Gerade auf, von denen die eine durch den gegebenen Punkt M geht und eine Hauptachse für diesen Punkt ist, von denen folglich die zweite zur andern Hauptachse dieses Punktes in derselben Ebene parallel läuft.

Sollen ferner die Punkte bestimmt werden, welche ihre drei Haupt-Achsen zu denen des Massemittelpunktes parallel haben, so wird man sogleich diese letztern als Coordinatenachsen annehmen und erhält dadurch die Bedingungen:

$$\Sigma . mxy = 0 \quad , \qquad \Sigma . mxz = 0 \quad , \qquad \Sigma . myz = 0 \ ,$$

durch welche die Gleichungen (124) auf

$$x_,y_, = 0 \quad , \qquad x_,z_, = 0 \quad , \qquad y_,z_, = 0 \qquad (126.$$

zurückkommen. Diese letztern können aber gleichzeitig nur dadurch

befriedigt werden, daß man entweder alle drei Veränderlichen Null setzt, so daß man hat

$$x_, = 0 \quad , \quad y_, = 0 \quad , \quad z_, = 0 \; ,$$

womit der Mittelpunkt der Masse selbst gemeint ist, oder daß man je zwei derselben als Null annimmt, so daß man hat

$$\left.\begin{matrix} x_, = 0 \\ y_, = 0 \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left.\begin{matrix} x_, = 0 \\ z_, = 0 \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left.\begin{matrix} y_, = 0 \\ z_, = 0 \end{matrix}\right\} ,$$

womit die Punkte auf den drei Coordinatenachsen bezeichnet sind und woraus folgt, daß alle Punkte auf den Hauptachsen des Mittelpunktes der Masse oder auf den natürlichen Drehungs-Achsen des Systems, aber auch nur diese ihre Hauptachsen zu den letztern parallel haben.

§. 167.

Um endlich die Lage der Punkte zu finden, für welche alle Geraden Hauptachsen, oder für welche die Massemomente in Bezug auf alle hindurchgehende Geraden gleich sind, wird man schließen, daß weil alle Geraden in diesen Punkten Hauptachsen sein sollen, auch die zu den Hauptachsen im Schwerpunkte parallelen Geraden Hauptachsen sein müssen und daß deßhalb zufolge des Vorhergehenden solche Punkte nur auf einer der Hauptachsen im Mittelpunkte der Masse liegen können.

Nehmen wir demnach an, daß ein solcher Punkt in der Achse der z liege; sei $z_,$ seine Entfernung vom Anfangspunkte, dem Mittelpunkte der Masse, und bezeichnen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ wie bisher die Massemomente in Bezug auf die drei Haupt- und Coordinatenachsen der x, y und z. Die Massemomente in Bezug auf drei Gerade, die durch den gesuchten Punkt parallel zu den genannten Achsen gelegt werden, sind dann nach Lehrsatz (123)

$$\mathfrak{A} + M z_,^2 \quad , \quad \mathfrak{B} + M z_,^2 \quad , \quad \mathfrak{C} \; ,$$

und da diese alle gleich sein müssen, wenn der gesuchte Punkt die verlangte Eigenschaft besitzen soll, so hat man

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{C} - \mathfrak{A} = M z_,^2 = \mathfrak{C} - \mathfrak{B} \; ,$$

und daraus ergibt sich

127.) $$z_, = \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{M}}$$

als die gesuchte Entfernung jenes Punktes vom Anfange der Coordinaten. Dieser Ausdruck setzt als Bedingung seiner Möglichkeit voraus, daß 𝕮 > 𝕬 ist, und es kann demnach die Bedingung für das Vorhandensein von Punkten, in denen alle Gerade Hauptachsen sind, übereinstimmend mit dem, was schon in §. 165 bemerkt wurde, dahin ausgesprochen werden: Die Massemomente in Bezug auf zwei Hauptachsen im Mittelpunkte der Masse müssen gleich und kleiner sein als das für die dritte Hauptachse. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es, wie der vorhergehende Werth von z, zeigt, immer zwei solcher Punkte auf der dritten oder einzelnen Hauptachse (da in der Ebene der beiden andern offenbar alle Geraden Hauptachsen sind) und zwar in gleichen Abständen vom Schwerpunkte.

Sind alle drei Massemomente 𝕬, 𝕭 und 𝕮 einander gleich, so wird $z_{,} = 0$; der Mittelpunkt der Masse ist dann der einzige Punkt des Systems, in welchem alle Geraden Hauptachsen sind, wie es beim Würfel und der Kugel offenbar der Fall ist.

§. 168.

Das Massemoment eines stetigen Systems in Bezug auf eine als Achse der z genommene Gerade wird nach §. 160 (114 und 115) allgemein durch eines der dreifachen Integrale:

$$\mathfrak{M} = \int_{x_0}^{X} dx \, . \int_{y_0}^{Y} dy \, . \int_{z_0}^{Z} dz \, . \, q\,(x^2 + y^2)$$

oder

$$\mathfrak{M} = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega \, . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta \, . \int_{r_0}^{r} dr \, . \, q r^4 \sin^3 \vartheta$$

gefunden, und zwar durch ersteres in Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, durch letzteres in Function der Polarcoordinaten ω, ϑ, r oder der diesen Coordinaten zukommenden Grenzwerthe. Wir haben ferner gesehen, daß es genügt, die Massemomente in Bezug auf die Hauptachsen im Schwerpunkte des gegebenen Systems unmittelbar durch die vorstehenden Formeln zu bestimmen, weil mit diesen Masse-Momenten das Massemoment desselben Systems in Bezug auf jede andere Drehungsachse nach der Gleichung (123) leicht berechnet werden kann; ich werde mich deßhalb auch für die Anwendung der obigen

Ausdrücke auf die Bestimmung der genannten Massemomente beschränken und zwar für homogene oder in allen Theilen gleich dichte Körper, so daß q eine unveränderliche Größe ist.

Sei zuerst ein rechtwinkliges Parallelepiped gegeben und die Länge seiner drei Kanten durch a, b, c bezeichnet. In diesem Körper sind die Hauptachsen im Mittelpunkte offenbar zu den Kanten parallel; denn nimmt man den Mittelpunkt als Anfang der Coordinaten und zwar die Achse der x parallel zur Kante a, die der y zur b, die der z zur c, so hat man, wie leicht zu sehen ist,

$$\Sigma . mxy = q\int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx \,.\, \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} dy \,.\, \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz . xy = 0$$

$$\Sigma . mxz = q\int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx \,.\, \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} dy \,.\, \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz . xz = 0$$

$$\Sigma . myz = q\int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx \,.\, \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} dy \,.\, \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz . yz = 0$$

und schließt aus diesen Ausdrücken ferner, daß auch in jedem andern Punkte dieser Achsen drei zu den Kanten parallele Gerade Hauptachsen sind.

Für das Massemoment $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die Achse der z hat man

$$\mathfrak{C} = q\int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx \,.\, \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} dy \,.\, \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz . x^2 + q\int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} dx \,.\, \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} dy \,.\, \int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz . y^2$$

$$= \tfrac{1}{12} qabc(a^2 + b^2) \, ;$$

bezeichnet man also die Masse qabc des Parallelepipeds wieder mit M, so ergeben sich nach den Regeln der Symmetrie

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2) \, , \quad \mathfrak{B} = \tfrac{1}{12} M (a^2 + c^2) \, , \quad \mathfrak{A} = \tfrac{1}{12} M (b^2 + c^2)$$

als Werthe der Massemomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die drei natürlichen Drehungsachsen des Körpers. Wenn man $a > b$ und $b > c$ hat, so ist das erste das größte, das letzte das kleinste derselben und dieses dann auch überhaupt das kleinste Massemoment, welches ein Parallelepiped erhalten kann.

Mit den eben gefundenen Werthen erhält man für das Masse-Moment in Bezug auf eine Drehungsachse, welche mit den obigen

Haupt= oder Coordinatenachsen oder mit den Kanten des Parallelepipeds die Winkel α, β, γ bildet und um k Längeneinheiten von dem Mittelpunkte entfernt ist, den Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M [(a^2 + b^2) \cos^2 \gamma + (a^2 + c^2) \cos^2 \beta + (b^2 + c^2) \cos^2 \alpha] + Mk^2 .$$

Für eine Diagonale z. B. hat man, $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ gesetzt,

$$\cos^2 \alpha = \frac{a^2}{d^2} \;,\quad \cos^2 \beta = \frac{b^2}{d^2} \;,\quad \cos^2 \gamma = \frac{c^2}{d^2} \;,\quad k = 0 \;,$$

und damit wird

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{6} M \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2} .$$

Soll dagegen die Kante c selbst Drehungsachse sein, so ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi \;,\quad \beta = \tfrac{1}{2}\pi \;,\quad \gamma = 0 \text{ oder } = \pi \;,\quad k^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2) \;,$$

und dadurch ergibt sich einfach

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M (a^2 + b^2) \;,$$

woraus wieder ähnliche Ausdrücke für die beiden andern Kanten abgeleitet werden können.

Diese Werthe können uns nun dazu dienen, die Lage der Haupt=Achsen für den Mittelpunkt der Kante c zu bestimmen. Legen wir dazu durch diesen Punkt drei Coordinatenachsen, von denen die der z' mit dieser Kante selbst zusammenfällt, die der x' parallel zur Kante a, die der y' parallel zur Kante b ist, so haben wir als Massemomente in Bezug auf diese Achsen

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{12} M (b^2 + c^2) + \tfrac{1}{4} M b^2$$

$$= \tfrac{1}{12} M (4b^2 + c^2) \;,$$

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{12} M (a^2 + c^2) + \tfrac{1}{4} M a^2$$

$$= \tfrac{1}{12} M (4a^2 + c^2) \;,$$

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{3} M (a^2 + b^2) .$$

Ferner hat man

$$\mathfrak{F} = q\int_0^a dx.\int_0^b dy.\int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz.xy = \tfrac{1}{4}qa^2b^2c = \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}ab\ ,$$

$$\mathfrak{G} = q\int_0^a dx.\int_0^b dy.\int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz.xz = 0\ ,$$

$$\mathfrak{H} = q\int_0^a dx.\int_0^b dy.\int_{-\frac{1}{2}c}^{+\frac{1}{2}c} dz.yz = 0\ .$$

Die beiden letzten Werthe zeigen sogleich, übereinstimmend mit den Erörterungen des §. 166, daß die Kante c selbst eine Hauptachse für ihren Mittelpunkt ist. Die Gleichung (120) für das Ellipsoid der Massemomente wird dann

$$1 = \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 - 2\mathfrak{F}\xi\eta$$

und nimmt, wenn

$$\xi = \xi' \cos\omega - \eta' \sin\omega$$

$$\eta = \eta' \cos\omega + \xi' \sin\omega$$

eingeführt wird, die Form an:

$$1 = (\mathfrak{A}\cos^2\omega + \mathfrak{B}\sin^2\omega - 2\mathfrak{F}\sin\omega\cos\omega)\xi'^2$$
$$+ (\mathfrak{A}\sin^2\omega + \mathfrak{B}\cos^2\omega + 2\mathfrak{F}\sin\omega\cos\omega)\eta'^2$$
$$+ \mathfrak{C}\zeta^2 - 2[(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\sin\omega\cos\omega + \mathfrak{F}(\cos^2\omega - \sin^2\omega)]\xi'\eta'.$$

Die Bedingung, daß der Coeffizient von $\xi'\eta'$ Null werden soll, gibt daher

$$\mathfrak{F}\cos 2\omega = (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\sin 2\omega\ ,\qquad \tan 2\omega = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}$$

oder mit den obigen Werthen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}$

$$\tan 2\omega = \frac{3ab}{4(a^2-b^2)}\ .$$

Ist demnach ABCD, Fig. 102, der Hauptschnitt des Parallelepipeds durch die Mitte A der Kante c, also AB = a, AC = b, und macht man AF = $\frac{3}{4}$a, schneidet mit AB = CE die AE ab und zieht FG parallel zu CE, dann GH parallel zu AB, so ist

$$\widehat{HAB} = 2\omega \quad , \quad \widehat{XAB} = \tfrac{1}{2}\widehat{HAB} = \omega \; ;$$

denn man hat

$$AE = \sqrt{a^2 - b^2} \; ,$$

$$AE : AF = AC : AG = EH \; ,$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} : \tfrac{1}{2}a = b : \sqrt{a^2 - b^2}\, tang\, 2\omega \; .$$

Es sind demnach AX und AY die beiden andern Hauptachsen für den Punkt A.

§. 169.

Eine fernere Anwendung derselben Formel bietet das Ellipsoid mit drei ungleichen Achsen 2a, 2b, 2c, dessen Gleichung auf den Mittelpunkt und diese Achsen bezogen, die Form hat:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \; .$$

Daß diese geometrischen Achsen auch die natürlichen Drehungsachsen sind, liegt auf der Hand; man hat übrigens auch sogleich

$$\Sigma . mxy = q \int_{-a}^{+a} dx . \int_{-b\sqrt{1-x'^2}}^{+b\sqrt{1-x'^2}} dy . \int_{-c\sqrt{1-x'^2-y'^2}}^{+c\sqrt{1-x'^2-y'^2}} dz . xy$$

$$= 2qc \int_{-a}^{+a} dx . \int_{-b\sqrt{1-x'^2}}^{+b\sqrt{1-x'^2}} dy . xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = 0 \; ,$$

also auch durch Vertauschung der Achsen

$$\Sigma . mxz = 0 \quad , \quad \Sigma . myz = 0 \; .$$

Das Massemoment $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die Achse der z ist dann mit denselben Grenzen

$$\mathfrak{C} = q \int_{-a}^{+a} dx . \int_{-b\sqrt{1-x'^2}}^{+b\sqrt{1-x'^2}} dy . \int_{-c\sqrt{1-x'^2-y'^2}}^{+c\sqrt{1-x'^2-y'^2}} dz . x^2$$

$$+ q \int_{-a}^{+a} dx . \int_{-b\sqrt{1-x'^2}}^{+b\sqrt{1-x'^2}} dy . \int_{-c\sqrt{1-x'^2-y'^2}}^{+c\sqrt{1-x'^2-y'^2}} dz . y^2 \; .$$

Der erste Theil dieses Werthes, der mit $\mathfrak{C}_1$ bezeichnet werden soll, gibt zuerst, wenn man $1-\frac{x^2}{a^2}$ durch u^2 ersetzt,

$$\mathfrak{C}_1 = 2qc\int_{-a}^{+a} dx \,.\, x^2 \int_{-bu}^{+bu} dy \,.\, \sqrt{u^2-\frac{y^2}{b^2}} \,,$$

und da man, wie schon öfter abgeleitet worden,

$$\int_{-bu}^{+bu} dy \,.\, \sqrt{u^2-\frac{y^2}{b^2}} = \frac{1}{2}\pi b u^2 = \frac{1}{2}\pi b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

hat, so folgt

$$\mathfrak{C}_1 = \pi q b c\int_{-a}^{+a} dx \,.\, x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{4}{15}\pi q a^3 b c$$

$$= \frac{1}{5} M a^2 \,,$$

wo $M = \frac{4}{3}\pi abc$ die Masse des Ellipsoids vorstellt.

Auf dieselbe Weise läßt sich dann auch der zweite Theil $\mathfrak{C}_2$ des Werthes von $\mathfrak{C}$ finden; einfacher aber kommt man dazu, wenn man die Veränderlichen oder vielmehr die Ordnung in der Integration ändert; denn man hat offenbar auch

$$\mathfrak{C}_2 = q\int_{-b}^{+b} dy \,.\int_{-a\sqrt{1-y'^2}}^{+a\sqrt{1-y'^2}} dx \,.\int_{-c\sqrt{1-y'^2-x'^2}}^{+c\sqrt{1-y'^2-x'^2}} dz \,.\, y^2$$

und schließt daraus, daß nur ein Tausch zwischen b und a im ersten Theile $\mathfrak{C}_1$ vorzunehmen ist, um den zweiten zu erhalten.

Dadurch ergibt sich sogleich

$$\mathfrak{C}_2 = \tfrac{4}{15}\pi q a b^3 c = \tfrac{1}{5} M b^2$$

und

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = \tfrac{1}{5} M (a^2+b^2) \,,$$

und daraus ist wieder leicht zu schließen, daß man auch haben wird

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{5} M (b^2+c^2) \quad , \quad \mathfrak{B} = \tfrac{1}{5} M (a^2+c^2) \,.$$

In Bezug auf die durch den Endpunkt der größten Achse $2a$, parallel zur kleinsten $2c$, gezogene Tangente hat man daher

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{C} + Ma^2 = \tfrac{1}{5} M (6a^2+b^2) \,.$$

Für ein Umbrehungsellipsoid, dessen geometrische Achse die Achse $2c$ der erzeugenden Ellipse ist, wird $a = b$, und daher auch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \tfrac{1}{5} M (a^2 + c^2) ;$$

das dritte Massemoment in Bezug auf die geometrische Umdrehungsachse wird dagegen einfach

$$\mathfrak{C} = \tfrac{2}{5} M a^2$$

und ist das kleinste Massemoment für den Mittelpunkt, wie für jeden andern, wenn $a < c$.

Das Ellipsoid geht in eine Kugel über, wenn $a = b = c = r$ wird, und man hat als Massemoment für jeden Durchmesser:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{2}{5} M r^2 ,$$

woraus sofort

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + M r^2 = \tfrac{7}{5} M r^2$$

als Massemoment in Bezug auf eine Tangente folgt. Für eine hohle Kugel endlich, deren Halbmesser R und r sind, findet man, wenn in dem vorstehenden Werthe von A die Masse M durch $\tfrac{4}{3}\pi q R^3$ ersetzt wird,

$$\mathfrak{A} = \tfrac{8}{15}\pi q (R^5 - r^5)$$

und, um die Masse wieder als Factor einzuführen, in anderer Form

$$\mathfrak{A} = \frac{4}{3}\pi q (R^3 - r^3) . \frac{2}{5} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$

als Massemoment für einen beliebigen Durchmesser.

§. 170.

Aus dem in Polarcoordinaten ausgedrückten Werthe von $\mathfrak{M}$ zieht man eine einfache Formel für alle von Umdrehungsflächen begrenzte Körper, in Bezug auf die geometrische Umdrehungsachse.

Nimmt man nämlich diese Achse als Achse der z, so werden die Grenzen von ω unabhängig von den übrigen Veränderlichen und sind 0 und 2π; der Ausdruck (115) nimmt daher die Form an:

$$\mathfrak{M} = 2\pi q \int_{r_0}^{r} dr . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . r^4 \sin^3 \vartheta .$$

Es ist aber auch

$$r\cos\vartheta = z \quad , \quad -r\sin\vartheta = \frac{dz}{d\vartheta} \quad , \quad r^2\sin^2\vartheta = r_,^2 \; ,$$

$$r^2 = r_,^2 + z^2 \quad , \quad r = r_, \frac{dr_,}{dr} \; ,$$

und demnach hat man

$$\mathfrak{M} = 2\pi q \int_{r_0}^{r} dr . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . r . r^2 \sin^2\vartheta . r \sin\vartheta = 2\pi q \int_{r_0}^{r} dr . \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . r_,^3 \frac{dr_,}{dr}\left(-\frac{dz}{d\vartheta}\right) .$$

In diesen Ausdrücken stellt, wie man sieht, $r_,$ die Entfernung eines Punktes von der Drehungsachse und z dessen Abstand von der Ebene der xy vor; man kann deßhalb die $r_,$ durch x ersetzen und die Lage eines Punktes durch seinen Ort in der erzeugenden Curve zwischen den Veränderlichen x und z ausdrücken, von denen die letztere als die unabhängige genommen werden soll, so daß die Gleichung der erzeugenden Curve die Form:

$$x = f(z)$$

annimmt. Sind dann mit der Beachtung, daß die z abnehmen, wenn die ϑ wachsen, z und z_0 die Grenzwerthe von z, welche den Grenzwerthen ϑ_0 und ϑ entsprechen, so hat man für einen vollen (massiven) Umdrehungskörper

$$\mathfrak{M} = 2\pi q \int_{z_0}^{z} dz . \int_{0}^{f(z)} dx . x^3 = \frac{1}{2}\pi q \int_{z_0}^{z} dz . [f(z)]^4 .$$

Für einen hohlen dagegen, welcher von zwei Umdrehungsflächen begrenzt wird, deren Gleichungen

$$x_1 = f_1(z) \quad , \quad x_0 = f_0(z)$$

sind, findet man daraus den Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = 2\pi q \int_{z_0}^{z} dz . \int_{x_0}^{x_1} dx . x^3 = \frac{1}{2}\pi q \int_{z_0}^{z} dz . (x_1^4 - x_0^4) ,$$

in welchem man zur Abkürzung x_1 und x_0 statt $f_1(z)$ und $f_0(z)$ beibehalten hat.

§. 171.

Ist z. B. die erzeugende Linie eine Gerade, welche den Winkel γ mit der Achse der z bildet und durch die man eine Regelfläche erhält, so kann die Gleichung derselben die Form:

$$x = r + z \, tang \, \gamma$$

erhalten, und man findet damit zwischen den Grenzen h und 0 für z als Massemoment eines senkrecht zur Achse abgeschnittenen vollen Kegels in Bezug auf die mit der geometrischen Achse zusammenfallende Hauptachse

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}\pi q \int_0^h dz \, . \, (r + z \, tang \, \gamma)^4$$

$$= \frac{1}{10}\pi q \frac{(r + h \, tang \, \gamma)^5 - r^5}{tang \, \gamma} ,$$

oder wenn man nun

$$r + h \, tang \, \gamma = R \quad , \quad tang \, \gamma = \frac{R - r}{h}$$

setzt, in einfacherer Form:

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{10}\pi q h \frac{R^5 - r^5}{R - r} = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} ,$$

da, wie man weiß, die Masse M eines solchen Kegels durch

$$M = \frac{1}{3}\pi q h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}\pi q h \frac{R^3 - r^3}{R - r}$$

ausgedrückt wird.

Soll der Kegel ein spitzer sein, so wird r = 0 und

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{10}\pi q h R^4 = \tfrac{3}{10} M R^2 ;$$

für einen Cylinder dagegen hat man R = r, und wenn man den gemeinschaftlichen Factor R — r im Zähler und Nenner des obigen Werthes von $\mathfrak{C}$ entfernt und dann erst R für r setzt, so findet man

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}\pi q h R^4 = \tfrac{1}{2} M R^2 ,$$

wo dann M immer die Masse des entsprechenden Körpers vorstellt.

Vergleichen wir nach diesen Werthen die Massemomente eines Kegels, einer Kugel und eines Cylinders unter der Voraussetzung, daß die Massen und Halbmesser dieser Körper gleich sind, so verhalten sich dieselben wie 3 : 4 : 5. Haben diese Körper aber gleiche Dichte, gleiche Durchmesser und Höhen, in welchem Falle sich ihre Massen bekanntlich wie 1 : 2 : 3 verhalten, so hat man

3 : 8 : 15

als das Verhältniß ihrer Massemomente in Bezug auf ihre geometrische Achsen.

Bezeichnet man ferner den äußern und innern Halbmesser eines hohlen Cylinders mit R_1 und R_0, so hat man für die geometrische Achse das Massemoment

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}\pi q h (R_1^4 - R_0^4) = \tfrac{1}{2} M (R_1^2 + R_0^2)$$

und für den Fall, daß der Unterschied der beiden Halbmesser gegen den mittleren Halbmesser $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_0)$ sehr klein ist, kann man

$$R_1 = R + \delta \quad , \quad R_0 = R - \delta$$

setzen und δ^2 gegen R^2 vernachlässigen, wodurch sich einfach

$$\mathfrak{C} = MR^2$$

ergibt, so daß das Massemoment sehr nahe dasselbe ist, als wenn die ganze Masse in dem Endpunkte des mittleren Halbmessers vereinigt wäre.

Das Massemoment eines Cylinders in Bezug auf eine zur geometrischen Achse senkrechte Hauptachse kann nur mittels des allgemeinen Werthes von $\mathfrak{M}$ gefunden werden. Nimmt man dazu diese Haupt-Achse wieder als Achse der z, die geometrische Achse als Achse der x und den Anfangspunkt der Coordinaten in der Mitte derselben, so hat man

$$z = \pm\sqrt{r^2 - y^2} ,$$

und damit wird das Massemoment $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} = 2q\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} dx \,.\, x^2 \int_{-r}^{+} dy \,.\, \sqrt{r^2 - y^2} + 2q\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} dx \,.\, \int_{-r}^{+r} dy \,.\, y^2 \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$= \tfrac{1}{12}\pi q h r^2 (h^2 + 3r^2) = \tfrac{1}{12} M (h^2 + 3r^2) \,.$$

Für einen im Verhältniß zu seiner Länge sehr dünnen Cylinder kann man $\frac{3r^2}{h^2}$ gegen 1 vernachlässigen und findet

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{12} M h^2$$

als angenäherten Ausdruck für das betreffende Massemoment.

§. 172.

Sei noch eine halbe Ellipse als Erzeugende genommen, um das Massemoment des Umdrehungsellipsoids in Bezug auf die geometrische Umdrehungsachse unmittelbar abzuleiten. Die Gleichung dieser Curve wird die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x'^2 + z'^2 = 1$$

annehmen, und damit hat man

$$\mathfrak{C} = 2\pi q \int_{-c}^{+c} dz \,.\int_{0}^{a\sqrt{1-z'^2}} dx \,.\, x^3 = \frac{1}{2}\pi q a^4 \int_{-c}^{+c} dz \,.\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^2 ;$$

die weitere Ausführung gibt

$$\mathfrak{C} = \tfrac{8}{15}\pi q a^4 c = \tfrac{2}{5} M a^2 \,,$$

wie oben gefunden wurde.

Ist a die größere von den beiden Achsen der erzeugenden Ellipse, so ist das Massemoment $\mathfrak{C}$ größer als jedes Massemoment $\mathfrak{A} = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2)$ in Bezug auf irgend eine durch den Mittelpunkt gehende, zur Achse c senkrechte Gerade. Es sind also bei dem abgeplatteten Umdrehungs-Ellipsoid alle Bedingungen für das Vorhandensein eines Punktes, in welchem jede beliebige Gerade eine Hauptachse ist, erfüllt, und es gibt, wie oben gezeigt wurde, zwei solche Punkte auf der kleinen Achse c. Die Entfernung z dieser Punkte vom Mittelpunkte wird nach (127) durch den Werth:

$$z = \pm\sqrt{\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{M}} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}(a^2 - c^2)}$$

ausgedrückt, welchem man auch die Form:

$$z = \frac{1}{5} a e \sqrt{5} = 0{,}4472 \,.\,.\, a e$$

geben kann, wenn man die absolute Excentricität $\sqrt{a^2 - c^2}$ durch die relative e ersetzt.

§. 173.

Zuletzt soll noch das Massemoment eines von Kugelflächen begrenzten linsenförmigen Körpers, wie ihn Fig. 103 im Durchschnitte zeigt und wie man sie gewöhnlich als Pendel an den Uhren anwendet, und zwar einmal in Bezug auf die geometrische Umdrehungsachse DE und dann in Bezug auf einen Durchmesser AB des größten Kreises abgeleitet und dasselbe für gegebene Zahlenwerthe berechnet werden.

Nimmt man zuerst wieder die geometrische Achse als Achse der z, so ist die Gleichung des Kreisbogens AEB, dessen Mittelpunkt in O und dessen Halbmesser R sei, wenn man CE = CD = h setzt,

$$x^2 = h(2R - h) - 2(R - h)z - z^2 ,$$

oder da man auch hat

$$\overline{AC}^2 = r^2 = h(2R - h) \quad , \quad R = \frac{r^2 + h^2}{2h} \quad , \quad R - h = \frac{r^2 - h^2}{2h} ,$$

mit den unmittelbar Gegebenen r und h

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2 - h^2}{h} z - z^2 .$$

Für das Massemoment $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die Achse der z findet man damit und mit der Beachtung, daß die Grenzen von z nicht h und — h, sondern nur h und 0 sein können und daß das Integral zwischen diesen Grenzen mit 2 multiplicirt werden muß,

$$\mathfrak{C} = \pi q \int_0^h dz . \left(r^2 - \frac{r^2 - h^2}{h} z - z^2\right)^2 ,$$

woraus sich durch weitere Entwickelung und Integration der Werth:

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{30} \pi q h (10r^4 + 5r^2h^2 + h^4)$$

ergibt, welchem man auch die Form:

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{10} M \frac{10r^4 + 5r^2h^2 + h^4}{3r^2 + h^2}$$

geben kann, da man als Masse des ganzen Körpers

$$M = \tfrac{1}{3} \pi q h (3r^2 + h^2)$$

erhält.

Soll nun der Durchmesser AB Drehungsachse sein, so wird man, um die allgemeine Formel (113) anwenden zu können, die Gleichung der begrenzenden Fläche unter die Form bringen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - \frac{r^2 - h^2}{h} x = r^2 - h' x$$

und erhält dadurch

$$\mathfrak{C}_1 = 2q\int_0^h dx . \int_{-\sqrt{r^2-h'x-x^2}}^{+\sqrt{r^2-h'x-x^2}} dy . \int_{-\sqrt{r^2-h'x-x^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-h'x-x^2-y^2}} dz . x^2$$

$$+ 2q\int_0^h dx . \int_{-\sqrt{r^2-h'x-x^2}}^{+\sqrt{r^2-h'x-x^2}} dy . \int_{-\sqrt{r^2-h'x-x^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-h'x-x^2-y^2}} dz . y^2 ,$$

oder wenn man $\sqrt{r^2 - h'x - x^2}$ durch $r_,$ ersetzt und die Integration in Bezug auf z ausführt,

$$\mathfrak{C}_1 = 4q\int_0^h dx . x^2 \int_{-r_,}^{+r_,} dy . \sqrt{r_,^2 - y^2} + 4q\int_0^h dx . \int_{-r_,}^{+r_,} dy . y^2 \sqrt{r_,^2 - y^2} .$$

Nach früher vorgekommenen ähnlichen Ausdrücken hat man aber

$$\int_{-r_,}^{+r_,} dy . \sqrt{r_,^2 - y^2} = \frac{1}{2}\pi r_,^2 \quad , \quad \int_{-r_,}^{+r_,} dy . y^2 \sqrt{r_,^2 - y^2} = \frac{1}{8}\pi r_,^4$$

und bringt dadurch den Werth von $\mathfrak{C}_1$ auf die Form:

$$\mathfrak{C}_1 = 2\pi q\int_0^h dx . x^2 (r^2 - h'x - x^2) + \frac{1}{2}\pi q\int_0^h dx . (r^2 - h'x - x^2)^2 ,$$

worin das zweite Glied offenbar bis auf den Coeffizienten $\frac{1}{4}$ mit dem Werthe in Bezug auf die Achse DE übereinstimmt und demnach

$$\tfrac{1}{60}\pi q h (10r^4 + 5r^2h^2 + h^4)$$

gibt. Der erste Theil dagegen wird nach einigen Reductionen,

$$\tfrac{1}{30}\pi q h (5r^2h^2 + 3h^4) ,$$

und man erhält damit als Werth des ganzen Massemomentes,

$$\mathfrak{C}_1 = \tfrac{1}{60}\pi q h (10r^4 + 15r^2h^2 + 7h^4)$$

oder mit dem früheren Ausdrucke für die Masse M des Körpers

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{1}{20} M \frac{10r^4 + 15r^2h^2 + 7h^4}{3r^2 + h^2} .$$

Man sieht leicht, daß dieser Werth viel kleiner ist, als der vorher in Bezug auf die Achse DE gefundene.

§. 174.

Was nun die Berechnung der Massemomente betrifft, so hat man dabei hauptsächlich auf die verschiedenen Einheiten zu achten, von welchen die Einheit der Massemomente abhängt. Für diese letztere Einheit haben wir das Meterkilogramm angenommen, und es ist deßhalb am einfachsten, die Masse in das Gewicht zu verwandeln, oder was auf daßselbe hinauskommt, statt der Dichte das spezifische Gewicht einzuführen, so daß der Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = Mr^2 \text{ in } P\frac{r^2}{g}$$

übergeht, worin nun P in Kilogramm und die Länge r sowie die Beschleunigung g in Metern auszudrücken sind.

Will man dagegen nicht erst die Masse oder das Gewicht, sondern unmittelbar den durch die Längenausdehnungen ausgedrückten Werth von $\mathfrak{M}$, z. B. den Ausdruck:

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2}\pi q h r^4 = \frac{1}{2}\pi p \frac{h}{g} r^2$$

berechnen, so kann man entweder alles in Meter ausdrücken und für p das 1000 fache spezifische Gewicht nehmen, oder man kann drei von den auf die Längeneinheit bezogenen Factoren in Decimeter und die beiden andern, sowie die Beschleunigung g in Meter nehmen oder endlich alle diese Größen in Decimeter berechnen, wodurch man Decimeterkilogramm erhält, und das erhaltene Ergebniß durch 10 dividiren.

Bei kleinen Körpern werden indessen die Zahlenwerthe, welche die Massemomente ausdrücken, sehr klein, wenn sie auf die obengenannte Einheit, das Meterkilogramm, bezogen werden; man kann dann die Massemomente und die drehenden Kräfte durch Centimetergramm ausdrücken, und dazu genügt es für die Berechnung, alle Längen in Centimeter zu nehmen, da das spezifische Gewicht eines Stoffes zugleich das absolute Gewicht von einem Kubikcentimeter desselben, in Gramm ausgedrückt, angibt. Zur Vergleichung hat man dann

$$1^{\text{Mkgr}} = 10^{\text{Dmkgr}} = 100000^{\text{Cmgr}} .$$

Nach diesen Bemerkungen findet man also für eine Linse von Blei, deren Durchmesser $2r = 25^{\text{cm}}$ und deren Dicke $2h = 6^{\text{cm}}$ beträgt, wenn das spezifische Gewicht p gleich 11,35 angenommen wird, das

Massemoment in Bezug auf die geometrische Achse in Decimeterkilogramm ausgedrückt:

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{30}\pi.11,35\,\frac{0,3(10.1,25^4 + 5.1,25^2.0,3^2 + 0,3^4)}{98,09}$$

$$= 0\overset{\text{Dmkgr}}{,}091336\,.$$

Auf die ursprüngliche Einheit bezogen ist also $\mathfrak{C} = 0\overset{\text{Mkgr}}{,}0091336$ und in Centimetergramm gemessen $\mathfrak{C} = 913\overset{\text{Cmgr}}{,}36$.

In Bezug auf den Durchmesser AB findet man ebenso das Massemoment $\mathfrak{A}$ in Centimetergramm:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{60}\pi.11,35.3\,\frac{10.12,5^4 + 15.12,5^2.3^2 + 7.3^4}{980,9}$$

$$= 488\overset{\text{Cmgr}}{,}58\,,$$

also auch $\mathfrak{A} = 0\overset{\text{Mkgr}}{,}0048858$. Dieses Massemoment ist demnach nur wenig mehr als halb so groß als das vorhergehende.

Es gibt übrigens für unsern linsenförmigen Körper, wie beim Umdrehungsellipsoid, auf der Achse DE zwei Punkte, in welchen jede Gerade eine Hauptachse ist. Ihre Lage wird nach der Gleichung (127):

$$z = \pm\sqrt{\frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{M}}$$

und mit den im vorhergehenden §. gefundenen allgemeinen Werthen von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{C}_1$ durch den Ausdruck:

$$z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r^4 - r^2h^2 - h^4}{3r^2 + h^2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2r^2 + h^2)(r^2 - h^2)}{3r^2 + h^2}}$$

bestimmt, welcher für sehr kleine Werthe von h im Vergleich zu denen von r sehr nahe auf

$$z = \pm\frac{1}{6}r\sqrt{6}$$

zurückkommt. Mit den Zahlenwerthen $r = 12\overset{\text{cm}}{,}5$, $h = 3^{\text{cm}}$ findet man mit hinreichender Genauigkeit

$$z = \pm\,4\overset{\text{cm}}{,}983\,.$$

Diese Punkte liegen demnach in unserm Falle außerhalb des Körpers.

§. 175.

Die einfachste drehende Bewegung wird statthaben, wenn sich alle Kräfte, welche an dem System thätig sind, in jedem Augenblicke das Gleichgewicht halten, also wenn sowohl die Resultirende R der fördernden Kräfte, als das resultirende Moment M_R für irgend einen Punkt der festen Drehungsachse Null ist; denn die allgemeine Gleichung (113) gibt für diesen Fall

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad , \qquad \varphi = \varphi_0 \; ;$$

die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung ist also unveränderlich und diese Bewegung selbst demnach eine gleichförmige.

Man sieht aber aus derselben Gleichung, daß dieses noch stattfinden muß, wenn auch die fördernde Resultirende nicht Null ist, und selbst wenn die beiden Componenten M_X und M_Y der drehenden Resultirenden M_R — die Drehungsachse immer als Achse der z vorausgesetzt — oder allgemein, wenn die beiden drehenden Componenten, deren Achsen zur Drehungsachse senkrecht sind, beliebige Werthe haben; denn die einzige Bedingung für die gleichförmige Bewegung ist, daß das Moment:

$$\Sigma . M_Z = \Sigma . (Yx - Xy) = \Sigma . P(x \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px})$$

Null ist und bleibt, wobei jedoch vorausgesetzt ist, daß durch den von jenen Kräften und von der Bewegung selbst erzeugten Druck auf die Achse keine Widerstände, also namentlich keine Reibung hervorgerufen wird, und daß auch die den Körper umgebenden Flüssigkeiten keinen Widerstand verursachen.

Der Druck, welchen die Drehungsachse bei dieser Bewegung zu erleiden hat, besteht dann aus den fördernden Componenten:

$$\Sigma Z \quad , \qquad \Sigma X + \varphi_0{}^2 \Sigma . mx \quad , \qquad \Sigma Y + \varphi_0{}^2 \Sigma . my$$

und aus den drehenden Wirkungen:

$$\Sigma . M_Y + \varphi_0{}^2 \Sigma . mxz \quad , \qquad \Sigma . M_X + \varphi_0{}^2 \Sigma . myz$$

und wird für eine natürliche Drehungsachse oder eine Hauptachse im Schwerpunkte von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig.

So wird sich ein schwerer Körper um jede in ihrer Lage festgehaltene Gerade, welche durch seinen Schwerpunkt geht, gleichförmig bewegen, wenn keine Reibung stattfindet, weil in diesem Falle die Summe der drehenden Kräfte für jede Achse Null wird. Ist diese Achse zugleich eine Hauptachse, so reduzirt sich der Druck, welcher auf

dieselbe ausgeübt wird, auf das Gewicht des Körpers und kann in einen senkrecht und in einen parallel zur Achse gerichteten Druck zerlegt werden. Hat daher die Drehungsachse eine wagrechte, zur Richtung der Schwere senkrechte Lage, so wird der letztere Druck Null und der erstere allein dem Gewichte des gegebenen Körpers gleich.

Unter dieser letztern Voraussetzung kann die Bewegung auch mit Berücksichtigung der Reibung einfach untersucht und ausgedrückt werden, weil dieser Widerstand wie der Druck während der Bewegung unverändert bleibt. Findet die Reibung z. B. an einem Kreisumfange (Zapfen) statt, dessen Halbmesser r ist, so wird ihre drehende Wirkung nach §. 133 durch

$$rQ \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = rQ \sin \varrho$$

ausgedrückt, wenn Q das Gewicht des gegebenen Körpers, f der Reibungscoeffizient zwischen dem betreffenden Kreisumfange und der Unterlage, auf welche jener sich stützt, und ϱ der Reibungswinkel ist, für den man hat

$$\tang \varrho = f .$$

Die Gleichung der Bewegung wird demnach

$$\Sigma . mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = - Qr \sin \varrho ,$$

also die Bewegung selbst eine gleichförmig verzögerte. Man zieht aus dieser Gleichung am Ende der Zeit t die Winkelgeschwindigkeit:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{Qr \sin \varrho}{\mathfrak{M}} t ,$$

und für die Zeit, während welcher die Bewegung noch dauert, oder nach welcher die Winkelgeschwindigkeit Null geworden ist, findet man

$$T = \frac{\varphi_0 \mathfrak{M}}{Qr \sin \varrho} .$$

Die Bewegung dauert demnach bei gleicher anfänglicher Winkelgeschwindigkeit und bei gleichem Verhältnisse zwischen Druck und Reibung um so länger, je größer das Massemoment des Körpers im Verhältniß zu seinem Gewichte und je kleiner der Halbmesser des sich reibenden Kreisumfanges (je dünner der Zapfen) ist.

§. 176.

Im Allgemeinen liegt es auf der Hand, daß die drehende Bewegung immer eine gleichförmig veränderte sein wird, sobald die drehende Kraft M_Z von der Bewegung selbst unabhängig ist, da in allen diesen Fällen die allgemeine Gleichung:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_Z}{\mathfrak{M}}$$

auf die Bewegungsgesetze:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_Z}{\mathfrak{M}} t \quad , \qquad \omega - \omega_0 = \varphi_0 t + \frac{1}{2} \frac{M_Z}{\mathfrak{M}} t^2$$

führt, in welchen ω den von einem bestimmten Halbmesser in der Zeit t beschriebenen Winkel, ω_0 und φ_0 die anfänglichen Werthe von ω und φ vorstellen, und welche, wie man sieht, ganz mit den Gesetzen für die geradlinige gleichförmig veränderte Bewegung übereinstimmen. In der zweiten dieser Gleichungen kann man auch

$$\omega = 2n\pi$$

setzen, indem man durch n irgend eine ganze oder gebrochene Zahl ausdrückt, und zieht dann daraus den Werth:

$$n = \frac{1}{2\pi}\left(\omega_0 + \varphi_0 t + \frac{1}{2} \frac{M_Z}{\mathfrak{M}} t^2\right)$$

für die Anzahl der Umdrehungen, welche in der Zeit t gemacht werden.

Führt man z. B. den Werth von T aus dem vorigen §. in diesen Ausdruck ein, so ergibt sich mit der Beachtung, daß

$$M_Z = - Q r \sin\varrho$$

ist, die Anzahl der Umdrehungen, welche der Körper noch macht, bis er zur Ruhe kommt,

$$n = \frac{\varphi_0^2}{4\pi} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{Q r \sin\varrho} ,$$

und dieser Werth nimmt insbesondere für einen Schwungring, dessen Dicke $R_1 - R_0$ ziemlich klein ist gegen den mittleren Halbmesser $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_0)$ und für den wir in Bezug auf die geometrische Achse das Massemoment sehr nahe gleich

$$M R^2 = Q \frac{R^2}{g}$$

gefunden haben, die Form an:

$$n = \frac{\varphi_0^2}{4\pi} \cdot \frac{R^2}{g r \sin \varrho}.$$

§. 177.

Eine gleichförmig beschleunigte drehende Bewegung wird man auch erhalten, wenn an der cylindrischen Welle eines Schwungrades ein Gewicht P mittels eines unausdehnbaren Fadens (Seiles), welcher in vielen Umgängen um die Welle gelegt ist, befestigt wird und dann lothrecht oder auf einer geneigten Ebene hinabfällt und zwar mit oder ohne Berücksichtigung der Reibung. Ein solches System ist zwar strenge genommen ein veränderliches und die Bewegungen seiner verschiedenen Theile sind ungleichartige, da das Schwungrad und seine Welle eine drehende Bewegung besitzt, während das Gewicht P eine fortschreitende Bewegung hat; man kann sich aber auch die Masse dieses Gewichtes in jedem Augenblicke in den Endpunkten eines Durchmessers der Welle in zwei gleichen Theilen vereinigt und befestigt und die von dem Gewichte herrührende bewegende Kraft an dem Umfange der Welt tangential angreifend vorstellen und dann blos die drehende Bewegung des Schwungrades und der Welle in's Auge fassen, so daß man es nur mit diesem festen System zu thun hat.

Sei also $M = \frac{P}{g}$ die Masse des bewegenden Gewichtes, Q das Gewicht des Schwungrades und der Welle, R der mittlere Halbmesser des Schwungringes, r_1 der Halbmesser der Welle, deren Massemoment wir vernachlässigen oder in dem Massemoment $M_1 R^2$ des Schwungringes eingerechnet annehmen, und r_2 der Halbmesser der beiden gleichdicken Zapfen, auf welchen das Rad sich dreht; ferner sei α der Winkel, welchen die Normale zu der geneigten Ebene, auf der das Gewicht P hinabgleitet, mit der Richtung der Schwere bildet, f der Reibungs-Coeffizient, ϱ der Reibungswinkel für die Zapfen, f' die entsprechende Erfahrungsgröße für die geneigte Ebene. Die von dem Gewichte P herrührende bewegende Kraft F ist dann, wie in §. 152

$$F = P(\sin \alpha - f' \cos \alpha)$$

und demnach der Druck N auf die Achse

$$N = \sqrt{Q^2 + P^2 (\sin \alpha - f' \cos \alpha)^2 + 2PQ \cos \alpha (\sin \alpha - f' \cos \alpha)}.$$

Behalten wir statt dieses Ausdrucks die Bezeichnung N und ebenso statt des vorhergehenden die Bezeichnung F bei und beachten, daß die drehende Wirkung der Kraft F durch $F r_1$, die der Reibung $N \sin \varrho$ an den Zapfen durch $N r_2 \sin \varrho$ gemessen wird, so findet man als Aenderungsgesetz der Winkelgeschwindigkeit einfach

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{F r_1 - N r_2 \sin \varrho}{M r_1^2 + M_1 R^2}$$

und zieht daraus unter der Voraussetzung, daß die beschleunigte Bewegung von der Ruhe aus begonnen hat, also $\varphi_0 = 0$ ist, für die Winkelgeschwindigkeit φ des Systems am Ende der Zeit t

$$\varphi = \frac{F r_1 - N r_2 \sin \varrho}{M_1 R^2 + M r_1^2} t = \frac{g(F r_1 - N r_2 \sin \varrho)}{Q R^2 + P r_1^2} t .$$

Die fördernde Geschwindigkeit v eines Punktes auf dem Umfange der Welle, also auch die des Gewichtes P ist demnach

$$v = r_1 \varphi = \frac{F r_1^2 - N r_1 r_2 \sin \varrho}{P r_1^2 + Q R^2} g t .$$

Man hat ferner

$$\omega = \frac{g(F r_1 - N r_2 \sin \varrho)}{Q R^2 + P r_1^2} \cdot \frac{1}{2} t^2 ,$$

woraus für den von einem Punkte des Umfanges der Welle oder von dem Gewichte P zurückgelegten Weg h der Werth:

$$h = r_1 \omega = \frac{F r_1^2 - N r_1 r_2 \sin \varrho}{Q R^2 + P r_1^2} \cdot \frac{1}{2} g t^2$$

folgt. Die fortschreitende Bewegung des Gewichtes P ist also in der That eine gleichförmig veränderte und die Beschleunigung c derselben ist

$$c = \frac{F r_1^2 - N r_1 r_2 \sin \varrho}{Q R^2 + P r_1^2} g .$$

Wenn das Gewicht P lothrecht hinabsinkt, so hat man $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ und dann einfacher

$$F = P \quad , \qquad N = P + Q ,$$

wodurch der vorhergehende Werth der Beschleunigung c die Form erhält:

$$c = \frac{P r_1^2 - (P + Q) r_1 r_2 \sin \varrho}{P r_1^2 + Q R^2} g$$

und zeigt, daß die Verminderung der Beschleunigung g hauptsächlich von dem Verhältnisse des Massemomentes des Schwungrades zu dem

des Gewichtes P (dessen Masse mit der Welle fest verbunden gedacht) und von dem Verhältnisse der Halbmesser r_1 und r_2 der Welle und der Zapfen abhängt.

§. 178.

Einen ganz ähnlichen Fall bietet der bekannte Versuch mit der Atwood'schen Fallmaschine. Derselbe besteht nämlich darin, daß zwei gleiche Gewichte P an einem Faden, der über eine leicht bewegliche, möglichst wenig Reibungswiderstand besitzende Rolle geschlagen ist, aufgehängt werden und dann dem einen derselben noch ein kleines Gewicht p beigefügt wird, welches eine gleichförmig-, aber sehr wenig-beschleunigte Bewegung erzeugt und gleichsam in einem verjüngten Geschwindigkeitsmaaße die Gesetze des freien Falles wahrnehmbar macht, da der Luftwiderstand wegen der geringen Geschwindigkeit vernachlässigt werden kann. Die genauere Vergleichung der Beschleunigung des freien Falles mit der durch diesen Apparat gefundenen kann indessen nur mit Berücksichtigung des Massemomentes und des Reibungsmomentes der Rolle auf folgende Weise durchgeführt werden.

Denkt man sich nämlich wieder die Massen M und m der Gewichte P und p an dem Umfange der Rolle so vertheilt, daß der Mittelpunkt der Masse in der geometrischen Achse der Rolle bleibt, und bezeichnet den Halbmesser der Rinne auf der Rolle, in welcher der Faden liegt, mit R, den Halbmesser ihrer Zapfen mit r, ihr Gewicht mit P_1 und ihr Massemoment mit $M_1 k^2$, so findet man mit der Beachtung, daß die drehenden Wirkungen der gleichen Kräfte P sich gegenseitig aufheben, daß also nur das Moment pR des kleinen Gewichtes p und das Moment $(2P + p + P_1) r \sin \varrho$ der Reibung wirksam sind, für die fördernde Beschleunigung c der lothrechten Bewegung der Gewichte P den Ausdruck:

$$c = g \frac{pR^2 - (2P + p + P_1) R r \sin \varrho}{(2P + p) R^2 + P_1 k^2},$$

und daraus kann der Werth der Beschleunigung g des freien Falles:

$$g = c \frac{(2P + p) R^2 + P_1 k^2}{pR^2 - (2P + p + P_1) R r \sin \varrho}$$

gezogen werden, wenn alles Uebrige durch Versuche oder Berechnung und Messung bekannt ist. Das Moment der Reibung könnte dadurch gefunden werden, daß man das Gewichtchen p nur so groß nähme, bis eine schwache durch die Hand ertheilte Bewegung auf die ganze Höhe

der Maschine nahezu gleichförmig bleibt; wenn dann $c = 0$, und wenn p_0 diese Zulage bezeichnet, so hat man

$$(2P + P_1 + p_0) r \sin \varrho = p_0 R$$

und daraus mit hinreichender Genauigkeit, indem man p_0 neben $2P + P_1$ vernachlässigt,

$$r \sin \varrho = \frac{p_0 R}{2P + P_1}.$$

Das Massemoment $\frac{P_1}{g} k^2$ der Rolle würde man nach diesem durch zwei Versuche ermitteln, bei welchen man auch die Gewichte P ziemlich klein annimmt, damit das Massemoment $\frac{2P + p}{g} R^2$ der letztern von dem der Rolle überwogen wird, jedesmal das gleiche Gewichtchen p zulegt und die Zeiten t_1 und t_2 beobachtet, in welchen dasselbe durch die bekannte Höhe h herabfällt. Man hätte dadurch die Beschleunigungen c_1 und c_2 der erzeugten Bewegungen durch die Gleichung:

$$c' = \frac{2h}{t^2},$$

und es könnte damit die Beschleunigung g aus den beiden Gleichungen, welche sich durch Einführung dieser Werthe in obigen Werth von g ergeben, eliminirt werden. Hätte man z. B. bei dem zweiten Versuche die Gewichte P doppelt so groß genommen, als bei dem ersten, so würde die Gleichung:

$$c_1 \frac{(2P + p) R^2 + P_1 k^2}{pR^2 - (2P + p + P_1) R r \sin \varrho} = c_2 \frac{(4P + p) R^2 + P_1 k^2}{pR^2 - (4P + p + P_1) R r \sin \varrho}$$

den Werth von k^2 geben, durch welchen das Massemoment der Rolle bestimmt wird. Noch einfacher und sicherer wird man aber bei diesen beiden Versuchen verfahren, wenn man die Zulagen p so lange vermehrt oder vermindert, bis die Fallzeiten t_1 und t_2 sich in ganzen Zeiteinheiten, Secunden, ergeben, und das Einfachste wird sein, diese Fallzeiten gleich zu nehmen, da dadurch auch $c_1 = c_2$ wird. Sind dann p_1 und p_2 die Zulagen, P und 2P die Gewichte, so hat man nach einigen Reductionen

$$P_1 k^2 \left[(p_2 - p_1) \left(1 - \frac{r \sin \varrho}{R} \right) - 2P \frac{r \sin \varrho}{R} \right] = 2PR^2 (2p_1 - p_2)$$
$$- P_1 R^2 \frac{r \sin \varrho}{R} (2P + p_2 - p_1)$$

und daraus, wenn man in dem ersten Gliede $\frac{r \sin \varrho}{R}$ neben 1 und auf der rechten Seite $p_2 - p_1$ neben $2P$ vernachlässigt,

$$P_1 k^2 = 2PR^2 \frac{2p_1 - p_2 - P_1 \frac{r \sin \varrho}{R}}{p_2 - p_1 - 2P \frac{r \sin \varrho}{R}}.$$

Das sicherste Verfahren wird übrigens darin bestehen, daß man durch eine größere Anzahl von Versuchen, bei welchen man bald die Gewichte P, bald die Zulage p abändert, die letztere aber immer so bemißt, daß die beobachteten Fallzeiten sich in ganzen Secunden ergeben, aus dem obigen Werthe von g mittels der Methode der kleinsten Quadrate gleichzeitig sowohl das Reibungsmoment oder den unveränderlichen Factor $r \sin \varrho$, als auch das Massemoment der Rolle und die Beschleunigung g des freien Falles bestimmt, ein Verfahren, welches jedenfalls der Beachtung werth sein dürfte, wenn auch das dadurch erzielte Ergebniß nicht mit denen der Pendelversuche verglichen werden kann.

§. 179.

Betrachten wir nun die Bewegung eines schweren Körpers um eine Achse, welche nicht durch seinen Schwerpunkt geht, indem wir dabei vorerst von jedem Widerstande Umgang nehmen.

Durch den Schwerpunkt des Körpers lege man zwei Ebenen, von denen die eine senkrecht ist zur Drehungsachse und die zweite diese Achse selbst enthält; sei die Ebene der Fig. 104 die erste von diesen beiden Ebenen, O der Schwerpunkt des gegebenen Körpers, A der Durchschnittspunkt der Drehungsachse mit jener Ebene und $l = AO$ der senkrechte Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse. Durch die letztere lege man ferner eine dritte, lothrechte Ebene, welche die Ebene der Figur längs einer zur Achse senkrechten Geraden AC durchschneidet, und nehme diese Gerade als Achse der z, die Drehungsachse selbst als Achse der y und eine zu den beiden vorhergehenden senkrechte Gerade AB in der Ebene der Figur als Achse der x. Sei endlich ϑ der Winkel, welchen die Gerade AO, d. i. die Durchschnittslinie der beiden ersten Ebenen am Ende der Zeit t mit der Geraden AC oder mit der Achse der z bildet, α der anfängliche Werth von ϑ und γ der kleinste Winkel zwischen der Achse AC und der Richtung der Schwere, P das Gewicht des gegebenen Körpers, Mk^2 sein Massemoment in Bezug auf eine

durch den Schwerpunkt O gelegte, zur Drehungsachse parallele Gerade und demnach sein Massemoment $\mathfrak{M}$ in Bezug auf die Drehungsachse selbst

$$\mathfrak{M} = Mk^2 + Ml^2 = M(k^2 + l^2) .$$

Das bewegende Moment M_Y der in O angreifenden Kraft P, deren Richtung mit der Achse der z den Winkel γ, mit der Achse der x den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ bildet, wird durch

$$M_Y = - PX \cos\gamma = - Pl \cos\gamma \sin\vartheta$$

ausgedrückt, und das Aenderungsgesetz der Bewegung wird damit

$$M(k^2 + l^2)\frac{d\varphi}{dt} = - Pl \cos\gamma \sin\vartheta ,$$

oder wenn auf der linken Seite mit φ, auf der rechten mit $\frac{d\vartheta}{dt}$ multiplicirt und Mg für P gesetzt wird,

$$(k^2 + l^2)\frac{d.\varphi^2}{dt} = - 2gl \cos\gamma \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} .$$

Die Integration zieht daraus zuerst den Ausdruck:

$$\varphi^2 - \varphi_0^2 = \frac{2gl \cos\gamma}{k^2 + l^2}(\cos\vartheta - \cos\alpha)$$

für die Winkelgeschwindigkeit der Bewegung, und dieser gibt das Aenderungsgesetz:

$$-\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 + \frac{2gl \cos\gamma}{k^2 + l^2}(\cos\vartheta - \cos\alpha)}} ,$$

worin vorausgesetzt ist, daß ϑ am Anfang der Bewegung kleiner wird und woraus für die Zeit t der Werth:

$$t = \int_\alpha^\vartheta d\vartheta . \frac{-1}{\sqrt{\varphi_0^2 + \frac{2gl \cos\gamma}{k^2 + l^2}(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}$$

folgt. Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit denjenigen, welche in den §§. 101 und 102 des vorhergehenden Buches für die Bewegung des einfachen oder mathematischen Pendels abgeleitet wurden, zeigt, daß

die drehende Bewegung eines schweren Körpers um eine feste Achse der Pendelbewegung sehr ähnlich ist; insbesondere findet man für die Bewegung eines festen Systems um eine horizontale Achse, für welche der Winkel γ Null wird, und wenn man keine anfängliche Geschwindigkeit voraussetzt,

$$t = \int_{\vartheta}^{\alpha} d\vartheta \, . \, \frac{1}{\sqrt{\frac{2gl}{k^2+l^2}(\cos\vartheta - \cos\alpha)}}$$

und schließt daraus, daß in diesem Falle die Bewegung ganz dieselbe ist in Betreff ihrer Winkelgeschwindigkeit und der Dauer, wie die Bewegung eines einfachen Pendels von der Länge $l_{,}$, für welche man hat

$$l_{,} = \frac{l^2+k^2}{l} = \frac{M(l^2+k^2)}{Ml},$$

so daß die Dauer T einer sehr kleinen Schwingung durch

$$T = \pi\sqrt{\frac{l_{,}}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l^2+k^2}{lg}}$$

ausgedrückt wird.

Man kann demnach in jedem festen Körper, der um eine feste Achse schwingt, immer einen Punkt bestimmen, in welchem die ganze Masse desselben vereinigt gedacht werden kann, und welcher, wenn er allein als einzelner materieller Punkt mit der Achse verbunden wäre, in jedem Augenblicke dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzen und in derselben Zeit eine Schwingung machen würde, wie der gegebene Körper. Solcher Punkte gibt es natürlich beliebig viele, da ihre Lage nur durch die Entfernung $l_{,}$ von der Drehungsachse bedingt wird. Gewöhnlich nimmt man jedoch den Punkt S, Fig. 104, welcher auf der Durchschnittslinie AS der beiden durch den Schwerpunkt gelegten Ebenen um die Länge $l_{,}$ von A entfernt liegt, als jenen Punkt an und nennt ihn Mittelpunkt der Schwingung oder Schwingungsmittelpunkt. Der obige Werth von $l_{,}$ zeigt unter der Form:

$$l_{,} = l + \frac{k^2}{l},$$

daß derselbe immer weiter von der Achse A entfernt liegt, als der Schwerpunkt O, daß aber dieser Unterschied in der Entfernung um so

kleiner ist, je kleiner das Massenmoment Mk^2 des Körpers in Bezug auf die durch O gezogene, zur Drehungsachse parallele Gerade ist.

Man sieht ferner aus diesem Ausdrucke, daß die Länge $l_,$ des gleichschwingenden einfachen Pendels, also auch die Schwingungsdauer einen kleinsten Werth erhalten kann, wenn sich die Entfernung l des Schwerpunktes von der Drehungsachse ändert, da $l_,$ sowohl für $l = 0$, wie für $l = \infty$ einen unendlich großen Werth erhält. Dieser kleinste Werth entspricht offenbar der Entfernung

$$l = k ,$$

wie man sich leicht auf dem gewöhnlichen Wege für die Bestimmung kleinster Werthe und auch dadurch überzeugen kann, daß $l_,$ sowohl für $l = k + \delta$, als für $l = k - \delta$ den Werth:

$$l_, = 2k + \frac{\delta^2}{k}$$

annimmt, wenn δ sehr klein vorausgesetzt wird, daß er also immer größer ist, als der Werth

$$l_, = 2k ,$$

welcher für $l = k$ gefunden wird. So sieht man eine gleicharmige Wage um so langsamer schwingen, je näher ihr Schwerpunkt der mittleren Schneide zu liegen kommt; namentlich wird dies durch das Auflegen größerer Gewichte bewirkt, wenn die drei Schneiden in gerader Linie liegen, da durch diese gleichzeitig k^2 vergrößert und l vermindert wird. Wir werden in der technischen Mechanik auf diesen besondern Fall zurückkommen.

Endlich schließt man aus dem obigen Werthe von $l_,$, daß wenn man durch den Schwingungsmittelpunkt S eine zur Achse A parallele Gerade zieht und den Körper um diese schwingen läßt, umgekehrt der Punkt A der neue Schwingungsmittelpunkt sein wird. Denn der Abstand des Schwerpunktes O von dem Mittelpunkte S der um A stattfindenden Schwingung ist $l_, - l$ oder $\frac{k^2}{l}$; das Massemoment des Körpers in Bezug auf eine durch S gezogene parallele Achse wird demnach durch

$$\mathfrak{M} = Mk^2 + M\frac{k^4}{l^2}$$

und die Entfernung $l_{,,}$ des neuen Schwingungsmittelpunktes von dieser Achse durch

$$l_{,,} = \frac{k^2 + \frac{k^4}{l^2}}{\frac{k^2}{l}} = l + \frac{k^2}{l} = l,$$

ausgedrückt, folglich ist sie dieselbe wie vorher und daher A dieser Mittelpunkt der um die Achse in S statthabenden Schwingung; es folgt dann ferner daraus, daß auch die Dauer einer Schwingung um die letztere Achse genau so groß ist wie die einer Schwingung um die Achse in A.

§. 180.

Allgemein betrachtet gibt es beliebig viele Achsen, um welche derselbe Körper auf gleiche Weise schwingt, d. h. so daß die Dauer einer kleinen Schwingung für eine jede dieser Achsen dieselbe ist.

Zuerst wird es einleuchten, daß dieses für alle Achsen der Fall sein muß, welche dieselbe Entfernung l vom Schwerpunkte haben und parallel sind, da für alle diese auch k^2 denselben Werth behält. Nehmen wir dann den allgemeinen Ausdruck (123) für das Massemoment eines festen Systems in Bezug auf eine Gerade, welche die Winkel α, β, γ mit den drei Hauptachsen im Schwerpunkte bildet und deren senkrechte Entfernung von dem genannten Punkte l ist, nämlich

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cos^2 \alpha + \mathfrak{B} \cos^2 \beta + \mathfrak{C} \cos^2 \gamma + M l^2 ,$$

so wird ferner klar sein, daß dieser Werth von $\mathfrak{M}$ durch entsprechende Aenderung jener bestimmenden Größen α, β, γ und l auf beliebig viele verschiedene Weisen denselben Werth erhalten kann, und daß in allen diesen Fällen auch die Größen:

$$l_{,} = \frac{\mathfrak{M}}{M l} \quad \text{und} \quad T = \pi \sqrt{\frac{l_{,}}{g}}$$

die gleichen Werthe behalten.

Bei gleicher Entfernung l wird der Ausdruck von $\mathfrak{M}$ den kleinsten Werth natürlich für diejenigen Achsen erhalten, die zu derjenigen Haupt-Achse im Schwerpunkte parallel sind, in Bezug auf welche das Masse-Moment des Körpers das kleinste ist. Sei dieses das Massemoment $\mathfrak{A}$ in Bezug auf die Achse der x, und mache man

$$\mathfrak{M} = Ma^2 ,$$

so hat man für alle zur Achse der x parallele Geraden

$$l_, = l + \frac{a^2}{l} ,$$

und der kleinste Werth dieses Ausdrucks, nämlich

$$l_, = 2a ,$$

wird wieder für $l = a$ eintreten. Ist demnach a diejenige Entfernung von der Hauptachse des Massemomentes $\mathfrak{M}$ im Schwerpunkte, in welcher man die ganze Masse des gegebenen Körpers zu einem materiellen Punkte vereinigt annehmen muß, damit das Massemoment dieses letztern dem Massemoment des gegebenen Körpers in Bezug auf jene Achse, also dem kleinsten Massemomente desselben gleich ist, so werden unter allen Schwingungen, welche der Körper um irgend eine Achse machen kann, diejenigen die kleinste Dauer haben, welche um eine zur Achse des kleinsten Massemomentes $\mathfrak{M}$ parallele und von ihr um die Länge a entfernte Drehungsachse gemacht werden, und zwar wird diese Dauer dieselbe sein, wie die der Schwingungen eines einfachen Pendels von der Länge 2a.

§. 181.

Ein Körper, welcher um eine horizontale Achse schwingt, namentlich wenn diese Bewegung den Zweck hat, durch die Schwingungsdauer ein Zeitmaaß abzugeben, wird ein physisches Pendel und die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Drehungs-Achse oder die Länge eines einfachen Pendels, dessen Schwingungen die gleiche Dauer haben, die Länge desselben genannt. Die Länge eines physischen Pendels kann daher leicht mittels der beobachteten Dauer t seiner sehr kleinen Schwingungen nach der Formel:

$$l = g \frac{t^2}{\pi^2}$$

berechnet und dadurch die Lage des Schwingungsmittelpunktes bestimmt werden, wenn die Intensität der Schwere oder, was dasselbe ist, die Länge des einfachen Secundenpendels an dem betreffenden Orte der Erde bekannt ist.

Diese Länge des einfachen Secundenpendels kann aber selbst nur durch die Beobachtung der Schwingungen physischer Pendel gefunden werden, und es ist dazu nothwendig, daß man die Lage des Schwingungsmittelpunktes oder die Länge eines solchen physischen Pendels unmittelbar bestimmt, wozu sich verschiedene Wege darbieten.

Entweder gibt man dem physischen Pendel eine Form, welche von der eines mathematischen möglichst wenig abweicht und für welche die Lage des Schwingungsmittelpunktes mit großer Genauigkeit gefunden werden kann. Eine solche Form hat z. B. ein Pendel, das aus einer kleinen sehr dichten Kugel besteht, welche an einem homogenen, an seinem obern Ende vollkommen biegsamen und gegen den Durchmesser der Kugel sehr langen Faden aufgehängt ist. Für dieses Pendel fällt der Schwingungsmittelpunkt ziemlich nahe mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammen; denn man hat für die Kugel allein, indem man den Faden zuerst als gewichtlos betrachtet,

$$Mk^2 = \frac{2}{5} Mr^2$$

und demnach

$$l_{,} = l + \frac{2r^2}{5l},$$

woraus man sieht, daß die Länge $l_{,}$ von l nur sehr wenig abweicht, wenn $\frac{r}{l}$ einen kleinen Werth hat. Wäre z. B. $l = 1^m$, $r = 0^m,005$, so würde

$$\frac{2r^2}{5l} = 0^m,00001 ,$$

und der Schwingungsmittelpunkt läge nur um $\frac{1}{100}$ Millimeter tiefer, als der Mittelpunkt der Kugel.

Das Massemoment des Fadens hat indessen einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf die Länge des Pendels. Um dasselbe in Rechnung zu bringen, kann man den Faden als einen Cylinder betrachten, für welchen das Quadrat der Dicke gegen das der Länge verschwindet, so daß dessen Massemoment in Bezug auf die zur Länge senkrechte Achse im Schwerpunkte nach §. 171 den Werth:

$$\frac{1}{12} ml^2 = \frac{1}{12} \frac{p}{g} l^2$$

und in Bezug auf die Drehungsachse am obern Ende den Werth:

$$\frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} l^2$$

erhält, worin m die Masse, p das Gewicht und l die Länge des Fadens bedeutet, von denen die letztere bis auf eine Kleinigkeit der Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Drehungsachse gleich gesetzt werden kann. Bezeichnet dann noch P das Gewicht der Kugel, so hat man als Massemoment des ganzen Systems

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{g}\left(l^2 + \frac{2}{5} r^2\right) + \frac{1}{3} \frac{p}{g} l^2 .$$

Man hat aber auch, da der Körper aus verschiedenen Theilen besteht, zur Bestimmung des Schwerpunktes die Beziehung:

$$M l = \Sigma . m r = \frac{P + \frac{1}{2} p}{g} l$$

und findet damit für die Länge $l_{,}$ des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels

$$l_{,} = \frac{P (l^2 + \frac{2}{5} r^2) + \frac{1}{3} p l^2}{(P + \frac{1}{2} p) l}$$

oder mit Vernachlässigung der Größen, welche der schärfsten Beobachtung entgehen dürften,

$$l_{,} = l\left(1 - \frac{1}{6}\frac{p}{P} + \frac{1}{12}\frac{p^2}{P^2} + \frac{2 r^2}{5 l^2}\right) .$$

Nimmt man z. B.

$$p = 0^{gr},03 \quad , \quad P = 6^{gr}$$

und die übrigen Maaße wie oben, so hat man $\frac{p}{P} = 0,005$ und

$$l_{,} = 1 + 0,000012 - 0,000833 = (1 - 0,000821)^{m} ,$$

woraus folgt, daß durch einen solchen Faden der Schwingungsmittelpunkt beinahe um 1 Millimeter über den Mittelpunkt der Kugel hinaufgerückt wird.

Gegen diesen einfachen Apparat kann indessen eingewendet werden, daß die genaue Bestimmung der Länge des Fadens, welche einerseits von einer genauen Kenntniß des Drehungspunktes abhängt und auf der andern Seite wegen der Dehnbarkeit und der ungleichen Spannung während der Bewegung nicht einmal constant bleibt, so daß die

Bewegung des Mittelpunktes der Kugel strenge genommen gar nicht in einem Kreisbogen vor sich geht, und welche namentlich wegen des dynamischen Druckes beim Durchgange durch die Gleichgewichtslage größer ist, als wenn es in dieser Lage in Ruhe bleibt, einer Unsicherheit unterliegt, welche die Grenze der Beobachtungsfehler überschreiten dürfte.

Es scheint demnach zweckmäßiger, ein festes, aber möglichst einfaches und möglichst genau nach geometrischen Formen construirtes Pendel, das sich auf einer harten, möglichst scharfen Schneide dreht, anzuwenden, z. B. einen cylindrischen Stab AB, Fig. 105, an welchem in C die senkrechte Schneide und in D eine schwere homogene Linse so befestigt ist, daß ihre größte Kreisebene senkrecht zur Achse des Stabes steht.

Das Gewicht der Linse sei P, das des Stabes p, die Länge des letztern l; die Abstände AC und BD der Schneide und der mittleren Ebene der Linse von den Enden A und B des Stabes seien a und b, die Dicke des Stabes 2r, der größte Durchmesser der Linse 2R, ihre Dicke 2h. Das Massemoment $\mathfrak{C}_1$ des Stabes in Bezug auf eine zur Schneide parallele Achse im Schwerpunkte O ist nach §. 171

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{1}{12}\frac{p}{g}(3r^2 + l^2),$$

und demnach das Massemoment $\mathfrak{M}'$ desselben in Bezug auf die Schneide selbst, deren Gewicht vernachlässigt werden kann,

$$\mathfrak{M}' = \frac{1}{12}\frac{p}{g}(3r^2 + l^2) + \frac{p}{g}\left(\frac{1}{2}l - a\right)^2.$$

Das Massemoment der Linse in Bezug auf den größten Durchmesser, welcher der Schneide parallel ist, würde, wenn sie voll wäre, nach §. 173 durch

$$\frac{1}{20}\cdot\frac{P+p'}{g}\cdot\frac{10R^4 + 15R^2h^2 + 7h^4}{3R^2 + h^2}$$

ausgedrückt, worin p' das Gewicht des die Oeffnung der Linse ausfüllenden Körpers, also das Gewicht eines Stabes von gleichem Stoffe wie die Linse, von dem Durchmesser 2r und der Länge 2h bedeutet, indem man dabei die sehr geringe kugelförmige Abrundung desselben vernachlässigt. Ist daher q die Dichte der Linse, so hat man

$$P + p' = \frac{1}{3}\pi g q h (3R^2 + h^2) \quad , \quad p' = 2\pi g q r^2 h$$

und daraus

$$\frac{p'}{P} = \frac{6r^2}{3R^2 + h^2 - 6r^2}.$$

Das Massemoment dieses kleinen Stabes in Bezug auf den Durchmesser der Linse ist wie vorher

$$\frac{1}{12}\frac{p'}{g}(3r^2+4h^2)=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\frac{r^2(3r^2+4h^2)}{3R^2+h^2-6r^2},$$

und wenn dieser Werth von dem Massemomente der vollen Linse abgezogen wird, so ergibt sich als Ausdruck des Massemomentes $\mathfrak{C}_2$ der hohlen Linse in Bezug auf ihren Durchmesser

$$\mathfrak{C}_2=\frac{1}{20}\frac{P}{g}\left(\frac{10R^4+15R^2h^2+7h^4}{3R^2+h^2}-\frac{10r^2(3r^2+4h^2)}{3R^2+h^2-6r^2}\right);$$

das Massemoment $\mathfrak{M}''$ derselben in Bezug auf die Schneide wird demnach

$$\mathfrak{M}''=\mathfrak{C}_2+\frac{P}{g}(l-a-b)^2 .$$

Ferner hat man für die Entfernung k des Schwerpunktes vom ganzen Pendel die Gleichung:

$$\frac{P+p}{g}k=\frac{P}{g}(l-a-b)+\frac{p}{g}\left(\frac{1}{2}l-a\right),$$

und damit ergibt sich die Länge $l_{,}$ des einfachen Pendels oder die Entfernung des Schwingungsmittelpunktes von der Schneide:

$$l_{,}=\frac{g(\mathfrak{M}'+\mathfrak{M}'')}{(P+p)k},$$

unabhängig von dem spezifischen Gewichte der angewendeten Stoffe und von der Intensität der Schwere und nur ausgedrückt durch Beobachtungsgrößen, welche scharf bestimmt werden können.

Endlich kann man auch den im vorhergehenden §. bewiesenen Satz, daß ein physisches Pendel um eine durch den Schwingungs-Mittelpunkt gelegte, zur ursprünglichen Drehungsachse parallele Gerade auf dieselbe Weise schwingt, wie um diese Achse, anwenden, um die Entfernung jenes Schwingungs-Mittelpunktes von dieser Achse oder die Länge des gleichzeitig schwingenden einfachen Pendels ohne Berücksichtigung der geometrischen Form, blos durch Beobachtung zu bestimmen. Denkt man sich nämlich an dem vorhergehenden Pendel den cylindrischen oder parallelepipedischen Stab AB, Fig. 106, verlängert, in B eine zweite ähnliche Linse und in E zwischen B und D eine zweite, zur ersten (in C) parallele Schneide

angebracht und entweder diese oder eine der beiden Linsen so lange verschoben, bis das Pendel auf beiden Schneiden Schwingungen von genau gleicher Dauer macht, so ist die Entfernung CE dieser Schneiden die gesuchte Länge l, des einfachen Pendels. Ein solches Pendel wird Reversionspendel genannt.

§. 182.

Bei allen diesen Beobachtungen physischer Pendel steht aber die umgebende Luft der Bewegung hindernd und verzögernd entgegen; es muß also zuvor noch der Einfluß dieses Widerstandes auf die Dauer der Schwingungen untersucht werden, ehe man aus der beobachteten Schwingungsdauer und der Lage des Schwingungsmittelpunktes eines solchen Pendels auf die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge l, schließen kann. Die in's Einzelne gehende Untersuchung über die Wirkung, welche der Widerstand der Luft auf die Schwingungsdauer, oder überhaupt über die Wirkung, welche eine umgebende Flüssigkeit auf die Bewegung eines um eine feste Achse sich drehenden festen Systems ausübt, kann erst vorgenommen werden, wenn das allgemeine Gesetz der Bewegung eines festen Systems in einer Flüssigkeit genauer ermittelt ist, was im vierten Buche geschehen wird. Ich werde mich deßhalb hier auf einige allgemeine Betrachtungen beschränken.

Zuerst leuchtet ein, daß in einem bestimmten Augenblicke, in welchem die Winkelgeschwindigkeit des Systems φ sei, die Wirkung sämmtlicher Widerstände, welche von der umgebenden Flüssigkeit auf die verschiedenen Theile des Systems ausgeübt werden, welches auch das Gesetz für die Aenderung dieser Widerstände sein mag, in eine fördernde Wirkung W und in eine drehende Wirkung M_w in Bezug auf einen als Coordinatenanfang genommenen Punkt der Drehungsachse zerlegt werden kann oder in die fördernden Componenten:

$$W \cos \widehat{Wx} \quad , \quad W \cos \widehat{Wy} \quad , \quad W \cos \widehat{Wz}$$

und in die Momente:

$$M_w \cos \widehat{M_w x} \quad , \quad M_w \cos \widehat{M_w y} \quad , \quad M_w \cos \widehat{M_w z} \; .$$

Die Wirkung der erstern wird durch den Widerstand der festen Achse aufgehoben und wird im Allgemeinen gegen den von den bewegenden Kräften hervorgebrachten Druck auf die Achse sehr gering sein. Nimmt man dann, was immer geschehen kann, diese Achse selbst als eine der Coordinatenachsen, z. B. als Achse der y, so wird auch das erste und

dritte der vorstehenden Momente wegen des Widerstandes der festen Achse keine wahrnehmbare Wirkung äußern können; das zweite dagegen wird in jedem Augenblicke in einem der vorhandenen Winkelgeschwindigkeit entgegengesetzten Sinne das System zu drehen und diese Winkelgeschwindigkeit zu vermindern streben. Bezeichnet z. B. $\mathfrak{M}$ das Massemoment eines schweren festen Körpers in Bezug auf eine feste Achse, wobei das Massemoment der mechanisch mit fortgerissenen Flüssigkeit mit eingerechnet sein soll, P, das Gewicht des festen Systems in der Flüssigkeit, d. h. den Ueberschuß seines eigentlichen Gewichtes über den Druck der Flüssigkeit im Zustande der Ruhe, l den Abstand des Schwerpunktes des Systems von der Drehungsachse, welche horizontal gerichtet sein soll, so hat man für die drehende Bewegung dieses Systems nach dem Vorhergehenden die Gleichung:

$$\text{a.)} \qquad \mathfrak{M}\frac{d\varphi}{dt} = P{,}l \sin\vartheta - M_w \cos \widehat{M_w y} \; ,$$

worin, wie man schon gefunden haben wird, $\widehat{M_w y}$ den Winkel vorstellt, den die Achse des Widerstandsmomentes M_w mit der Achse der y einschließt.

Ferner sieht man ein, daß der fördernde Widerstand W sowohl als das Widerstandsmoment M_w nur von der Dichte und Cohäsion der umgebenden Flüssigkeit, von der Gestalt des festen Systems, von der Lage der Drehungsachse in demselben und von seiner Winkelgeschwindigkeit abhängen kann, daß jene Kräfte demnach für eine in der Ausdehnung der Bewegung gleichbleibende Beschaffenheit der umgebenden Flüssigkeit und für ein festes System, daß sich um eine unveränderliche Achse dreht, nur noch Functionen der Winkelgeschwindigkeit φ sein können, daß man sich folglich immer eine gewisse Winkelgeschwindigkeit $\varkappa$ denken kann, bei welcher das Moment $M_w \cos \widehat{M_w y}$ des Flüssigkeits-Widerstandes in Bezug auf die Drehungsachse der drehenden Kraft P,l oder Mg,l gleich ist, so daß man einmal hat

$$M_w \cos \widehat{M_w y} = Lr f(\varphi) \; ,$$

worin Lr eine von der Gestalt des Systems, der Lage der Drehungs-Achse in demselben und von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängige, mit einem Momente homogene Constante und f irgend eine Function bezeichnet, und dann

$$M_w \cos \widehat{M_w y} : P{,}l = f(\varphi) : f(\varkappa) \; ,$$

woraus sich der Werth von $\varkappa$ unter der Form:

$$\varkappa = \psi\left(\frac{P_{,}l}{Lr}\right)$$

ergibt, wenn man mit ψ die der Function f entgegengesetzte oder die Function f auflösende Operation bezeichnet. Setzt man dann noch $\mathfrak{M} = M(l^2 + k^2)$, so nimmt die vorhergehende Gleichung (a) die Form an:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{g_{,}l}{l^2+k^2} \sin\vartheta - \frac{g_{,}l}{l^2+k^2} \frac{f(\varphi)}{f(\varkappa)},$$

oder wenn man noch wie früher

$$\frac{l^2+k^2}{l} = l_{,}$$

einführt, wo $l_{,}$ wieder die Entfernung des Mittelpunktes der Schwingung von der Drehungsachse bedeutet, und die linke Seite mit $-\varphi\frac{dt}{d\vartheta} = 1$ multiplicirt, die Form:

$$\frac{d.\varphi^2}{d\vartheta} + \frac{2g_{,}}{l_{,}} \sin\vartheta = \frac{2g_{,}}{l_{,}f(\varkappa)} f(\varphi) . \qquad \text{(b.}$$

Dieser Ausdruck zeigt mit den vorhergehenden, daß es auch bei der Bewegung in einer Flüssigkeit beliebig viele feste Systeme gibt, die auf gleiche Weise schwingen, daß man sich also auch immer eine kleine Kugel an einem sehr dünnen Faden denken kann, welche, bei gleicher anfänglicher Winkelgeschwindigkeit und Ausweichung, eine Schwingung in derselben Zeit vollendet, wie das gegebene System. Die zu dieser Uebereinstimmung nothwendigen Bedingungen sind nämlich

$$\frac{g_{,}'}{l_{,}'} = \frac{g_{,}}{l_{,}}, \quad \varkappa' = \varkappa \text{ oder } \frac{P_{,}'l'}{L'r'} = \frac{P_{,}l}{Lr},$$

und man sieht leicht, daß diesen beiden Bedingungen, worin $g_{,}'$, $l_{,}'$, $P_{,}'$, etc. für das neue System dasselbe bedeuten, was $g_{,}$, $l_{,}$, $P_{,}$, etc. für das gegebene, im Allgemeinen auf sehr verschiedene Weise Genüge gethan werden kann, je nachdem man bald die Gestalt und Größe, bald die Dichte des Systems ändert.

§. 183.

In §. 157 wurde nachgewiesen, daß wenn der Widerstand der Luft gegen eine kleine, sehr dichte Kugel dem Quadrate der Geschwindigkei

proportional angenommen wird, die Schwingungsdauer derselben für sehr kleine Schwingungen unabhängig bleibt von dem Widerstande der Luft und der Größe der Schwingungsbogen, d. h. daß eine Veränderung in diesen Größen keine wahrnehmbare Veränderung in der Dauer einer oder mehrerer Schwingungen hervorbringt, und man wird sich nach dem Vorhergehenden, indem man die eben aufgestellte Gleichung (b) mit der Gleichung (g) in §. 156 vergleicht, überzeugen, daß unter der obengenannten Voraussetzung: $f(\varphi) = \varphi^2$ dasselbe für jedes feste System stattfinden muß. Es läßt sich aber auf demselben Wege, wie in jenem Falle, zeigen, daß dieselbe Unabhängigkeit auch für jede andere Function $f(\varphi)$ des Widerstandes, welche sich mit φ dem Werthe Null nähert, statthaben wird.

Denn unter dieser Voraussetzung kann man in der Gleichung (b) den Quotienten $\frac{f(\varphi)}{f(\varkappa)}$ in eine Reihe von der Form:

$$A\frac{\varphi}{\varkappa} + B\frac{\varphi^2}{\varkappa^2} + \text{etc.}$$

nach den aufsteigenden Potenzen von $\frac{\varphi}{\varkappa}$ entwickeln, und weil für sehr kleine Schwingungen auch φ immer sehr klein bleiben wird, während die constante Winkelgeschwindigkeit $\varkappa$ für den Widerstand eines dichten Körpers in der Luft einen sehr großen Werth hat, so kann man sich auf die beiden ersten Glieder dieser Reihe beschränken. Die Gleichung (b) nimmt dadurch die Form an:

$$\frac{d \,.\, \varphi^2}{d\vartheta} + \frac{2g_{,}}{l_{,}} \sin\vartheta = A\frac{2g_{,}}{l_{,}\varkappa}\varphi + B\frac{2g_{,}}{l_{,}\varkappa^2}\varphi^2$$

und gibt, zum Theil wirklich, zum Theil der Form nach integrirt,

$$\text{c.)} \quad \varphi^2 = \frac{2g_{,}}{l_{,}}(\cos\vartheta - \cos\alpha) + A\frac{2g_{,}}{l_{,}\varkappa}\int_{\alpha}^{\vartheta} d\vartheta \,.\, \varphi + B\frac{2g_{,}}{l_{,}\varkappa^2}\int_{\alpha}^{\vartheta} d\vartheta \,.\, \varphi^2\,,$$

worin man sich unter den Integralzeichen φ als eine Function von ϑ vorstellen muß. Diese Function muß aber jedenfalls eine solche Form haben, daß der Werth von φ^2 sowohl für $\vartheta = \alpha$, als für einen Werth $\vartheta_{,}$ von ϑ:

$$\vartheta_{,} = -(\alpha - \delta)$$

Null wird, wenn δ einen, im Vergleich zu α sehr kleinen Winkel bedeutet, so daß man

$$\delta = \mu\alpha^2 \quad , \qquad \vartheta_{,} = -(\alpha - \mu\alpha^2)$$

setzen kann, indem man mit μ einen Coeffizienten bezeichnet, der immer viel kleiner als 1 ist. Der einfachste Ausdruck, welcher diesen beiden Bedingungen Genüge leistet, ist aber offenbar das Product der beiden Factoren $\alpha - \vartheta$ und $\alpha + \vartheta - \mu\alpha^2$, wonach man für eine erste Annäherung

$$\varphi^2 = \frac{g_{,}}{l_{,}}(\alpha - \vartheta)(\alpha + \vartheta - \mu\alpha^2) = \frac{g_{,}}{l_{,}}(\alpha^2 - \vartheta^2) - \frac{g_{,}}{l_{,}}\mu\alpha^2(\alpha - \vartheta) \quad \text{(d.}$$

setzen kann. Man erkennt leicht in dem ersten Gliede dieses Werthes den angenäherten Werth von $\frac{2g_{,}}{l_{,}}(\cos\vartheta - \cos\alpha)$ oder den angenäherten Werth des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit eines im leeren Raume schwingenden festen Systems und schließt daraus, daß das zweite Glied den angenäherten Werth der beiden Integrale in der Gleichung (c) vorstellt. Will man demnach die Annäherung noch weiter treiben, so kann man den aus der Gleichung (d) sich ergebenden Werth von φ in jene Integrale einführen und diese integriren. Für sehr kleine Schwingungen genügt der letztere Werth für sich allein; man zieht aus demselben, wie in §. 157,

$$t\sqrt{\frac{g_{,}}{l_{,}}} = \int_{\vartheta}^{\alpha} d\vartheta \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2(1-\mu\alpha) + \mu\alpha^2\vartheta - \vartheta^2}}$$

$$= arc\cos\frac{\vartheta - \frac{1}{2}\mu\alpha^2}{\alpha - \frac{1}{2}\mu\alpha^2}$$

als Ausdruck für die Dauer der Bewegung von der Ausweichung α bis zur Ausweichung ϑ und schließt daraus, wie dort, daß die Dauer T einer ganzen Schwingung, wenn diese sehr klein ist, unabhängig ist von der Größe der Ausweichung und von dem Luftwiderstande, daß man sich also immer auch ein einfaches Pendel denken kann, dessen Schwingungsdauer für eine große Anzahl von Schwingungen dieselbe ist, wie die eines gegebenen festen Systems um eine feste Achse.

Erhalten dagegen die Schwingungen eine merkliche Ausdehnung, so hängt der Werth der Schwingungsdauer T sowohl von der Ausweichung α als von der constanten Winkelgeschwindigkeit $\varkappa$, also von der Gestalt des festen Systems ab, und es erhebt sich in dieser Beziehung gegen das oben erklärte Reversionspendel der Einwurf,

daß es im Allgemeinen für die Bewegung auf der zweiten Schneide eine andere Gestalt besitzt, als für die Bewegung auf der ersten, oder es ergibt sich für seine Construction die Bedingung, daß seine Gestalt für beide Schneiden dieselbe bleiben muß. Am einfachsten dürfte dies durch drei Linsen, A, B, C, Fig. 107, erreicht werden, von denen die mittlere B genau in der Mitte zwischen den beiden festen Schneiden a und b und in der Mitte des cylindrischen Stabes DE befestigt ist, während die beiden andern, welche an Gestalt und Größe möglichst gleich, an Gewicht aber möglichst verschieden sein müssen, von denen man also die eine massiv machen, die andere hohl lassen wird, außerhalb dieser Schneiden angebracht und verschiebbar sind und für jeden einzelnen Versuch in gleichen Abständen von den Schneiden festgestellt werden. Dazu dürfte es am zweckmäßigsten sein, die beiden Enden des cylindrischen Stabes mit feinen Schraubengewinden zu versehen, und jede der Linsen B und C mittels zweier Schraubenmuttern festzustellen; es bleibt auf solche Weise die Gestalt des ganzen Körpers immer symmetrisch um die Achse des Stabes, was nicht der Fall ist, wenn man Druckschrauben zum Feststellen anwendet, und man hat damit zugleich die zu einer feinen Bewegung der Linsen erforderliche Mikrometerschraube.

Drittes Kapitel.

Bewegung eines festen Systems um einen festen Punkt.

§. 184.

Untersuchen wir nun die Bewegung eines festen Systems, das mit einem festen Punkte auf eine unveränderliche Weise verbunden ist und sich um ihn in jeder Richtung ungehindert drehen kann. Dazu nehmen wir diesen festen Punkt als Anfangspunkt eines festen rechtwinkligen Coordinatensystems und drücken die Lage eines dem gegebenen System angehörenden materiellen Punktes M am Ende der Zeit t in Bezug auf dieses Coordinatensystem durch die Veränderlichen x, y, z aus, welche demnach als Functionen der Zeit t zu betrachten sind. Die Geschwindigkeit v des materiellen Punktes M, deren Richtung vor der Hand noch unbekannt ist, läßt sich dann in ihre drei Componenten:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

von denen jede der entsprechenden Achse der x, y oder z parallel ist, zerlegt denken, und unsere Aufgabe wird wieder darin bestehen, die Beziehungen festzustellen, welche zwischen den an dem gegebenen Systeme thätigen Kräften, diesen Geschwindigkeiten irgend eines seiner Punkte und den drei Coordinaten desselben am Ende der Zeit t stattfinden.

Es ist aber einleuchtend, daß wegen der festen Verbindung sämmtlicher materiellen Punkte des Systems unter sich und mit dem festen Punkte einmal für jeden die Bedingungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad , \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$$

stattfinden werden, und dann, daß ihre Bewegung in jedem Augenblicke in einem gewissen Sinne gemeinschaftlich sein wird, daß es also für den vorhergenannten Zweck genügt, wenn man die Gesetze der Bewegung einiger bestimmten Punkte des Systems kennt, welche nicht in gerader Linie liegen, und in Bezug auf welche man die Lage jedes andern Punktes angeben kann. Dazu wird es am zweckmäßigsten sein, wenn

man durch den festen Punkt drei neue, mit dem gegebenen System fest verbundene, ebenfalls unter sich rechtwinklige Coordinatenachsen zieht und die Lage irgend eines seiner Punkte in Bezug auf diese durch die Coordinaten ξ, η, ζ ausdrückt, welche für einen jeden gemäß der vorher ausgesprochenen Bedingungen während der ganzen Bewegung unveränderliche Werthe behalten oder von der Zeit t unabhängig sind; es wird dann für die Kenntniß der Bewegung des Systems genügen, wenn man für jeden Zeitpunkt die Lage dieser neuen Achsen der ξ, η, ζ in Bezug auf die festen Achsen der x, y, z angeben kann, oder anders ausgedrückt, wenn man die Winkel, welche jene Achsen mit diesen am Ende der Zeit t bilden, in Function dieser Zeit und der an dem festen System thätigen Kräfte kennt.

Nach den in den §§. 22 und 23 der Einleitung gegebenen Ausdrücken kann die Lage der beweglichen Coordinatenachsen der ξ, η, ζ gegen die festen Achsen der x, y, z entweder durch die drei unabhängigen Winkel ω, ϑ, ψ bestimmt werden oder durch die in gegenseitiger Abhängigkeit stehenden neun Winkel: $\widehat{\xi x}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{\xi z}$, $\widehat{\eta x}$, etc., welche die drei beweglichen Achsen mit jeder der drei festen einschließen. Nehmen wir der Symmetrie wegen zuerst die letztern Winkel, und bezeichnen wir, wie in den genannten §§. der Einleitung die Cosinus der Winkel:

$$\widehat{\xi x} \quad , \quad \widehat{\xi y} \quad , \quad \widehat{\xi z} \ ,$$

welche die bewegliche Achse der ξ mit den drei festen bildet, mit

$$a \quad , \quad b \quad , \quad c \ ,$$

die der Winkel:

$$\widehat{\eta x} \quad , \quad \widehat{\eta y} \quad , \quad \widehat{\eta z}$$

zwischen der Achse der η und jeder der festen Achsen mit

$$a' \quad , \quad b' \quad , \quad c'$$

und die der Winkel:

$$\widehat{\zeta x} \quad , \quad \widehat{\zeta y} \quad , \quad \widehat{\zeta z}$$

zwischen der Achse der ζ und den festen Achsen mit

$$a'' \quad , \quad b'' \quad , \quad c'' \ ,$$

so haben wir in irgend einem Augenblicke zwischen den veränderlichen Coordinaten x, y, z und den unveränderlichen ξ, η, ζ des Punktes M die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\xi + a'\eta + a''\zeta \\ y &= b\xi + b'\eta + b''\zeta \\ z &= c\xi + c'\eta + c''\zeta \end{aligned}\right\}, \qquad (a.$$

worin nun die Cosinus a, b, c, etc. wie x, y, z Functionen der Zeit t sind und durch die sechs Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

in Abhängigkeit von einander stehen.

§. 185.

Aus den vorhergehenden Gleichungen (a) zieht man mit der Beachtung, daß die Coordinaten ξ, η, ζ von der Zeit t unabhängig sind, in Bezug auf diese letztere die Aenderungsgesetze:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{da'}{dt} + \zeta\frac{da''}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \xi\frac{db}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{db''}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \xi\frac{dc}{dt} + \eta\frac{dc'}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (b.$$

und erhält dadurch die Beziehungen, welche zwischen den zu den festen Achsen parallelen Componenten u_x, u_y, u_z der Geschwindigkeit v eines beliebigen materiellen Punktes M einerseits und zwischen der Lage dieses Punktes in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem und der Aenderung der Lage dieses letztern in Bezug auf jene festen Achsen am Ende der Zeit t stattfinden. Will man aus denselben die Lage desjenigen Punktes im System dessen Geschwindigkeit in diesem Augenblicke Null ist, kennen lernen, so wird man aus den drei Gleichungen des ersten Grades:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{da'}{dt} + \zeta\frac{da''}{dt} \\ 0 &= \xi\frac{db}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{db''}{dt} \\ 0 &= \xi\frac{dc}{dt} + \eta\frac{dc'}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (c.$$

die Werthe der drei Veränderlichen ξ, η, ζ ziehen, für deren jede sich im Allgemeinen nur ein Werth zu ergeben scheint. Multiplicirt man aber die erste dieser Gleichungen mit a, die zweite mit b, die dritte mit c und nimmt die Summe dieser Producte, multiplicirt man ferner die erste mit a', die zweite mit b', die dritte mit c' und addirt die Ergebnisse, und thut man dasselbe, nachdem die erste mit a'', die zweite mit b'', die dritte mit c'' multiplicirt worden, so ergeben sich mit Beachtung der vorher erwähnten sechs Bedingungsgleichungen und ihrer Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}+c\frac{dc}{dt}&=0\,,\\ a'\frac{da'}{dt}+b'\frac{db'}{dt}+c'\frac{dc'}{dt}&=0\,,\\ a''\frac{da''}{dt}+b''\frac{db''}{dt}+c''\frac{dc''}{dt}&=0\,,\end{aligned}\right.$$

und unter eine zweckmäßige Form gebracht

$$\left\{\begin{aligned} a\frac{da'}{dt}+b\frac{db'}{dt}+c\frac{dc'}{dt}&=-\left(a'\frac{da}{dt}+b'\frac{db}{dt}+c'\frac{dc}{dt}\right)=-\mathfrak{r}\,,\\ a''\frac{da}{dt}+b''\frac{db}{dt}+c''\frac{dc}{dt}&=-\left(a\frac{da''}{dt}+b\frac{db''}{dt}+c\frac{dc''}{dt}\right)=-\mathfrak{q}\,,\\ a'\frac{da''}{dt}+b'\frac{db''}{dt}+c'\frac{dc''}{dt}&=-\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)=-\mathfrak{p}\,,\end{aligned}\right.$$

die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \zeta\left(a\frac{da''}{dt}+b\frac{db''}{dt}+c\frac{dc''}{dt}\right)-\eta\left(a'\frac{da}{dt}+b'\frac{db}{dt}+c'\frac{dc}{dt}\right)&=0\,,\\ \xi\left(a'\frac{da}{dt}+b'\frac{db}{dt}+c'\frac{dc}{dt}\right)-\zeta\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)&=0\,,\\ \eta\left(a''\frac{da'}{dt}+b''\frac{db'}{dt}+c''\frac{dc'}{dt}\right)-\xi\left(a\frac{da''}{dt}+b\frac{db''}{dt}+c\frac{dc''}{dt}\right)&=0\,,\end{aligned}\right.$$

oder abgekürzt mit der vorher angedeuteten Bezeichnung

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{q}\zeta-\mathfrak{r}\eta&=0\,,\\ \mathfrak{r}\xi-\mathfrak{p}\zeta&=0\,,\\ \mathfrak{p}\eta-\mathfrak{q}\xi&=0\,,\end{aligned}\right.$$

und man sieht unter dieser Form, daß immer zwei dieser Gleichungen die dritte enthalten und demnach die Projectionen in den drei beweglichen Coordinaten-Ebenen von einer Geraden vorstellen, welche durch den Anfangspunkt geht. Bezeichnen demnach λ', μ', ν' die Winkel, welche diese Gerade mit den drei beweglichen Achsen macht, so hat man als die nothwendigen Gleichungen derselben

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta}{\cos\mu'} - \frac{\xi}{\cos\lambda'} &= 0 \\ \frac{\xi}{\cos\lambda'} - \frac{\zeta}{\cos\nu'} &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad (d.$$

und die Vergleichung dieser Formen mit den vorhergehenden gibt mit der Bedingungsgleichung:

$$\cos^2\lambda' + \cos^2\mu' + \cos^2\nu' = 1$$

die Beziehungen:

$$\cos\lambda' = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2}}, \quad \cos\mu' = \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2}},$$

$$\cos\nu' = \frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2}},$$

oder wenn man $\sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2}$ durch φ' ersetzt,

$$\mathfrak{p} = \varphi'\cos\lambda' \quad , \quad \mathfrak{q} = \varphi'\cos\mu' \quad , \quad \mathfrak{r} = \varphi'\cos\nu' \; .$$

Um dann die Lage dieser Geraden gegen die festen Achsen der x, y und z zu bestimmen, seien λ, μ, ν die Winkel zwischen ihr und diesen letztern, also

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{\cos\mu} - \frac{x}{\cos\lambda} &= 0 \\ \frac{x}{\cos\lambda} - \frac{z}{\cos\nu} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ihre Gleichungen in Bezug auf diese Achsen. Führt man dann die Werthe von η und ζ aus den Gleichungen (d) in die Gleichungen (a) und aus den letztern die Werthe von x, y, z, die nun alle in ξ ausgedrückt erscheinen, in die vorstehenden Gleichungen ein, so kann man daraus und mittels der Bedingung:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

die Werthe von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ ableiten. Man findet auf diese Weise z. B. für $\cos\lambda$ den Werth:

$$\frac{a\cos\lambda'+a'\cos\mu'+a''\cos\nu'}{\sqrt{(a\cos\lambda'+a'\cos\mu'+a''\cos\nu')^2+(b\cos\lambda'+b'\cos\mu'+b''\cos\nu')^2+(c\cos\lambda'+c'\cos\mu'+c''\cos\nu')^2}}$$

und wird sich mittels der oben angegebenen Bedingungsgleichungen zwischen den Cosinus a, b, c, etc. leicht überzeugen, daß der Nenner dieses Ausdrucks sich auf die Einheit zurückführen läßt, so daß man hat

$$\left\{\begin{aligned}
\cos\lambda &= a\cos\lambda' + a'\cos\mu' + a''\cos\nu' = \frac{a\mathfrak{p}+a'\mathfrak{q}+a''\mathfrak{r}}{\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2}},\\
\cos\mu &= b\cos\lambda' + b'\cos\mu' + b''\cos\nu' = \frac{b\mathfrak{p}+b'\mathfrak{q}+b''\mathfrak{r}}{\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2}},\\
\cos\nu &= c\cos\lambda' + c'\cos\mu' + c''\cos\nu' = \frac{c\mathfrak{p}+c'\mathfrak{q}+c''\mathfrak{r}}{\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2}},
\end{aligned}\right.$$

wie sich auch auf anderm Wege mittels der in §. 22 der Einleitung abgeleiteten Gleichungen ergibt.

§. 186.

Aus den vorhergehenden Rechnungen folgt also, daß es in jedem Augenblicke in dem festen System eine durch den festen Punkt gehende Gerade gibt, deren Punkte in diesem Augenblicke keine Geschwindigkeit, keine Bewegung haben. Man kann sich daher diese Gerade für diesen Augenblick als eine Achse vorstellen, um welche das ganze System sich drehend bewegen will, d. h. die Geschwindigkeiten aller Punkte des Systems haben in demselben Augenblicke solche Richtungen und solche gegenseitige Verhältnisse in ihren Intensitäten, als wenn das System in einer Drehung um jene Gerade begriffen wäre. Bezeichnet man demnach die Winkelgeschwindigkeit des Systems in Bezug auf diese Achse, welche man die augenblickliche Drehungsachse des Systems nennt, mit φ und die Entfernung des materiellen Punktes M von derselben mit w, so hat man für diese Länge w der von dem Punkte M, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, auf die augenblickliche Drehungsachse, welche mit den Achsen der ξ, η, ζ die Winkel λ', μ', ν' einschließt, gefällten Senkrechten nach §. 20 der Einleitung den Ausdruck:

$$w=\sqrt{(\eta\cos\lambda'-\xi\cos\mu')^2+(\xi\cos\nu'-\zeta\cos\lambda')^2+(\zeta\cos\mu'-\eta\cos\nu')^2}$$

und für die fördernde Geschwindigkeit v des Punktes M den Werth:

$$v = w\varphi .$$

Behandelt man dann die Gleichungen (b) auf dieselbe Weise, wie es im vorhergehenden §. für die Gleichungen (c) angegeben worden ist, und beachtet, daß die Ausdrücke:

$$a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt} = u_\xi$$

$$a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt} = u_\eta$$

$$a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} = u_\zeta$$

die Summen der Projectionen auf je eine der beweglichen Achsen der ξ, η oder ζ von den drei Componenten u_x, u_y, u_z, in welche die Geschwindigkeit v des Punktes M parallel zu den festen Achsen zerlegt werden kann, sind und demnach die Componenten u_ξ, u_η, u_ζ derselben Geschwindigkeit parallel zu den beweglichen Achsen ausdrücken, so erhält man zuerst die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} u_\xi &= \mathfrak{q}\zeta - \mathfrak{r}\eta = \varphi'(\zeta\cos\mu' - \eta\cos\nu') \\ u_\eta &= \mathfrak{r}\xi - \mathfrak{p}\zeta = \varphi'(\xi\cos\nu' - \zeta\cos\lambda') \\ u_\zeta &= \mathfrak{p}\eta - \mathfrak{q}\xi = \varphi'(\eta\cos\lambda' - \xi\cos\mu') \end{aligned}\right\}, \qquad (128.$$

und damit und mittels der Gleichung:

$$v = \sqrt{u_\xi^2 + u_\eta^2 + u_\zeta^2}$$

ergibt sich

$$v = \varphi'\sqrt{(\eta\cos\lambda' - \xi\cos\mu')^2 + (\xi\cos\nu' - \zeta\cos\lambda')^2 + (\zeta\cos\mu' - \eta\cos\nu')^2},$$

also auch durch Vergleichung der vorhergefundenen Werthe von v und w mit diesem letztern

$$\varphi = \varphi' = \sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2},$$

$$\mathfrak{p} = \varphi\cos\lambda' , \quad \mathfrak{q} = \varphi\cos\mu' , \quad \mathfrak{r} = \varphi\cos\nu' .$$

Aus den Gleichungen (128) schließt man ferner, daß die Quotienten

$$\frac{\zeta \cos \mu' - \eta \cos \nu'}{w}, \quad \frac{\xi \cos \nu' - \zeta \cos \lambda'}{w}, \quad \frac{\eta \cos \lambda' - \xi \cos \mu'}{w}$$

nach der Reihe die Cosinus der Winkel l, m, n ausdrücken, welche die Richtung der Geschwindigkeit v oder der Winkelgeschwindigkeit φ mit den beweglichen Achsen bildet, und ich bemerke bei dieser Gelegenheit, daß alle diese Cosinus, welche bisher vorgekommen sind, eigentlich mit doppelten Zeichen versehen werden müßten; man wird sich aber leicht überzeugen — immer unter der Voraussetzung, daß die drehende Bewegung als positive zu betrachten ist, wenn sie, von den positiven Achsen der ξ, η oder ζ aus angesehen, im Sinne eines Uhrzeigers vor sich geht — namentlich dadurch, daß man die augenblickliche Drehungsachse nach und nach mit den Coordinatenachsen zusammenfallen läßt, daß alle Werthe, wie sie bisher vorgeführt wurden, nur positiv zu nehmen sind, und daß demnach auch die Winkel λ', μ', ν' oder λ, μ, ν nur diejenige Hälfte der augenblicklichen Drehungsachse betreffen, von welcher aus angesehen die drehende Bewegung des Systems im Sinne eines Uhrzeigers vor sich gehen will. Vergleicht man dann die obigen Quotienten mit den in §. 21 der Einleitung gefundenen Ausdrücken, so sieht man, daß die genannte Richtung der Geschwindigkeit zu zwei Geraden senkrecht ist, von denen die eine durch den Anfangspunkt und den Punkt M oder $\xi \eta \zeta$ geht, und die andere die Winkel λ', μ', ν' mit den Coordinatenachsen bildet, also senkrecht zu einer Ebene, welche durch den Punkt M und durch die augenblickliche Drehungsachse geht, wie dies offenbar sein muß.

Denkt man sich ferner die Winkelgeschwindigkeit φ, welche alle Punkte des Systems in dem betreffenden Augenblicke gemeinschaftlich haben und deren Richtung senkrecht zur augenblicklichen Drehungsachse ist, in Längeneinheiten auf diese Achse aufgetragen, gerade wie wir die Richtung und Intensität einer drehenden Kraft durch eine auf deren Achse aufgetragene Länge bestimmt haben, so wird man einsehen, daß die mit p, q, r bezeichneten Größen die Projectionen auf die beweglichen Achsen von der in solcher Weise anschaulich gemachten augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ vorstellen, und man wird dadurch nothwendig darauf geführt, die drehende Bewegung eines Systems um seine augenblickliche Drehungsachse, ebenso wie eine drehende Kraft, in drei neue drehende Bewegungen, deren Achsen unter sich rechtwinklig sind und mit den Coordinatenachsen zusammenfallen, zu zerlegen, oder vielmehr sich dieselbe als zerlegbar und zerlegt

vorzustellen; die Größen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ sind dann die entsprechenden augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten für diese neuen drehenden Bewegungen oder für diese rechtwinkligen Componenten der augenblicklichen drehenden Bewegung des Systems. *)

Will man nach diesem die Bewegung oder die Winkelgeschwindigkeit des Systems um die augenblickliche Drehungsachse nun auch nach den festen Coordinatenachsen zerlegen, so erhält man

$$\varphi \cos\lambda \quad , \qquad \varphi \cos\mu \quad , \qquad \varphi \cos\nu$$

oder mit den am Ende des vorigen §. zusammengestellten Werthen von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_x &= a\mathfrak{p} + a'\mathfrak{q} + a''\mathfrak{r} \\ \varphi_y &= b\mathfrak{p} + b'\mathfrak{q} + b''\mathfrak{r} \\ \varphi_z &= c\mathfrak{p} + c'\mathfrak{q} + c''\mathfrak{r} \end{aligned}\right\} \qquad (e.$$

als Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeiten φ_x, φ_y, φ_z um die Achsen der x, y und z, welche sich übrigens auch unmittelbar dadurch ergeben, daß man jede der drei Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ um die beweglichen Achsen in drei neue Componenten nach den festen Achsen zerlegt und die Componenten in jeder Achse durch Addition zu einer resultirenden Winkelgeschwindigkeit φ_x, φ_y oder φ_z vereinigt.

§. 187.

Suchen wir nun weiter die Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und den drei unter sich unabhängigen Winkeln ω, ϑ, ψ, durch welche die Lage des beweglichen Coordinatensystems in Bezug auf das feste bestimmt wird.

---

*) Es kann unter dieser Zerlegung natürlich nicht verstanden werden, daß sich das System gleichzeitig um drei verschiedene Achsen drehen könne, ebensowenig als man sagen will, daß sich ein materieller Punkt gleichzeitig nach drei verschiedenen Geraden bewege; wir werden vielmehr unter diesen Componenten der drehenden Bewegung die Bewegungen der Projectionen sämmtlicher Punkte des Systems in drei zu den Drehungsachsen senkrechten Ebenen verstehen, wie dies auch schon bei einem einzelnen materiellen Punkte der Fall war (I. Buch, §. 71), wo dessen Bewegung als eine um den Anfangspunkt der Coordinaten vor sich gehende, also wie eine drehende Bewegung betrachtet wurde.

Aus der in §. 23 der Einleitung aufgestellten Tabelle der Werthe von a, a′, a″, b, etc. in Function der Winkel ω, ϑ, ψ zieht man zuerst die Aenderungsgesetze dieser Grössen in Bezug auf die Zeit; man findet z. B.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}(\sin\omega\cos\psi\cos\vartheta + \cos\omega\sin\psi)$$
$$-\frac{d\vartheta}{dt}.\cos\omega\cos\psi\cos\vartheta$$
$$-\frac{d\psi}{dt}(\cos\omega\sin\psi\cos\vartheta + \sin\omega\cos\psi)$$

und so auch die übrigen. Führt man dann jene Werthe selbst und diese Aenderungsgesetze in die Gleichungen:

$$\mathfrak{p} = a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}$$
$$\mathfrak{q} = a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}$$
$$\mathfrak{r} = a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}$$

ein, so findet man nach zahlreichen Reductionen folgende einfache Werthe für die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in Function der Winkel ω, ϑ, ψ und ihrer Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit:

$$129.)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{p} &= -\frac{d\omega}{dt}\cos\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,, \\ \mathfrak{q} &= \frac{d\omega}{dt}\sin\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\cos\psi\,, \\ \mathfrak{r} &= \frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\psi}{dt}\,. \end{aligned}\right.$$

Viel einfacher gelangt man aber zu diesen Werthen, sowie zu denen der Componenten φ_x, φ_y, φ_z um die festen Achsen mittels der vorhergehenden Betrachtung über die Zerlegung der drehenden Bewegung und ihrer Winkelgeschwindigkeit, indem man dabei das in §. 22 der Einleitung zu Grunde gelegte Verfahren und die Figur 108 zu Hülfe nimmt. Nach diesem letztern kann nämlich die Aenderung in der Lage des beweglichen Coordinatensystems als aus drei gleichzeitigen drehenden Bewegungen um die Achsen AZ, AY_2 und AZ′ bestehend angesehen

werden, und die Winkelgeschwindigkeiten dieser drehenden Bewegungen sind offenbar:

$$\frac{d\omega}{dt}\ ,\quad \frac{d\vartheta}{dt}\ ,\quad \frac{d\psi}{dt}\ .$$

Denkt man sich nun jede dieser Winkelgeschwindigkeiten auf die entsprechende der genannten Achsen als Längen aufgetragen, dann in drei Componenten nach den festen oder beweglichen Achsen zerlegt und in jeder dieser letztern die darauf treffenden Componenten zu einer Resultirenden vereinigt, so muß man dadurch entweder die Winkelgeschwindigkeiten φ_x, φ_y, φ_z um die festen Achsen oder die Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ um die beweglichen Achsen wieder erhalten.

Wählen wir zuerst die Zerlegung nach den festen Achsen der x, y, z, nämlich nach AX, AY, AZ, Fig. 108, und beachten wir, daß die Achse AZ für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ eine dieser festen Achsen selbst ist, ferner daß die Achse AY_2 für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ mit der Achse AY den Winkel ω, mit der AX den Winkel $\frac{1}{2}\pi + \omega$ und mit der Achse AZ den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ bildet, endlich daß die Achse AZ′ für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ mit den festen Achsen die Winkel $\widehat{\zeta x}$, $\widehat{\zeta y}$, $\widehat{\zeta z}$ macht, deren Cosinus a″, b″, c″ sind; wir erhalten darnach für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ um die Achse AZ die drei Componenten:

$$0\ ,\qquad 0\ ,\qquad \frac{d\omega}{dt}\ ,$$

für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ um die Achse AY_2 die Componenten:

$$-\frac{d\vartheta}{dt}\sin\omega\ ,\qquad \frac{d\vartheta}{dt}\cos\omega\ ,\qquad 0$$

und für die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ um die Achse AZ′ als Componenten um die festen Achsen AX, AY, AZ

$$a''\frac{d\psi}{dt}\ ,\qquad b''\frac{d\psi}{dt}\ ,\qquad c''\frac{d\psi}{dt}\ .$$

Daraus folgen dann die resultirenden Winkelgeschwindigkeiten um diese letztern Achsen durch einfache Addition, und zwar hat man mit den Werthen von a″, b″, c″ die Gleichungen:

130.)
$$\begin{cases} \varphi_x = -\frac{d\vartheta}{dt}\sin\omega + \frac{d\psi}{dt}\cos\omega\sin\vartheta\,, \\ \varphi_y = \frac{d\vartheta}{dt}\cos\omega + \frac{d\psi}{dt}\sin\omega\sin\vartheta\,, \\ \varphi_z = \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta\,, \end{cases}$$

welche die Beziehungen zwischen den augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten φ_x, φ_y, φ_z um die festen Achsen und den Winkeln ω, ϑ, ψ ausdrücken. Man könnte nun auch aus diesen mittels der am Ende des vorigen §. erhaltenen Werthe von φ_x, φ_y, φ_z in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ durch die gewöhnliche Eliminationsmethode ohne sehr große Rechnung die obigen Ausdrücke für die letztern Winkelgeschwindigkeiten ableiten; wir wollen aber auch diese Ausdrücke unmittelbar durch die Zerlegung der Winkelgeschwindigkeiten $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ herstellen.

Dazu haben wir zu beachten, daß die Achse AZ für die erste dieser Winkelgeschwindigkeiten mit den beweglichen Achsen die Winkel $\widehat{z\xi}$, $\widehat{z\eta}$, $\widehat{z\zeta}$ einschließt, deren Cosinus c, c′, c″ sind, daß ferner die Achse AY_2 der zweiten Winkelgeschwindigkeit mit der Achse AX′ den Winkel $\frac{1}{2}\pi + \psi$, mit AY′ den Winkel ψ, mit AZ′ den Winkel $\frac{1}{2}\pi$ bildet, endlich daß die Achse AZ′ der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\psi}{dt}$ eine der beweglichen Achsen selbst ist; wir erhalten demzufolge nach der Reihe die Componenten:

$$c\frac{d\omega}{dt}\,,\quad c'\frac{d\omega}{dt}\,,\quad c''\frac{d\omega}{dt}\ \text{für}\ \frac{d\omega}{dt}\,,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,,\quad \frac{d\vartheta}{dt}\cos\psi\,,\quad 0\ \text{für}\ \frac{d\vartheta}{dt}\ \text{und}$$

$$0\,,\quad 0\,,\quad \frac{d\psi}{dt}\ \text{für}\ \frac{d\psi}{dt}\,,$$

und damit ergeben sich, wenn man für c, c′, c″ ihre Werthe:

$$c = -\cos\psi\sin\vartheta\,,\quad c' = \sin\psi\sin\vartheta\,,\quad c'' = \cos\vartheta$$

einführt, die obigen Ausdrücke für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ als resultirende Winkelgeschwindigkeiten um die beweglichen Achsen durch einfache Addition der übereinanderstehenden Componenten. Die Vergleichung dieser letztern Werthe mit denen von φ_x, φ_y, φ_z zeigt, daß auch hier, wie bei den Umwandlungsformeln der Coordinaten (Einl. §. 22) die einen aus den andern durch Vertauschung der Winkel ω und ψ und durch den Zeichenwechsel der Sinus hervorgehen.

§. 188.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich sehr einfach noch einige beachtenswerthe Beziehungen zwischen den bisher behandelten Größen.

Zerlegt man jede der Geschwindigkeiten u_ξ, u_η, u_ζ nach den festen Achsen in die rechtwinkligen Componenten:

$$\begin{array}{ccc} a u_\xi \, , & b u_\xi \, , & c u_\xi \, , \\ a' u_\eta \, , & b' u_\eta \, , & c' u_\eta \, , \\ a'' u_\zeta \, , & b'' u_\zeta \, , & c'' u_\zeta \, , \end{array}$$

so geben die Summen der übereinanderstehenden Componenten längs derselben Achse die Geschwindigkeiten u_x, u_y, u_z; man hat also

$$\left.\begin{array}{l} u_x = a u_\xi + a' u_\eta + a'' u_\zeta \\ u_y = b u_\xi + b' u_\eta + b'' u_\zeta \\ u_z = c u_\xi + c' u_\eta + c'' u_\zeta \end{array}\right\} .$$

Führt man dann in diese Gleichungen für u_x, u_y, u_z oder $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ deren Werthe aus den Gleichungen (b), für u_ξ, u_η, u_ζ die Werthe aus den Gleichungen (128) ein und setzt die Coeffizienten von ξ, η und ζ einander gleich, so ergeben sich folgende neun Gleichungen zwischen den Aenderungsgesetzen der neun Cosinus a, a', a'', etc. in Bezug auf die Zeit, diesen Cosinus selbst und den Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{da}{dt} = a'\mathfrak{r} - a''\mathfrak{q} \, , & \frac{da'}{dt} = a''\mathfrak{p} - a\mathfrak{r} \, , & \frac{da''}{dt} = a\mathfrak{q} - a'\mathfrak{p} \\ \frac{db}{dt} = b'\mathfrak{r} - b''\mathfrak{q} \, , & \frac{db'}{dt} = b''\mathfrak{p} - b\mathfrak{r} \, , & \frac{db''}{dt} = b\mathfrak{q} - b'\mathfrak{p} \\ \frac{dc}{dt} = c'\mathfrak{r} - c''\mathfrak{q} \, , & \frac{dc'}{dt} = c''\mathfrak{p} - c\mathfrak{r} \, , & \frac{dc''}{dt} = c\mathfrak{q} - c'\mathfrak{p} \end{array}\right\} . \text{(b.}$$

Multiplicirt man endlich die drei Gleichungen jeder Zeile der Reihe nach mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und nimmt ihre Summe, so folgen die Ausdrücke:

$$g.)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}\dfrac{da}{dt} + \mathfrak{q}\dfrac{da'}{dt} + \mathfrak{r}\dfrac{da''}{dt} = 0\,, \\[2ex] \mathfrak{p}\dfrac{db}{dt} + \mathfrak{q}\dfrac{db'}{dt} + \mathfrak{r}\dfrac{db''}{dt} = 0\,, \\[2ex] \mathfrak{p}\dfrac{dc}{dt} + \mathfrak{q}\dfrac{dc'}{dt} + \mathfrak{r}\dfrac{dc''}{dt} = 0\,, \end{array}\right.$$

und mit diesen zieht man aus den Gleichungen (e) die Aenderungsgesetze:

$$h.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi_x}{dt} = a\dfrac{d\mathfrak{p}}{dt} + a'\dfrac{d\mathfrak{q}}{dt} + a''\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}\,, \\[2ex] \dfrac{d\varphi_y}{dt} = b\dfrac{d\mathfrak{p}}{dt} + b'\dfrac{d\mathfrak{q}}{dt} + b''\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}\,, \\[2ex] \dfrac{d\varphi_z}{dt} = c\dfrac{d\mathfrak{p}}{dt} + c'\dfrac{d\mathfrak{q}}{dt} + c''\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt}\,. \end{array}\right.$$

Denkt man sich also die Aenderungsgesetze $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{q}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ und $\frac{d\varphi_x}{dt}$, $\frac{d\varphi_y}{dt}$, $\frac{d\varphi_z}{dt}$ durch ein gemeinschaftliches Massemoment mk^2 multiplicirt und stellt sich die Producte gemäß der Gleichung (A) in §. 158 als Maaße drehender Kräfte vor, von denen die drei ersten ihre Achsen den beweglichen, die drei letzten den festen Coordinaten-Achsen parallel haben, so folgt aus den Gleichungen (h), daß alle diese Producte die Componenten derselben drehenden Kraft

$$mk^2\frac{d\varphi}{dt}$$

sind, deren Achse mit der augenblicklichen Drehungsachse zusammenfällt.

Ferner zeigen diese Gleichungen in Verbindung mit den in §. 185 gefundenen Beziehungen, daß wenn die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ während der Bewegung unverändert bleiben, auch die Winkelgeschwindigkeit φ und die Winkel λ', μ', ν', ebenso auch die Winkel λ, μ, ν immer dieselben Werthe behalten, daß also die Drehungsachse sowohl im System selbst, d. h. gegen die beweglichen Coordinatenachsen, als überhaupt im Raume oder gegen das feste Coordinatensystem eine unveränderliche Lage behält, und daß demnach die Bewegung des Systems

dieselbe sein wird, als wenn diese Drehungsachse fest und die um diese Achse drehende Componente des resultirenden Momentes Null ist, und es ist nach dem vorhergehenden Kapitel leicht zu schließen, daß dieses nur stattfinden kann, wenn das resultirende Moment selbst Null und die Drehungsachse eine Hauptachse des Systems in dem festen Punkte ist. Umgekehrt wird eine gleichförmige Bewegung um eine innerhalb des Systems unveränderliche Achse immer constante Werthe für die Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ der Winkelgeschwindigkeit mit sich bringen und demnach diese Drehungsachse auch gegen ein festes Coordinatensystem eine unveränderliche Lage behalten.

§. 189.

Um nun die Beziehungen zwischen den an dem System thätigen Kräften und seiner Lage oder seiner Winkelgeschwindigkeit festzustellen, untersuchen wir zuerst die Beziehungen zwischen den Kräften, welche parallel zu den festen Achsen, und denjenigen, welche parallel zu den beweglichen Achsen an jedem einzelnen Punkte thätig sein müßten, um dessen Bewegung für sich allein, und diesen Punkt als für sich allein bestehend vorausgesetzt, hervorzubringen.

Bezeichnen wir dazu die Masse eines solchen Punktes M, dessen Coordinaten in Bezug auf die festen Achsen am Ende der Zeit t wie bisher x, y, z seien, mit m, so haben wir als Maaße der drei zu den festen Achsen parallel gerichteten Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ einer Kraft $\mathfrak{P}$, welche diesem Punkte M, wenn er für sich allein bestände, dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie er sie jetzt in Verbindung mit dem ganzen System erhält, die Ausdrücke:

$$\mathfrak{X} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du_x}{dt} \quad , \quad \mathfrak{Y} = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{du_y}{dt} \, ,$$

$$\mathfrak{Z} = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{du_z}{dt}$$

und für die drehenden Wirkungen $\mathfrak{M}_z$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_x$ dieser Kraft in Bezug auf die festen Achsen der x, y, z die Werthe:

$$\mathfrak{M}_z = m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) \quad , \quad \mathfrak{M}_y = m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) \, ,$$

$$\mathfrak{M}_x = m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) \, ,$$

und es wird sich nun darum handeln, diese Kräfte auf das veränderliche Coordinatensystem zu beziehen.

Um dies zu erreichen, gehen wir von den in §. 188 gefundenen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} u_x &= a\,u_\xi + a'\,u_\eta + a''\,u_\zeta \\ u_y &= b\,u_\xi + b'\,u_\eta + b''\,u_\zeta \\ u_z &= c\,u_\xi + c'\,u_\eta + c''\,u_\zeta \end{aligned}\right.$$

aus, welche die zu den festen Achsen parallelen Componenten der Geschwindigkeit v des Punktes M durch die zu den beweglichen Achsen parallelen Componenten u_ξ, u_η, u_ζ ausdrücken, und erhalten, indem wir deren Aenderungsgesetze in Bezug auf t mit m multipliciren, für die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Werthe:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= m\left(a\frac{du_\xi}{dt} + a'\frac{du_\eta}{dt} + a''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{da}{dt} + u_\eta\frac{da'}{dt} + u_\zeta\frac{da''}{dt}\right), \\ \mathfrak{Y} &= m\left(b\frac{du_\xi}{dt} + b'\frac{du_\eta}{dt} + b''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{db}{dt} + u_\eta\frac{db'}{dt} + u_\zeta\frac{db''}{dt}\right), \\ \mathfrak{Z} &= m\left(c\frac{du_\xi}{dt} + c'\frac{du_\eta}{dt} + c''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{dc}{dt} + u_\eta\frac{dc'}{dt} + u_\zeta\frac{dc''}{dt}\right). \end{aligned}\right.$$

Die Componenten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ der Kraft $\mathfrak{P}$, parallel zu den beweglichen Achsen, folgen dann aus jenen, die parallel zu den festen Achsen gerichtet sind, wieder durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}' &= a\,\mathfrak{X} + b\,\mathfrak{Y} + c\,\mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{Y}' &= a'\,\mathfrak{X} + b'\,\mathfrak{Y} + c'\,\mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{Z}' &= a''\,\mathfrak{X} + b''\,\mathfrak{Y} + c''\,\mathfrak{Z}. \end{aligned}\right.$$

Führt man daher die vorhergehenden Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in diese Gleichungen ein, und beachtet die Bedingungsgleichungen des §. 185, so findet man

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}' &= m\left(\frac{du_\xi}{dt} + \mathfrak{q}\,u_\zeta - \mathfrak{r}\,u_\eta\right), \\ \mathfrak{Y}' &= m\left(\frac{du_\eta}{dt} + \mathfrak{r}\,u_\xi - \mathfrak{p}\,u_\zeta\right), \\ \mathfrak{Z}' &= m\left(\frac{du_\zeta}{dt} + \mathfrak{p}\,u_\eta - \mathfrak{q}\,u_\xi\right). \end{aligned}\right.$$

Endlich erhält man damit für die drei Momente $\mathfrak{M}_\Xi$, $\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}_Z$ der Kraft $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die beweglichen Achsen die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_\Xi &= \mathfrak{Z}'\eta - \mathfrak{Y}'\zeta = m\left(\eta\frac{du_\zeta}{dt} - \zeta\frac{du_\eta}{dt}\right)\\ &\qquad - mu_\xi(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta) + m\mathfrak{p}(\eta u_\eta + \zeta u_\zeta)\\ \mathfrak{M}_H &= \mathfrak{X}'\zeta - \mathfrak{Z}'\xi = m\left(\zeta\frac{du_\xi}{dt} + \xi\frac{du_\zeta}{dt}\right)\\ &\qquad - mu_\eta(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta) + m\mathfrak{q}(\xi u_\xi + \zeta u_\zeta)\\ \mathfrak{M}_Z &= \mathfrak{Y}'\xi - \mathfrak{X}'\eta = m\left(\xi\frac{du_\eta}{dt} + \eta\frac{du_\xi}{dt}\right)\\ &\qquad - mu_\zeta(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta) + m\mathfrak{r}(\xi u_\xi + \eta u_\eta)\end{aligned}\right\}.$$

Die Werthe (128) von u_ξ, u_η und u_ζ geben aber, wie leicht zu sehen ist, die Gleichung:

$$\xi u_\xi + \eta u_\eta + \zeta u_\zeta = 0\,,$$

welche übrigens auch eine nothwendige Folge der Bedingungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad , \qquad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$$

ist, und die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit t:

$$\frac{du_\xi}{dt} = \zeta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \quad , \qquad \frac{du_\eta}{dt} = \xi\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\,,$$

$$\frac{du_\zeta}{dt} = \eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \xi\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\,,$$

mit welchen man dann nach einigen Reductionen folgende Werthe für die Momente $\mathfrak{M}_\Xi$, $\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}_Z$ in Function der Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes M und der Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ findet:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_\Xi &= m(\eta^2 + \zeta^2)\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - m\xi\eta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - m\xi\zeta\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\\ &\quad - m(\mathfrak{q}\zeta - \mathfrak{r}\eta)(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta)\\ \mathfrak{M}_H &= m(\xi^2 + \zeta^2)\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - m\xi\eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - m\eta\zeta\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\\ &\quad - m(\mathfrak{r}\xi - \mathfrak{p}\zeta)(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta)\\ \mathfrak{M}_Z &= m(\xi^2 + \eta^2)\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - m\xi\zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - m\eta\zeta\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\\ &\quad - m(\mathfrak{p}\eta - \mathfrak{q}\xi)(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta)\end{aligned}\right\}. \quad (131.$$

§. 190.

Aehnliche Ausdrücke, wie die vorhergehenden, werden sich nun für alle übrigen materiellen Punkte des Systems, beziehungsweise für die drehenden Kräfte ergeben, welche die Bewegungen derselben, jeden einzeln gedacht, hervorzubringen im Stande wären, und es ist nun einleuchtend, daß wenn sich jeder Punkt des Systems einzeln vermöge des entsprechenden Momentes der Kraft $\mathfrak{P}$ oder seiner Componenten so bewegt, wie er es in seiner Verbindung mit allen übrigen thut, diese Bewegung oder die Wirkung der Kräfte $\mathfrak{M}_\Xi$, $\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}_Z$ nicht geändert wird, wenn wir nun alle Punkte unter sich in feste Verbindung setzen und alle diese drehenden Kräfte zu drei Hauptcomponenten $\Sigma.\mathfrak{M}_\Xi$, $\Sigma.\mathfrak{M}_H$, $\Sigma.\mathfrak{M}_Z$ vereinigen. Man wird ferner einsehen, daß die aus den Werthen (131) sich ergebenden Ausdrücke dieser Componenten eine viel einfachere Form annehmen werden, wenn man für die mit dem festen System unveränderlich verbundenen Coordinatenachsen der ξ, η, ζ die drei Hauptachsen des Systems in dem Punkte nimmt, um welchen es sich dreht; denn für diese werden die Summen:

$$\Sigma.m\xi\eta \quad , \quad \Sigma.m\xi\zeta \quad , \quad \Sigma.m\eta\zeta$$

Null, und da die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ für alle Punkte des Systems gemeinschaftlich sind, so kommen die Werthe jener Haupt-Componenten für diese Annahme auf folgende zurück:

$$\left\{\begin{aligned}
\Sigma.\mathfrak{M}_\Xi &= \Sigma.m(\eta^2+\zeta^2)\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \mathfrak{q}\mathfrak{r}\Sigma.m(\zeta^2-\eta^2) \ , \\
\Sigma.\mathfrak{M}_H &= \Sigma.m(\zeta^2+\xi^2)\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \mathfrak{p}\mathfrak{r}\Sigma.m(\xi^2-\zeta^2) \ , \\
\Sigma.\mathfrak{M}_Z &= \Sigma.m(\xi^2+\eta^2)\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \mathfrak{p}\mathfrak{q}\Sigma.m(\eta^2-\xi^2) \ .
\end{aligned}\right.$$

Beachtet man dann noch, daß

$$\Sigma.m(\eta^2+\zeta^2)=\mathfrak{A} \ , \quad \Sigma.m(\zeta^2+\xi^2)=\mathfrak{B} \ , \quad \Sigma.m(\xi^2+\eta^2)=\mathfrak{C}$$

die Massemomente des Systems in Bezug auf die genannten Haupt-Achsen vorstellen, und daß man damit auch hat

$$\begin{aligned}
\Sigma.m(\zeta^2-\eta^2) &= \Sigma.m(\xi^2+\zeta^2) - \Sigma.m(\xi^2+\eta^2) = \mathfrak{B}-\mathfrak{C} \ , \\
\Sigma.m(\xi^2-\zeta^2) &= \Sigma.m(\xi^2+\eta^2) - \Sigma.m(\eta^2+\zeta^2) = \mathfrak{C}-\mathfrak{A} \ , \\
\Sigma.m(\eta^2-\xi^2) &= \Sigma.m(\eta^2+\zeta^2) - \Sigma.m(\xi^2+\zeta^2) = \mathfrak{A}-\mathfrak{B} \ ,
\end{aligned}$$

so findet man für jene Hauptcomponenten der drehenden Gesammtwirkung aller Kräfte $\mathfrak{P}$ die einfachen Werthe:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.\mathfrak{M}_{\Xi} &= \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}-\mathfrak{q}\mathfrak{r}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\\ \Sigma.\mathfrak{M}_{H} &= \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}-\mathfrak{p}\mathfrak{r}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\\ \Sigma.\mathfrak{M}_{Z} &= \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}-\mathfrak{p}\mathfrak{q}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\end{aligned}\right\}.$$

Diese Ausdrücke führen nun einfach zu den Gleichungen für die drehende Bewegung des Systems. Denn bezeichnet man die nach den festen Achsen gerichteten fördernden Componenten der an dem Punkte M angreifenden Kraft P mit X, Y, Z, die parallel zu den beweglichen Achsen gerichteten mit X′, Y′, Z′, so hat man immer wieder die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}X' &= aX+bY+cZ\\ Y' &= a'X+b'Y+c'Z\\ Z' &= a''X+b''Y+c''Z\end{aligned}\right\},$$

und wenn man dann voraussetzt, daß X, Y, Z nur als Functionen der Veränderlichen x, y, z und v gegeben seien, in welcher Voraussetzung alle in der Natur vorkommenden Kräfte enthalten sind, so wird man in diese Functionen zuerst für x, y, z ihre Werthe (a) in §. 184 einführen, v durch seine zu den beweglichen Achsen parallelen Componenten u_ξ, u_η, u_ζ oder deren Werthe (128) ersetzen und dann daraus mittels der vorhergehenden Gleichungen die Werthe der Componenten X′, Y′, Z′ ableiten, welche auf diese Weise durch die von der Zeit unabhängigen Coordinaten ξ, η, ζ, durch die mit der Zeit veränderlichen Cosinus a, b, c, a′, etc. und durch die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{r}$ ausgedrückt erscheinen, also für die Bewegung nur noch Functionen dieser letztern und der Winkel ω, ϑ, ψ sind, von denen jene Cosinus abhängen. Dasselbe wird dann auch mit den drehenden Wirkungen der Kraft P und aller übrigen Kräfte des Systems und folglich mit ihrem resultirenden Momente $\Sigma.M_R$ in Bezug auf den festen Punkt und mit seinen Componenten:

$$\Sigma.M_{\Xi} = \Sigma(Z'\eta - Y'\zeta)\quad,\qquad \Sigma.M_{H} = \Sigma(X'\zeta - Z'\xi)\,,$$

$$\Sigma.M_{Z} = \Sigma(Y'\xi - X'\eta)$$

in Bezug auf die beweglichen Achsen der Fall sein, d. h. es werden auch diese durch ähnliche Umwandlungen im Allgemeinen als Functionen von den Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und den Richtungswinkeln ω, ϑ und ψ dieser beweglichen Achsen erscheinen.

Das Ergebniß der Gesammtwirkung dieser Momente ist natürlich ebenso wie das der Momente $\Sigma . M_X$, $\Sigma . M_Y$, $\Sigma . M_Z$ die stattfindende Bewegung des Systems um den festen Punkt, und demnach ist diese Gesammtwirkung nothwendig dieselbe, wie die der Momente $\Sigma . \mathfrak{M}_X$, $\Sigma . \mathfrak{M}_Y$, $\Sigma . \mathfrak{M}_Z$ oder der Momente $\Sigma . \mathfrak{M}_{\Xi}$, $\Sigma . \mathfrak{M}_{H}$, $\Sigma . \mathfrak{M}_{Z}$ oder kurz wie die des resultirenden Momentes $\Sigma . \mathfrak{M}_R$ aller Kräfte $\mathfrak{P}$, von denen vorausgesetzt wurde, daß sie dieselbe Bewegung hervorbringen; wir erhalten folglich auf der einen Seite in Bezug auf die festen Achsen die Gleichungen:

$$132.)\ \begin{cases} \Sigma . \mathfrak{M}_Z = \Sigma . M_Z \\ \Sigma . \mathfrak{M}_Y = \Sigma . M_Y \\ \Sigma . \mathfrak{M}_X = \Sigma . M_X \end{cases} \text{oder} \begin{cases} \Sigma . m\left(x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}\right) = \Sigma(xY - yX) \\ \Sigma . m\left(z\frac{d^2 x}{dt^2} - x\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ) \\ \Sigma . m\left(y\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY) \end{cases}$$

und auf der andern Seite in Bezug auf die beweglichen Achsen die Ausdrücke:

$$133.)\ \begin{cases} \Sigma . \mathfrak{M}_{\Xi} = \Sigma . M_{\Xi} \\ \Sigma . \mathfrak{M}_{H} = \Sigma . M_{H} \\ \Sigma . \mathfrak{M}_{Z} = \Sigma . M_{Z} \end{cases} \text{oder} \begin{cases} \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\mathfrak{q}\mathfrak{r} + \Sigma . M_{\Xi} \\ \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{p}\mathfrak{r} + \Sigma . M_{H} \\ \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \Sigma . M_{Z} \end{cases}$$

als die gesuchten Gleichungen für die drehende Bewegung des Systems, von denen die drei letztern die verlangten Beziehungen zwischen den gegebenen, an dem System thätigen Kräfte, seiner Winkelgeschwindigkeit und seiner Lage am Ende der Zeit t ausdrücken und deßhalb für die Untersuchung besonderer Fälle besonders geeignet sind. Um aber daraus die Winkelgeschwindigkeit und die Lage für irgend eine Zeit bestimmen zu können, muß man mit denselben im Allgemeinen noch die Gleichungen (129), nämlich

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{p} &= -\frac{d\omega}{dt}\cos\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi \\ \mathfrak{q} &= \frac{d\omega}{dt}\sin\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi \\ \mathfrak{r} &= \frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\psi}{dt}\end{aligned}\right\} \quad (129.$$

verbinden, um daraus zuerst die Zeit t zu eliminiren und die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in Function der Winkel ω, ϑ und ψ auszudrücken, mit welchen Ergebnissen dann aus den vorstehenden Gleichungen diese Winkel selbst in Function der Zeit erhalten, also die Lage der drei Hauptachsen des Systems für den festen Punkt für irgend einen Werth von t bestimmt werden kann. Nach diesem geben dann die vorstehenden Gleichungen (129) auch die Werthe der Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ der Winkelgeschwindigkeit φ in Function der Zeit und damit nach §. 185 die Lage der Drehungsachse für irgend einen Zeitpunkt.

Die Form dieser Gleichungen zeigt übrigens, daß ihre Integration bedeutenden Schwierigkeiten unterworfen ist, und man wird es dadurch erklärlich finden, warum dieselben bis jetzt nur auf wenige einfache Fälle und selbst da meistens nur näherungsweise angewendet werden konnten.

§. 191.

Der einfachste Fall ist offenbar wieder derjenige, wo keine Kräfte oder wenigstens keine drehenden Kräfte an dem System thätig sind.

Für diesen Fall kommen die Gleichungen (133) auf die einfacheren:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,\mathfrak{q}\mathfrak{r} \\ \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\mathfrak{r} \\ \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\end{aligned}\right\} \quad (a.$$

zurück, aus welchen sich leicht zwei bemerkenswerthe Ergebnisse ziehen lassen. Multiplicirt man nämlich diese Gleichungen der Reihe nach mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$, so gibt ihre Summe die Gleichung:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{C}\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0\,,$$

deren Integral zwischen den Grenzen t und 0:

$$\overset{t}{\underset{0}{\Delta}} \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}^2) = 0 ,$$

wenn man den anfänglichen Werth:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}_0{}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}_0{}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}_0{}^2$$

durch h ersetzt, die Form annimmt:

b.) $$\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}^2 = h .$$

Multiplicirt man dagegen die drei Gleichungen (a) der Reihe nach mit $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{r}$, so gibt ihre Summe die Gleichung:

$$\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{C}^2\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0 ,$$

deren Integral zwischen denselben Grenzen wie oben die Form:

c.) $$\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2 = k^2$$

erhalten wird, wenn man den anfänglichen Werth:

$$\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}_0{}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}_0{}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{r}_0{}^2$$

durch k^2 ersetzt.

Um nun die Bedeutung dieser Ergebnisse zu finden, setzen wir in die Gleichung (b) für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ihre Werthe:

$$\mathfrak{p} = \varphi \cos\lambda' \quad , \quad \mathfrak{q} = \varphi \cos\mu' \quad , \quad \mathfrak{r} = \varphi \cos\nu' ,$$

worin λ', μ', ν' die Winkel zwischen der augenblicklichen Drehungs-Achse und den drei Hauptachsen des Systems in dem festen Punkte bezeichnen; dadurch wird dieselbe

$$\varphi^2 (\mathfrak{A}\cos^2\lambda' + \mathfrak{B}\cos^2\mu' + \mathfrak{C}\cos^2\nu') = h ,$$

und mit der Beachtung, daß der eingeklammerte Factor nach §. 164 (122) das Massemoment $\mathfrak{M}$ oder $\Sigma . mw^2$ des Systems in Bezug auf die augenblickliche Drehungsachse ausdrückt, schließt man daraus

$$\mathfrak{M}\varphi^2 = \Sigma . mw^2\varphi^2 = h .$$

Man hat aber auch, wenn v die fördernde Geschwindigkeit eines Punktes bezeichnet, dessen Masse m und dessen Entfernung von der augenblicklichen Drehungsachse w ist, $v^2 = w^2\varphi^2$, und die Gleichung (b) nimmt damit die Form:

$$\Sigma . mv^2 = h = \Sigma . mv_0{}^2$$

an, unter welcher sie ausdrückt, daß die Summe der lebendigen Kräfte aller Punkte des Systems unveränderlich ist, und daß die Größe h die Summe der lebendigen Kräfte am Anfang der Zeit t vorstellt.

Um ebenso die zweite Gleichung (c) zu erklären, sei P eine Kraft, welche die Bewegungsgröße $mv = mw\varphi$ eines materiellen Punktes von der Masse m, dessen Coordinaten in Bezug auf die drei Haupt-Achsen ξ, η, ζ sind, in der Einheit der Zeit erzeugen kann (I. Buch §. 41), welche also auch dieselbe Richtung hat, wie die augenblickliche Geschwindigkeit, d. h. die Richtung, welche durch die Winkel l, m, n (§. 186) bestimmt wird. Die Momente dieser Kraft in Bezug auf die genannten Achsen sind demnach

$$P(\xi \cos m - \eta \cos l)\ ,\quad P(\zeta \cos l - \xi \cos n)\ ,\quad P(\eta \cos n - \zeta \cos m)$$

und wenn man für $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ ihre Werthe aus §. 186, nämlich

$$\cos l = \frac{\zeta \cos\mu' - \eta \cos\nu'}{w}\ ,\qquad \cos m = \frac{\xi \cos\nu' - \zeta \cos\lambda'}{w}\ ,$$

$$\cos n = \frac{\eta \cos\lambda' - \xi \cos\mu'}{w}\ .$$

einführt, so nehmen sie die Form an:

$$\left.\begin{aligned} &P\,\frac{(\xi^2+\eta^2)\cos\nu' - (\xi\zeta\cos\lambda' + \eta\zeta\cos\mu')}{w} \\ &P\,\frac{(\xi^2+\zeta^2)\cos\mu' - (\xi\eta\cos\lambda' + \eta\zeta\cos\nu')}{w} \\ &P\,\frac{(\eta^2+\zeta^2)\cos\lambda' - (\xi\eta\cos\mu' + \xi\zeta\cos\nu')}{w} \end{aligned}\right\}\ .$$

Setzt man dann wieder für P seinen Werth $mw\varphi$ und nimmt die Summen aller ähnlichen Momente des Systems in Bezug auf dieselbe Achse, so findet man mit der Beachtung, daß die Functionen $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, sowie die Winkelgeschwindigkeit φ für alle Punkte des Systems gemeinschaftlich sind, und daß man hat

$$\Sigma.m(\xi^2+\eta^2) = \mathfrak{C}\ ,\quad \Sigma.m(\zeta^2+\xi^2) = \mathfrak{B}\ ,\quad \Sigma.m(\eta^2+\zeta^2) = \mathfrak{A}\ ,$$

$$\Sigma.m\xi\eta = 0\ ,\quad \Sigma.m\xi\zeta = 0\ ,\quad \Sigma.m\eta\zeta = 0\ ,$$

als resultirende Momente aller Kräfte, welche die Bewegungsgrößen sämmtlicher Punkte des Systems in der Einheit der Zeit erzeugen können, oder mit andern Worten als rechtwinklige Componenten des

resultirenden Momentes aller Bewegungsgrößen des Systems um die drei Hauptachsen desselben die Werthe:

$$\Sigma . m(\xi^2 + \eta^2) . \varphi \cos\nu' = \mathfrak{C}\mathfrak{r} \quad \text{um die Achse der } \zeta ,$$

$$\Sigma . m(\zeta^2 + \xi^2) . \varphi \cos\mu' = \mathfrak{B}\mathfrak{q} \quad \text{um die Achse der } \eta ,$$

$$\Sigma . m(\eta^2 + \zeta^2) . \varphi \cos\lambda' = \mathfrak{A}\mathfrak{p} \quad \text{um die Achse der } \xi ,$$

und demnach als resultirendes Moment der Bewegungsgrößen selbst

$$\Sigma . M_{mv} = \sqrt{\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2} .$$

Am Anfang der Zeit war also

$$\Sigma . M_{mv_0} = \sqrt{\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}_0{}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}_0{}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{r}_0{}^2} = k ,$$

und die Gleichung (c) spricht demnach aus, daß dieses resultirende Moment aller Bewegungsgrößen für die ganze Dauer der Bewegung unverändert bleibt.

Die Achse dieses resultirenden Momentes fällt übrigens nicht mit der augenblicklichen Drehungsachse zusammen; denn die Cosinus der Winkel $l_{\prime}'$, $m_{\prime}'$, $n_{\prime}'$, welche sie mit den drei Hauptachsen bildet, sind

$$\text{e.)} \quad \cos l_{\prime}' = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{k} , \qquad \cos m_{\prime}' = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{k} , \qquad \cos n_{\prime}' = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{k}$$

oder mit den Werthen von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ als Componenten von φ

$$\left\{ \begin{aligned} \cos l_{\prime}' &= \cos\lambda' \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\cos^2\lambda' + \mathfrak{B}^2\cos^2\mu' + \mathfrak{C}^2\cos^2\nu'}} , \\ \cos m_{\prime}' &= \cos\mu' \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\cos^2\lambda' + \mathfrak{B}^2\cos^2\mu' + \mathfrak{C}^2\cos^2\nu'}} , \\ \cos n_{\prime}' &= \cos\nu' \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\cos^2\lambda' + \mathfrak{B}^2\cos^2\mu' + \mathfrak{C}^2\cos^2\nu'}} , \end{aligned} \right.$$

also im Allgemeinen verschieden von den Cosinus der Winkel λ', μ', ν', durch welche die Richtung der augenblicklichen Drehungsachse im System bestimmt wird. Der Cosinus des Winkels ε, welchen diese letztere Achse mit jener Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen bildet, wird nach diesen Werthen durch

$$\cos \varepsilon = \cos \lambda' \cos \mathrm{l}_,' + \cos \mu' \cos \mathrm{m}_,' + \cos \nu' \cos \mathrm{n}_,'$$

$$= \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}^2}{\varphi \sqrt{\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2}} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{k}\varphi}$$

ausgedrückt, woraus man die Gleichung:

$$\varphi \cos \varepsilon = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{k}}$$

zieht, welche zeigt, daß die Projection der Winkelgeschwindigkeit φ auf die Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen für alle Lagen des Systems einen unveränderlichen Werth hat.

Bestimmt man ferner die Cosinus der Winkel $\mathrm{l}_,$, $\mathrm{m}_,$, $\mathrm{n}_,$, welche die Achse des eben genannten Momentes mit den drei festen Coordinatenachsen der x, y, z macht, so findet man wie früher im ähnlichen Falle die Werthe:

$$\cos \mathrm{l}_, = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}\mathrm{a} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}\mathrm{a}' + \mathfrak{C}\mathfrak{r}\mathrm{a}''}{\mathrm{k}}, \quad \cos \mathrm{m}_, = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}\mathrm{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}\mathrm{b}' + \mathfrak{C}\mathfrak{r}\mathrm{b}''}{\mathrm{k}},$$

$$\cos \mathrm{n}_, = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}\mathrm{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}\mathrm{c}' + \mathfrak{C}\mathfrak{r}\mathrm{c}''}{\mathrm{k}},$$

und es läßt sich leicht zeigen, daß diese Werthe unveränderlich sind. Denn der Zähler des Werthes von $\cos \mathrm{l}$, z. B. gibt in Bezug auf die Zeit t das Aenderungsgesetz:

$$\mathrm{k}\frac{\mathrm{d}.\cos \mathrm{l}_,}{\mathrm{dt}} = \mathfrak{A}\mathfrak{p}\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dt}} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}\frac{\mathrm{da}'}{\mathrm{dt}} + \mathfrak{C}\mathfrak{r}\frac{\mathrm{da}''}{\mathrm{dt}} + \mathfrak{A}\mathrm{a}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{dt}} + \mathfrak{B}\mathrm{a}'\frac{\mathrm{d}\mathfrak{q}}{\mathrm{dt}} + \mathfrak{C}\mathrm{a}''\frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{dt}};$$

führt man dann hier für $\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dt}}$, $\frac{\mathrm{da}'}{\mathrm{dt}}$, $\frac{\mathrm{da}''}{\mathrm{dt}}$ die Werthe (f) in §. 188, für $\mathfrak{A}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{p}}{\mathrm{dt}}$, $\mathfrak{B}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{q}}{\mathrm{dt}}$, $\mathfrak{C}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}}{\mathrm{dt}}$ die Werthe (a) ein, so ergibt sich

$$\mathrm{k}\frac{\mathrm{d}.\cos \mathrm{l}_,}{\mathrm{dt}} = 0 \;, \quad \text{also auch} \quad \Delta.\cos \mathrm{l}_, = 0 \;.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$\Delta.\cos \mathrm{m}_, = 0 \quad, \quad \Delta.\cos \mathrm{n}_, = 0$$

und schließt daraus, daß die Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen während der Bewegung unveränderlich dieselbe Lage behält, welche sie am Anfang der

Zeit hatte. Stellt also diese Achse durch ihre Länge auch die Intensität des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ vor, so wird sie nach dem Vorhergehenden sowohl der Größe als Richtung nach unveränderlich sein.

§. 192.

Die gegenseitigen Beziehungen zwischen der Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen und der augenblicklichen Drehungsachse des Systems ergeben sich am anschaulichsten mittels des in §. 163 erhaltenen Ellipsoids der Massemomente, nämlich mittels des Ellipsoids, dessen Fahrstrahl vom Mittelpunkte aus der Quadratwurzel aus dem Massemoment des Systems, in Bezug auf ihn selbst als Drehungsachse genommen, verkehrt proportional ist, dessen Gleichung demnach in Bezug auf den festen Punkt als Mittelpunkt und in Bezug auf die Hauptachsen und beweglichen Coordinatenachsen der ξ, η, ζ die Form hat (121):

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = 1 \,.$$

Die Normale in einem Punkte $\xi\eta\zeta$ dieser Fläche wird nämlich nach §. 34 der Einl. durch die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} y_1 - \eta &= \frac{\mathfrak{B}\eta}{\mathfrak{A}\xi}(x_1 - \xi) \,, \\ z_1 - \zeta &= \frac{\mathfrak{C}\zeta}{\mathfrak{A}\xi}(x_1 - \xi) \,, \end{aligned} \right.$$

der Fahrstrahl zu demselben Punkte dagegen durch die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} y_2 &= \frac{\eta}{\xi} x_2 \\ z_2 &= \frac{\zeta}{\xi} x_2 \end{aligned} \right.$$

bestimmt, und man sieht leicht, daß von diesen beiden Geraden die erstere, die Normale, zur Achse des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ parallel wird, und die zweite, der Fahrstrahl, mit der augenblicklichen Drehungsachse zusammenfällt, wenn

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} \quad , \quad \frac{\zeta}{\xi} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}}$$

wird. Daraus folgt, daß wenn man an das Ellipsoid der Massemomente eine berührende Ebene legt, welche zur

Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen senkrecht ist, der zum Berührungspunkte gezogene Fahrstrahl oder Durchmesser die augenblickliche Drehungsachse vorstellt.

Die Gleichung der Tangential-Ebene in dem Punkte $\xi \eta \zeta$ des Ellipsoids:

$$\mathfrak{A}\xi(x_1 - \xi) + \mathfrak{B}\eta(y_1 - \eta) + \mathfrak{C}\zeta(z_1 - \zeta) = 0$$

gibt nach §. 18 der Einl. für die Länge p der Senkrechten, welche vom Mittelpunkte auf die genannte Ebene gefällt werden kann, den Werth:

$$p = \frac{\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\xi^2 + \mathfrak{B}^2\eta^2 + \mathfrak{C}^2\zeta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\xi^2 + \mathfrak{B}^2\eta^2 + \mathfrak{C}^2\zeta^2}}.$$

Ferner findet man mit den gleichen Verhältnissen:

$$\frac{\xi}{\mathfrak{p}} = \frac{\eta}{\mathfrak{q}} = \frac{\zeta}{\mathfrak{r}}$$

die Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}{\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}\xi^2+\mathfrak{B}\eta^2+\mathfrak{C}\zeta^2}}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2+\mathfrak{B}\mathfrak{q}^2+\mathfrak{C}\mathfrak{r}^2}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{A}^2\xi^2+\mathfrak{B}^2\eta^2+\mathfrak{C}^2\zeta^2}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}^2+\mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2+\mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2}}.$$

Wird demnach die vorhergehende berührende Ebene wieder senkrecht zur Achse oder parallel zur Ebene des Momentes $\Sigma . \mathrm{M}_{mv}$, und bezeichnet man die Länge des zum Berührungspunkte gezogenen Fahrstrahls, der zugleich die augenblickliche Drehungsachse vorstellt, mit r, so findet man mit den obigen Werthen von h und k, dem vorhergehenden von p und mit der Beachtung, daß

$$\sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2} = \varphi$$

ist, aus den vorhergehenden Gleichungen die Beziehungen:

$$\frac{r}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{pk}$$

und schließt daraus erstens

$$\varphi = r\sqrt{h},$$

wonach die Winkelgeschwindigkeit in jedem Augenblicke dem Fahrstrahl des Ellipsoids der Massemomente pro-

portional ist, welcher die augenblickliche Drehungsachse vorstellt, und zweitens den Werth:

$$p = \frac{\sqrt{h}}{k},$$

welcher zeigt, daß die von dem Mittelpunkte des Ellipsoids, d. i. von dem festen Drehungspunkte des Systems auf die zur Ebene des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen parallele berührende Ebene gefällte Senkrechte eine unveränderliche Länge hat, woraus dann weiter folgt, daß diese berührende Ebene, welche schon wie die Achse des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ eine unveränderliche Richtung hat, nun eine durchaus unveränderliche Lage besitzt, also eine feste Ebene ist. Das gegebene System bewegt sich folglich in solcher Weise um den festen Punkt, daß das Ellipsoid der Massemomente fortwährend diese feste Ebene berührt.

§. 193.

Die Lage aller Berührungspunkte auf dem Ellipsoid, welche zugleich die verschiedenen Lagen der augenblicklichen Drehungsachse bestimmen, wird nach dem Vorhergehenden offenbar durch die beiden Gleichungen:

$$\text{f.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = 1 \\ \mathfrak{A}^2\xi^2 + \mathfrak{B}^2\eta^2 + \mathfrak{C}^2\zeta^2 = \dfrac{k^2}{h} \end{cases}$$

ausgedrückt, d. h. diese beiden Gleichungen sind die Gleichungen der Curve, welche vom Endpunkte oder Pol der augenblicklichen Drehungs-Achse auf der Fläche des Ellipsoids beschrieben wird. Die erste dieser Gleichungen ist die des Ellipsoids selbst, und die zweite kann für sich allein ebenfalls als die Gleichung eines Ellipsoids angesehen werden, welches Mittelpunkt und Achsen mit dem erstern gemeinschaftlich hat, dessen Halbachsen aber

$$\frac{k}{\mathfrak{A}\sqrt{h}}, \quad \frac{k}{\mathfrak{B}\sqrt{h}}, \quad \frac{k}{\mathfrak{C}\sqrt{h}}$$

sind, und welches das Ellipsoid der Massemomente nach zwei symmetrisch liegenden Curven schneiden wird.

Die Lage dieser Curven hängt natürlich von den Verhältnissen der Massemomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ab; nehmen wir daher an, daß das erste, in Bezug auf die Achse der ξ genommene das kleinste, das letzte, in Bezug die Achse der ζ genommene das größte sei, so werden die Projectionsgleichungen jener Durchschnittscurven in den Ebenen der $\xi\eta$, $\xi\zeta$ und $\eta\zeta$ der Reihe nach

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\xi^2+\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\eta^2 &= \mathfrak{C}-\frac{k^2}{h} \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\xi^2-\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\zeta^2 &= \mathfrak{B}-\frac{k^2}{h} \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\eta^2+\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\zeta^2 &= \frac{k^2}{h}-\mathfrak{A} \end{aligned}\right\}; \quad (g.$$

sie zeigen, daß die erste und dritte dieser Projectionen Ellipsen sind, welche ihren Mittelpunkt im Anfangspunkte und ihre Achsen nach den Coordinatenachsen gerichtet haben, und daß nach unserer Annahme

$$\frac{k^2}{h} > \mathfrak{A} \text{ und } < \mathfrak{C}$$

sein muß, was sich übrigens von selbst versteht, da keine Berührung stattfinden kann, wenn die Senkrechte p nicht zwischen der kleinsten und größten der drei Halbachsen liegt. Die zweite der Gleichungen (g) ist dagegen die einer Hyperbel, auf Mittelpunkt und Achse bezogen, und es kann hier ebensowohl $\mathfrak{B} > \frac{k^2}{h}$ als $\mathfrak{B} < \frac{k^2}{h}$ sein; im ersten Falle liegen die Scheitel der Hyperbelzweige auf der Achse der ξ, im zweiten auf der der ζ, und es ist daraus leicht zu schließen, daß im ersten Falle die Achse der ξ, im zweiten die der ζ von den beiden geschlossenen Berührungscurven umgeben wird.

In den besondern Fällen, wo $k^2 = \mathfrak{C}h$ oder $= \mathfrak{A}h$ ist, wird die erste oder dritte der Gleichungen (g) nur den Mittelpunkt einer Ellipse ausdrücken, und die Drehungsachse unverrückt oder eine beständige Drehungsachse bleiben. In dem ersten dieser Fälle muß man aber offenbar entweder

$$\mathfrak{p}=0\ ,\quad \mathfrak{q}=0\ ,\quad \varphi=\mathfrak{r}=\sqrt{\frac{h}{\mathfrak{C}}}$$

oder

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\ ,$$

im zweiten entweder das letztere oder

$$\varphi = \mathfrak{p} = \sqrt{\frac{h}{\mathfrak{A}}} \quad , \quad \mathfrak{q} = 0 \quad , \quad \mathfrak{r} = 0$$

haben; d. h. es muß am Anfange der Zeit die augenblickliche Drehungs-Achse eine der beiden Hauptachsen, für welche das Massemoment das größte oder kleinste ist, gewesen sein und wird es dann bleiben, oder es muß das System so beschaffen sein, daß die Massemomente in Bezug auf die drei Hauptachsen gleich, daß also nach §. 165 alle Achsen in dem festen Punkte Hauptachsen sind, wozu dann auch die Drehungsachse am Anfange der Zeit gehört, welche deßhalb, wie vorher, beständige Drehungsachse bleibt.

Wird dagegen $k^2 = \mathfrak{B}h$, was stattfindet, sowohl wenn man

$$\mathfrak{p} = 0 \quad , \quad \mathfrak{r} = 0 \quad , \quad \mathfrak{q} = \varphi \; ,$$

als auch, wenn man

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{r}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}}$$

hat, so geht die mittlere der Gleichungen (g) in

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\xi^2 - \mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\zeta^2 = 0$$

über und stellt die beiden Asymptoten der frühern Hyperbeln vor; die beiden Berührungscurven fließen dann in einander und werden zwei Ellipsen, deren Ebenen sich nach der Achse der η schneiden, und welche die mittlere Halbachse $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}}}$ des Ellipsoids gemeinschaftlich haben. War in diesem Falle am Anfange der Bewegung $\varphi_0 = \mathfrak{q}_0$, die mittlere Hauptachse also Drehungsachse, so wird diese ebenfalls beständige Drehungsachse bleiben; denn es ist kein Grund vorhanden, warum der Pol der Drehungsachse lieber der einen, als der andern Curve folgen sollte.

Wird ferner $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, das Ellipsoid der Massemomente also ein Umdrehungsellipsoid um die Achse der ζ, so werden die beiden letzten der Gleichungen (g) ganz gleichlautend, nämlich:

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\zeta^2 = \frac{k^2}{h} - \mathfrak{A} \; ,$$

und gehören zwei zur Ebene der $\xi\eta$ parallelen Ebenen an, deren Entfernung ζ von dieser durch

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}} \sqrt{\frac{\frac{k^2}{h} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}}$$

ausgedrückt wird; die beiden Berührungscurven werden daher, wie dies auch so einleuchtet, ebene Curven, und zwar, wie die erste der Gleichungen (g) unter der Form:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})(\xi^2 + \eta^2) = \mathfrak{C} - \frac{k^2}{h}$$

zeigt, Kreise, deren Halbmesser

$$r_{,} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} \sqrt{\frac{\mathfrak{C} - \frac{k^2}{h}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}},$$

und für welche der Fahrstrahl r des Ellipsoids ebenfalls unveränderlich ist, woraus dann ebenso, wie aus den Werthen von h und k^2, weiter folgt, daß auch die Winkelgeschwindigkeit in diesem Falle constant bleibt. — Würde man in diesem Falle $k^2 = \mathfrak{A}h$ nehmen, so fände man $\zeta = 0$, $r = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$, und die beiden Berührungscurven scheinen demnach mit dem größten Kreise oder dem Aequator des Ellipsoids zusammenzufallen; die Werthe von h und k^2 zeigen aber, daß jene Voraussetzung nur stattfinden kann, wenn auch $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$ wird, wodurch man auf den vorherbetrachteten Fall: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ zurückkommt und in der That wie dort

$$\zeta = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}} = \pm r$$

findet.

§. 194.

Aus dem Vorhergehenden schließen wir also, daß die augenblickliche Drehungsachse im Allgemeinen in dem System eine Kegelfläche beschreibt, für welche man aus den Gleichungen (f) sehr leicht die Gleichung:

$$\mathfrak{C}\left(\mathfrak{C} - \frac{k^2}{h}\right)\zeta'^2 = \mathfrak{A}\left(\frac{k^2}{h} - \mathfrak{A}\right)\xi'^2 + \mathfrak{B}\left(\frac{k^2}{h} - \mathfrak{B}\right)\eta'^2$$

zieht, wenn $\mathfrak{B}$h kleiner ist als k^2, und die Gleichung:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{k^2}{h}-\mathfrak{A}\right)\xi'^2 = \mathfrak{C}\left(\mathfrak{C}-\frac{k^2}{h}\right)\zeta'^2 + \mathfrak{B}\left(\mathfrak{B}-\frac{k^2}{h}\right)\eta'^2,$$

wenn man $\mathfrak{B}$h größer als k^2 hat. Diese Fläche wird in solchen Systemen, für welche $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist, eine Umdrehungsfläche und zieht sich, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ist, oder wenn man $k^2 = \mathfrak{A}h$ oder $= \mathfrak{C}h$ hat, in ihre Achse zusammen, welche beständige Drehungsachse bleibt. Für $k^2 = \mathfrak{B}h$ geht jene Kegelfläche in zwei sich im Anfangspunkte durchschneidende Ebenen über, wenn nicht am Anfange der Zeit $\varphi_0 = \mathfrak{q}_0$, oder die mittlere Hauptachse selbst Drehungsachse war; denn in diesem Falle reduzirt sich unsere Kegelfläche auf die Durchschnittslinie der beiden vorhergenannten Ebenen.

Diese Ebenen bilden zugleich eine Grenze für die verschiedenen Lagen der Drehungsachse; denn sie scheiden die vorhergehenden Kegelflächen, und wenn am Anfange der Zeit die Drehungsachse in Bezug auf die Ebene der $\xi\eta$ über einer dieser Ebenen liegt, so bleibt sie fortwährend in einer nahezu gleichen Lage gegen die Achse der ζ oder des Massemomentes $\mathfrak{C}$; liegt sie dagegen anfänglich unter einer jener Ebenen, so bleibt sie immer in einer nahezu gleichen Neigung gegen die Achse der ξ oder des Massemomentes $\mathfrak{A}$.

Auf ähnliche Weise kann nun auch die Lage der Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen in dem festen System in Bezug auf dessen Hauptachsen geometrisch dargestellt werden.

Die Gleichungen dieser Achse, diese durch den Anfangspunkt gehend angenommen, sind nämlich nach den oben gefundenen Werthen von $\cos l'_{,}$, $\cos m'_{,}$, $\cos n'_{,}$

$$\frac{\zeta_{,}}{\mathfrak{C}\mathfrak{r}} = \frac{\xi_{,}}{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}, \quad \frac{\eta_{,}}{\mathfrak{B}\mathfrak{q}} = \frac{\xi_{,}}{\mathfrak{A}\mathfrak{p}},$$

und aus den Werthen von h und k^2 zieht man, wie vorher aus den Gleichungen (f), die Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{C}h - k^2)\mathfrak{r}^2 = \mathfrak{A}(k^2 - \mathfrak{A}h)\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}(k^2 - \mathfrak{B}h)\mathfrak{q}^2,$$

worin $\mathfrak{C}h > k^2$, $k^2 > \mathfrak{A}h$ und $> \mathfrak{B}h$ vorausgesetzt ist, oder

$$\mathfrak{A}(k^2 - \mathfrak{A}h)\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{C}(\mathfrak{C}h - k^2)\mathfrak{r}^2 + \mathfrak{B}(\mathfrak{B}h - k^2)\mathfrak{q}^2,$$

wenn man $k^2 < \mathfrak{B}h$ hat. Eliminirt man also in diesen Ausdrücken $\mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{q}^2$, $\mathfrak{r}^2$ mittels der vorhergehenden Gleichungen der Achse, so findet man im ersten Falle

$$\left(h - \frac{k^2}{\mathfrak{C}}\right) \zeta_{,}^2 = \left(\frac{k^2}{\mathfrak{A}} - h\right) \xi_{,}^2 + \left(\frac{k^2}{\mathfrak{B}} - h\right) \eta_{,}^2$$

und im zweiten

$$\left(\frac{k^2}{\mathfrak{A}} - h\right) \xi_{,}^2 = \left(h - \frac{k^2}{\mathfrak{C}}\right) \zeta_{,}^2 + \left(h - \frac{k^2}{\mathfrak{B}}\right) \eta_{,}^2$$

als die Gleichung der von der Achse des Momentes $\Sigma . M_{mv}$ innerhalb des Systems beschriebenen Fläche. Diese Achse beschreibt demnach ebenfalls eine elliptische Kegelfläche, deren Achse im ersten Falle mit der Achse der ζ oder des größten Massemomentes $\mathfrak{C}$, im zweiten mit der Achse der ξ oder des kleinsten Massemomentes $\mathfrak{A}$ zusammenfällt, und die, wie die vorige, für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ eine Umdrehungsfläche um die Achse der ζ wird.

Diese Gleichungen zeigen ferner, daß für $k^2 = \mathfrak{C}h$ oder $= \mathfrak{A}h$ auch die Achse des resultirenden Momentes beständig mit der Achse der ζ oder der ξ, also auch mit der Drehungsachse zusammenfällt, und daß für den Fall, wo $k^2 = \mathfrak{B}h$ wird, die Kegelfläche wieder in zwei sich durchschneidende Ebenen übergeht, deren Gleichung aber

$$\zeta_{,} = \pm\, \xi_{,} \sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}} \sqrt{\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}}$$

wird, die also nicht mit den Ebenen der augenblicklichen Drehungsachse zusammenfallen, sondern mit der Ebene der $\xi\eta$ einen größern Winkel bilden als diese. Hätte man dann am Anfange der Zeit oder in irgend einem Augenblicke $\mathfrak{p}_0 = 0$, $\mathfrak{r}_0 = 0$, $\varphi_0 = \mathfrak{q}_0$, so wäre auch $\xi_{,} = 0$, $\zeta_{,} = 0$, und die beiden Achsen würden in diesem Augenblicke mit der Achse der η oder des mittleren Massemomentes $\mathfrak{B}$ zusammenfallen, und es ist nun noch einleuchtender, daß die Achsen in dieser Lage bleiben müssen, da zu dem frühern Schlusse, daß kein Grund denkbar ist, warum sie sich lieber in der einen als in der andern der entsprechenden, längs der Achse der η sich schneidenden Ebenen aus dieser Lage entfernen sollten, noch der neue kommt, daß es überhaupt keinen Grund für eine Aenderung in der Lage dieser Achsen gibt, wenn beide dieselbe Richtung haben. Es folgt daraus ferner, daß wenn die Bewegung um eine andere Drehungsachse als die Achse der η in einer der Ebenen

$$\zeta = \pm\, \xi \sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}} \sqrt{\frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{C} - \mathfrak{B}}}$$

begonnen hat, die augenblickliche Drehungsachse sich allmählig nach der einen oder nach der andern Seite hin der Achse der η oder des mittleren Massemomentes $\mathfrak{B}$ nähern, und wenn sie diese Lage wirklich erreicht, darin verharren muß, was wir bald noch näher erörtern werden.

Endlich ist es einleuchtend, daß für den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ beide Achsen dieselbe beständige Lage haben, da jede Achse eine Haupt-Achse des Systems ist.

§. 195.

Gehen wir nun wieder zu unsern Gleichungen (b) und (c) zurück, so erkennen wir zuerst, daß die beiden Constanten h und k gegeben sind, wenn man außer der anfänglichen Lage der Hauptachsen noch die anfängliche Lage der augenblicklichen Drehungsachse und die anfängliche Winkelgeschwindigkeit φ_0 des Systems kennt oder die Intensität und Richtung der Kräfte, welche die Bewegungsgrößen m v zu erzeugen vermögen. Im ersten Falle hat man unmittelbar die Componenten $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$ und $\mathfrak{r}_0$; im zweiten dagegen findet man zuerst die Größe und Richtung der Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen oder den Werth von k und damit ihre Componenten $\mathfrak{A}\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{B}\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{C}\mathfrak{r}_0$ nach den drei Hauptachsen, woraus sich dann $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{r}_0$ und h berechnen lassen.

Mit diesen Ergebnissen werden wir nun durch eine der Gleichungen (a) eine Beziehung zwischen den Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und der Zeit t finden, wenn wir mittels der Gleichungen (b) und (c) zwei derselben, z. B. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ durch die dritte $\mathfrak{r}$ ausdrücken und diese Werthe in das Aenderungsgesetz dieser dritten, also hier in die dritte der Gleichungen (a) einführen. Man findet so zuerst

$$\mathfrak{p}^2 = \frac{\mathfrak{B}h - k^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}$$

$$\mathfrak{q}^2 = \frac{k^2 - \mathfrak{A}h - \mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{B}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})}$$

und hat demnach für jede von diesen Componenten zwischen zwei Zeichen zu wählen. Diese Wahl bestimmt sich wie immer nach dem anfänglichen Stande der Verhältnisse dieser Größen, ob sie nämlich mit der Zeit wachsen oder abnehmen, was leicht aus den obengenannten Gegebenen geschlossen werden kann. Mit den vorstehenden Werthen nimmt dann die dritte der Gleichungen (a), als Aenderungsgesetz von t in Bezug auf $\mathfrak{r}$, die Form an:

$$\frac{dt}{d\mathfrak{r}} = \pm \frac{\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}{\sqrt{\mathfrak{B}h - k^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\mathfrak{r}^2}\,.\sqrt{k^2 - \mathfrak{A}h - \mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{r}^2}}, \quad \text{(h.}$$

welche zeigt, daß der Werth von t in Function von $\mathfrak{r}$ im Allgemeinen nur annäherungsweise gefunden werden kann. Nimmt man aber an, daß dies geschehen sei, so kann man aus diesem Werthe umgekehrt den Werth von $\mathfrak{r}$ in Function von t ziehen und mittels dieses Werthes und der obigen Gleichungen auch die Werthe von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ in Function von t erhalten.

Zur vollständigen Lösung der Aufgabe ist demnach noch die Kenntniß der Winkel ω, ϑ, ψ, welche die Lage der Hauptachsen des Systems in Bezug auf die festen Coordinatenachsen feststellen, in Function der Zeit erforderlich, und dazu werden im Allgemeinen die Gleichungen (129) dienen, nachdem man in dieselben die vorhergefundenen Werthe von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ in Function von t eingeführt hat. In unserm Falle liegt es aber sehr nahe, die Achse des resultirenden Momentes $\Sigma\,.\,M_{mv}$ selbst als eine der festen Coordinatenachsen, z. B. als Achse der z zu nehmen; man hat dadurch

$$\cos \widehat{z\xi} = c = \cos l', \quad \cos \widehat{z\eta} = c' = \cos m', \quad \cos \widehat{z\zeta} = c'' = \cos n',$$

oder wenn man für die linke Seite dieser Gleichungen die Werthe aus §. 23 der Einl., für die rechte Seite die Werthe (e) in §. 191 nimmt,

$$-\cos\psi \sin\vartheta = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{k}, \quad \sin\psi \sin\vartheta = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{k}, \quad \cos\vartheta = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{k}. \quad \text{(i.}$$

Diese Gleichungen bestimmen unmittelbar $\cos\vartheta$ und $tang\,\psi$ in Function von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und folglich auch in Function von t; es ist jedoch in Betreff der Tangente des Winkels ψ, dessen Grenzen 0 und 2π sind, auf die Zeichen von Nenner und Zähler zu achten; denn da man hat

$$tang\,\psi = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{-\mathfrak{A}\mathfrak{p}},$$

so wird dieser Winkel, wenn $\mathfrak{q}$ positiv ist, im ersten oder im zweiten Quadranten, d. h. zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ oder zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegen, je nachdem $\mathfrak{p}$ einen negativen oder einen positiven Werth hat; ist dagegen $\mathfrak{q}$ negativ, so liegt er unter gleichen Voraussetzungen für $\mathfrak{p}$ zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$ oder zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π.

Es ist demnach nur noch der Winkel ω zu suchen. Dazu eliminirt

man aus den beiden ersten der Gleichungen (129) das Aenderungsgesetz $\frac{d\vartheta}{dt}$, wodurch sich der Ausdruck:

$$\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta = \mathfrak{q}\sin\psi - \mathfrak{p}\cos\psi\ ,$$

oder wenn man auf beiden Seiten mit $\sin\vartheta$ multiplicirt und die Gleichungen (i) benützt, die Gleichung:

$$\frac{d\omega}{dt}\left(1-\frac{\mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2}{k^2}\right)=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2+\mathfrak{B}\mathfrak{q}^2}{k}$$

ergibt. Daraus zieht man dann zuerst

k.) $$\frac{d\omega}{dt}=k\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2+\mathfrak{B}\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}^2+\mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2}=k\frac{h-\mathfrak{C}\mathfrak{r}^2}{k^2-\mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2}$$

und erhält dann mit der Beachtung, daß man hat

l.) $$\frac{d\omega}{d\mathfrak{r}}=\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{dt}{d\mathfrak{r}}=k\frac{h-\mathfrak{C}\mathfrak{r}^2}{k^2-\mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2}\cdot\frac{dt}{d\mathfrak{r}}\ ,$$

mit dem obigen Werthe von $\frac{dt}{d\mathfrak{r}}$ einen Ausdruck für $\frac{d\omega}{d\mathfrak{r}}$ in Function von $\mathfrak{r}$, aus welchem der Werth von ω im Allgemeinen wieder durch Annäherung gefunden werden kann.

In einigen besondern Fällen lassen sich indessen die Integrale der Gleichungen (h) und (l) auch genau ableiten, nämlich dann, wenn entweder $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ ist, oder wenn k^2 einem der Producte $\mathfrak{A}h$, $\mathfrak{B}h$, $\mathfrak{C}h$ gleich wird. Diese Fälle wollen wir deßhalb näher betrachten.

§. 196.

Nehmen wir zuerst den Fall, wo die Massemomente des Systems in Bezug auf zwei Hauptachsen in dem festen Punkte gleich, wo daher alle Achsen in den Ebenen dieser beiden Hauptachsen ebenfalls Haupt-Achsen sind, und im allgemeinen Falle $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$ zu nehmen ist, wobei wir zur deutlicheren Vorstellung wie bisher das dritte Massemoment $\mathfrak{C}$ als das größere voraussetzen wollen.

Die Bedingung $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$ führt die dritte der Gleichungen (a) auf

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=0$$

zurück und gibt demnach

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 \; .$$

Die beiden ersten jener Gleichungen werden damit

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = -\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\mathfrak{q}\,\mathfrak{r}_0 \quad , \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\mathfrak{p}\,\mathfrak{r}_0 \; ,$$

und man zieht aus ihnen einfach

$$\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = 0 \quad , \quad \mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 = \mathfrak{p}_0{}^2 + \mathfrak{q}_0{}^2 = \mathfrak{m}^2 \; ,$$

womit sich für die Winkelgeschwindigkeit φ der unveränderliche Werth:

$$\varphi = \sqrt{\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2} = \sqrt{\mathfrak{p}_0{}^2 + \mathfrak{q}_0{}^2 + \mathfrak{r}_0{}^2} = \varphi_0$$

ergibt, welcher bereits in §. 193 aus der beständigen Länge des Fahrstrahls für die Punkte des Berührungskreises geschlossen wurde. Man sieht aber aus diesen Ergebnissen noch weiter, daß auch die Componente $\mathfrak{r}$ der Winkelgeschwindigkeit nach der Achse des Massemomentes $\mathfrak{C}$ unveränderlich ist, wie dies auch aus der unveränderlichen Neigung der augenblicklichen Drehungsachse gegen diese dritte oder vielmehr einzelne Hauptachse folgen muß.

Um nun $\mathfrak{p}$ in Function von t zu erhalten, kann man entweder in der ersten der vorhergehenden Gleichungen den Werth: $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{p}^2}$ einführen, oder man kann in der Gleichung (h) die Größen in entsprechender Weise vertauschen, um daraus den Werth für $\frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ zu erhalten. Setzt man für das erste Verfahren, welches das einfachste ist,

$$\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} = \mu \; ,$$

so findet man die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mu\,\mathfrak{r}_0 \sqrt{\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{p}^2}$$

und daraus als allgemeines Integral

$$\mu\,\mathfrak{r}_0\,t = arc\,sin\,\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{m}} - arc\,sin\,\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{m}} \; .$$

Beachtet man dann weiter, daß wenn man $arc\,sin\,\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{m}} = \alpha$ setzt,

$\cos\alpha = \frac{\mathfrak{q}_0}{\mathfrak{m}}$ wird, so zieht man aus der vorstehenden Gleichung die Werthe:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \sin(\mu \mathfrak{r}_0 t + \alpha) = \mathfrak{q}_0 \sin \mu \mathfrak{r}_0 t + \mathfrak{p}_0 \cos \mu \mathfrak{r}_0 t \,,$$

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{\mu \mathfrak{r}_0} \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{dt} = \mathfrak{m} \cos(\mu \mathfrak{r}_0 t + \alpha) = \mathfrak{q}_0 \cos \mu \mathfrak{r}_0 t - \mathfrak{p}_0 \sin \mu \mathfrak{r}_0 t \,.$$

Die Winkel ϑ, ω, ψ sind nun sehr leicht zu erhalten. Man hat zuerst, wie oben angegeben wurde,

$$\cos\vartheta = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{r}_0}{k} \,, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\mathfrak{q}}{-\mathfrak{p}} = -\cot(\mu \mathfrak{r}_0 t + \alpha)$$

und demnach

$$\psi = \frac{1}{2}\pi + \alpha + \mu \mathfrak{r}_0 t = \psi_0 + \mu \mathfrak{r}_0 t \,,$$

wo dann $\psi_0 = \frac{1}{2}\pi + \alpha = \operatorname{arc\,tang} \frac{\mathfrak{q}_0}{-\mathfrak{p}_0}$ den anfänglichen Werth von ψ bezeichnet. Endlich wird die Gleichung (k) einfach

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k}{\mathfrak{A}}$$

und gibt, wenn ω_0 den anfänglichen Werth von ω bezeichnet,

$$\omega = \omega_0 + \frac{k}{\mathfrak{A}} t \,.$$

Alle diese Werthe bestätigen die in den §§. 193 und 194 gemachten Schlüsse. Der constante Werth von $\cos\vartheta$ zeigt, daß die geometrische Umdrehungsachse des Ellipsoids der Massemomente eine Umdrehungs-Kegelfläche um die feste Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen beschreibt, und daß demnach der **Aequator** desselben immer auf gleiche Weise gegen die Ebene dieses Momentes geneigt ist. Ferner schließt man aus dem der Zeit proportionalen Werthe von ω, daß sich die Projection jener Achse auf dieser Ebene gleichförmig bewegt, daß also auch die Achse selbst ihre Kegelfläche mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchläuft, und der ebenfalls der Zeit proportionale Werth von ψ lehrt uns, daß sich ein bestimmter Halbmesser des Aequators in Bezug auf die veränderliche Durchschnittslinie seiner Ebene mit der Ebene der xy ebenfalls gleichförmig bewegt.

Zuletzt läßt sich noch zeigen, daß **die geometrische Umdrehungsachse mit der augenblicklichen Drehungsachse und der**

Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen immer in einer und derselben Ebene liegt. Denn aus Fig. 108 ersieht man, daß der Winkel, welchen die Projection der letztern Achse in der Ebene des Aequators oder der x' y' mit der Achse der x' bildet, gleich $\pi - \psi$ ist, und nach dem Vorhergehenden hat man einmal

$$tang\,(\pi - \psi) = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}\,,$$

dann ist auch

$$\cos\lambda' = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{\mathfrak{p}_0^{\,2} + \mathfrak{q}_0^{\,2} + \mathfrak{r}_0^{\,2}}}\,, \qquad \cos\mu' = \frac{\mathfrak{q}}{\sqrt{\mathfrak{p}_0^{\,2} + \mathfrak{q}_0^{\,2} + \mathfrak{r}_0^{\,2}}}\,,$$

woraus sofort

$$tang\,\varepsilon' = \frac{\cos\mu'}{\cos\lambda'} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}}$$

folgt, wenn ε' den Winkel bezeichnet, den die Projection der augenblicklichen Drehungsachse in der Ebene des Aequators mit der Achse der x' einschließt. Diese augenblickliche Drehungsachse und die Achse des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ liegen demnach in einer durch die Achse der ζ gehenden Ebene, d. h. in einer Ebene mit der einzelnen Hauptachse des Systems oder mit der geometrischen Umdrehungs-Achse des Ellipsoids der Massemomente.

§. 197.

Die Fälle, in denen $k^2 = \mathfrak{A}h$ oder $= \mathfrak{C}h$ ist, sind oben schon hinreichend besprochen worden, und unsere Gleichungen in §. 195 können uns darüber nichts Neues lehren. Denn man sieht, daß die erste dieser Voraussetzungen den Werth von $\mathfrak{q}^2$, die zweite den von $\mathfrak{p}^2$ negativ, also den entsprechenden von $\mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{p}$ imaginär macht. Die Bedingung: $k^2 = \mathfrak{A}h$ läßt sich aber auf

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{r}^2 = 0\,,$$

und die Bedingung: $k^2 = \mathfrak{C}h$ auf

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\,\mathfrak{q}^2 = 0$$

zurückführen, welche zeigen, daß der ersten nur durch

$$\mathfrak{q} = 0 \quad , \quad \mathfrak{r} = 0\,,$$

der zweiten nur durch

$$\mathfrak{p} = 0 \quad , \qquad \mathfrak{q} = 0$$

genügt werden kann, wie schon ausgesprochen wurde.

Untersuchen wir also noch den Fall, wo

$$k^2 = \mathfrak{B}h$$

ist, auf analytischem Wege etwas näher. Diese Bedingung führt, wie wir schon oben gesehen haben, auf

$$\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{r}^2 \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})},$$

und die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}^2\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2 = k^2 - \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2 = \mathfrak{B}(h - \mathfrak{B}\mathfrak{q}^2)$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}^2 = h - \mathfrak{B}\mathfrak{q}$$

geben folgende Werthe von $\mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{r}^2$ in Function von $\mathfrak{q}$:

$$\mathfrak{p}^2 = \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}} \cdot \frac{k^2-\mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \quad , \qquad \mathfrak{r}^2 = \frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}} \cdot \frac{k^2-\mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} \, ;$$

sie zeigen, daß wenn nicht

$$\mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2 = k^2 \quad , \qquad \text{also} \quad \mathfrak{p} = 0 \quad , \qquad \mathfrak{r} = 0$$

ist, immer

$$\mathfrak{q}^2 < \frac{k^2}{\mathfrak{B}^2}$$

sein muß. Mit diesen Werthen nimmt dann die zweite der Gleichungen (a) die Form an:

$$\mathfrak{B}^2 \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \pm \sqrt{\frac{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}}(k^2 - \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2) \, ,$$

und man zieht daraus

$$t = \pm \frac{\mathfrak{B}^2\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}}{\sqrt{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}} \int_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}} d\mathfrak{q} \cdot \frac{1}{k^2 - \mathfrak{B}^2\mathfrak{q}^2} \, ,$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{\mathfrak{B}^2\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}}{\sqrt{(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}} = \frac{2\mathfrak{B}k}{\mu} \quad , \qquad \frac{k}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{m}$$

gesetzt, und nun die angedeutete Integration ausgeführt wird,

$$\pm \mu t = \log n . \frac{m + q}{m - q} . \frac{m - q_0}{m + q_0},$$

also auch umgekehrt, wenn diese Gleichung in Bezug auf q aufgelöst wird, entweder

$$q = m \frac{(m + q_0) e^{\mu t} + q_0 - m}{(m + q_0) e^{\mu t} + m - q_0}$$

oder

$$q = - m \frac{(m - q_0) e^{\mu t} - m - q_0}{(m - q_0) e^{\mu t} + m + q_0}.$$

Diese Werthe zeigen, in Uebereinstimmung mit unsern frühern Schlüssen, daß wenn am Anfange der Zeit $p_0 = r_0 = 0$, und $k^2 = B^2 q_0^2$ oder $q_0 = \pm m$ war, q immer gleich $\pm m = q_0$ sein wird; war dieses dagegen nicht der Fall, so nähert sich q mit wachsender Zeit immer mehr dem Werthe $\pm m$, die augenblickliche Drehungsachse, oder genauer ausgedrückt, ihre positive Hälfte nähert sich also einer der beiden Hälften der mittleren Hauptachse, und zwar der positiven Hälfte derselben, wenn q am Anfange mit der Zeit wächst; sie wendet sich dagegen der negativen Hälfte zu, wenn q am Anfange abnimmt. Die genannten Lagen selbst erreicht sie aber erst vollkommen nach einer unendlichen Zeit, oder niemals.

Die Winkel ϑ und ψ ergeben sich wie früher aus den Gleichungen (i); sie erhalten aber im gegenwärtigen Falle keine einfachen Formen; ebenso folgt der Winkel ω in Function von t aus der Gleichung (k), wenn man zuerst r^2 durch q^2 ausdrückt und dann für q den oben erhaltenen Werth in t einführt, was in der Ausführung durchaus keine Schwierigkeit darbietet und dem Leser überlassen bleiben soll.

§. 198.

Aus der geometrischen Betrachtung der Lage der Drehungsachse und der Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen ist sehr leicht der Schluß zu ziehen, daß wenn die erste dieser Achsen am Anfange der Zeit nur sehr wenig gegen die Achse des größten oder kleinsten Massemomentes geneigt ist, diese Neigung immer eine sehr kleine bleiben wird, daß folglich die Bewegung um diese Achse stabil

oder beständig sein wird, daß dieses jedoch nicht mehr stattfindet, wenn die augenblickliche Drehungsachse anfänglich in der Nähe der mittleren Hauptachse liegt, wenn nicht gerade $\mathfrak{B}h = k^2$ ist und die Achse selbst in einer der Ebenen liegt, deren Gleichung

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\zeta'^2 = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\xi'^2$$

ist. Man kann diese Schlüsse auch auf analytischem Wege rechtfertigen und zwar sehr einfach in folgender Weise.

Die Gleichungen (b) und (c) geben durch ihre Verbindung

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\mathfrak{q}^2 &= \mathfrak{C}h - k^2 = \delta\,, \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\mathfrak{r}^2 &= \mathfrak{B}h - k^2 = \delta'\,, \\ \mathfrak{B}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{r}^2 &= k^2 - \mathfrak{A}h = \delta''\,, \end{aligned}\right.$$

und man ersieht aus diesen Ausdrücken, daß wenn die Differenzen δ und δ'' sehr klein sind, auch $\mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{q}^2$ in dem ersten oder $\mathfrak{q}^2$ und $\mathfrak{r}^2$ in dem dritten sehr klein bleiben müssen, da ihre Coeffizienten nothwendig positiv sind; diese Veränderlichen werden demnach zwischen den Grenzen:

$$\mathfrak{p}^2 = 0 \text{ und } = \frac{\delta}{\mathfrak{A}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}\,, \quad \mathfrak{q}^2 = 0 \text{ und } = \frac{\delta}{\mathfrak{B}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}$$

oder

$$\mathfrak{q}^2 = 0 \text{ und } = \frac{\delta''}{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}\,, \quad \mathfrak{r}^2 = 0 \text{ und } = \frac{\delta''}{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}$$

eingeschlossen sein, und sich dann auch die Winkelgeschwindigkeit φ in beiden Fällen sehr wenig ändern. Dasselbe ist aber auch mit den Winkeln λ' und μ' oder mit den Winkeln μ' und ν' der Fall; es wird also die augenblickliche Drehungsachse ihre geringe Neigung gegen die Achse der ζ oder der ξ nahezu unverändert beibehalten.

In der zweiten der obigen Gleichungen dagegen sind die Werthe von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{r}$ durch den Werth von δ' nicht beschränkt, und es können beide gleichzeitig beliebig groß werden, aber nicht mehr beliebig klein, da, je nachdem δ' positiv oder negativ ist, bald $\mathfrak{r}$, bald $\mathfrak{p}$ imaginär werden kann. Die augenblickliche Drehungsachse kann sich also keiner der Hauptachsen beliebig nähern und wird sich namentlich von der mittleren, wenn sie derselben möglichst nahe gekommen war, wieder rasch entfernen. Den besondern Fall, wo $\delta' = 0$ ist, haben wir im vorigen §. kennen gelernt.

Umgekehrt ist auch leicht zu beweisen, daß die Hauptachsen eines freien Systems in dem festen Punkte, um welchen sich dasselbe drehen

muß, die einzigen Achsen sind, welche fortwährend Drehungsachsen bleiben, wenn sie es am Anfange der Zeit waren, und welche immer eine unveränderliche Lage behalten. Denn die beständige Lage der Drehungs-Achse innerhalb des Systems bedingt nach §. 188 eine unveränderliche Winkelgeschwindigkeit φ und unveränderliche Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ nach den drei mit dem System fest verbundenen Coordinatenachsen, und die Gleichungen (a) werden unter dieser Voraussetzung

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= 0 = (\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r} \\ \frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= 0 = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r} \\ \frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= 0 = (\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} \end{aligned}\right\}$$

Sind demnach die drei Massenmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ungleich, so kann diesen Gleichungen nur dadurch Genüge geschehen, daß man zwei der drei Veränderlichen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ Null setzt, d. h. eine der Coordinatenachsen oder Hauptachsen selbst als Drehungsachse nimmt. Sind zwei der genannten Massemomente einander gleich, z. B. $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, so fällt eine der obigen Gleichungen, hier die dritte, hinweg, und die beiden andern werden durch $\mathfrak{r} = 0$ allein oder durch $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{q} = 0$ zusammen befriedigt. Die erste Bedingung spricht aus, daß die Drehungsachse in der Ebene der $\xi\eta$ liegen muß, und man weiß, daß im jetzigen Falle alle Achsen in dieser Ebene Hauptachsen sind; die zweite Bedingung entspricht der einzelnen Hauptachse der ζ. Hat man endlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so werden die obigen Gleichungen unabhängig von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ Null, und diese Veränderlichen können beliebige Werthe erhalten; in diesem Falle sind aber auch alle Geraden, welche durch den Drehungspunkt gehen, Hauptachsen, und es ist demnach der obige Satz, daß eine beständige Drehungsachse eine Hauptachse sein muß, für alle Fälle bewiesen.

§. 199.

Die drehende Bewegung, welche wir in den vorhergehenden §§. untersucht haben, wäre die eines schweren festen Körpers, der in seinem Schwerpunkte unterstützt würde und sich um denselben nach jeder Richtung frei bewegen könnte, und man sieht ein, daß eine solche Einrichtung in der Wirklichkeit nicht leicht zu treffen ist. Wir wollen deßhalb noch einen andern Fall untersuchen, für welchen die sich ergebenden

Gesetze durch die Erfahrung bestätigt werden können, und der uns zugleich als Beispiel für die drehende Bewegung eines festen Systems um einen festen Punkt dient, wenn die drehenden Kräfte nicht Null sind. Dieser zweite Fall ist die **Bewegung eines schweren festen Körpers, welcher nicht in seinem Schwerpunkte unterstützt ist, aber unter der beschränkenden Voraussetzung, daß dieser Körper homogen und von einer Umdrehungsfläche begrenzt sei, und daß der feste Punkt, um welchen er sich drehen soll, in seiner geometrischen Umdrehungsachse liege.**

Nehmen wir also an, daß diese geometrische Umdrehungsachse AZ′, Fig. 109, die Achse der ζ oder des Massemomentes $\mathfrak{C}$ sei, und man demnach für die beiden andern Achsen $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ hat; ferner sei die Achse der z des festen Coordinatensystems, als dessen Anfangspunkt der feste Punkt A genommen werde, parallel zur Richtung der Schwere, und zwar die positiven z aufwärts gerichtet. Wir wollen ferner annehmen, daß diejenige Hälfte der Achse der ζ die positive sei, auf welcher der Schwerpunkt O liegt, so daß die Entfernung des letztern von dem gemeinschaftlichen Anfangspunkte A, die wir mit l bezeichnen, immer positiv ist; der anfängliche Werth ϑ_0 des Winkels ϑ oder $\widehat{ZAZ'}$ wird dann die anfängliche Lage dieser positiven Hälfte der Achse der ζ gegen die positive oder aufwärts gerichtete Hälfte der Achse der z feststellen. Die Lage der festen Achsen der x und y in der festen Horizontal-Ebene ist ganz willkürlich; man wird sie daher am einfachsten so bestimmen, daß die Achse der ζ am Anfange der Zeit in der Ebene der xz liegt, der Winkel ω_0 also Null ist. Dann weiß man, daß alle Achsen in der zur Achse der ζ senkrechten Ebene BDB′D′ oder in der Ebene des Aequators des Ellipsoids der Massemomente Hauptachsen sind; man kann deßhalb die Achse der ξ ebenfalls willkürlich wählen und wird für dieselbe am einfachsten diejenige Gerade nehmen, welche am Anfange der Zeit mit der Durchschnittslinie AB jenes Aequators und der Ebene der xy zusammengefallen war, so daß man für den Winkel ψ, welchen jene Achse AE der ξ am Ende der Zeit t mit dieser veränderlichen Durchschnittslinie bildet, ebenfalls den anfänglichen Werth $\psi_0 = 0$ erhält. Endlich werden wir voraussetzen, daß dem gegebenen Körper am Anfange nur eine Winkelgeschwindigkeit r_0 um seine geometrische Achse ertheilt worden sei, so daß man $p_0 = 0$, $q_0 = 0$ hat; das Zeichen von r_0 wird den Sinn dieser Umdrehungsgeschwindigkeit angeben, und zwar wird die Bewegung, von der positiven

Achse der ζ aus angesehen, im Sinne eines Uhrzeigers vor sich gehen, wenn $\mathfrak{r}_0$ positiv ist.

Nachdem wir auf solche Weise alle anfänglichen Gegebenen der Aufgabe festgesetzt haben, erübrigt noch, die Momente des im Schwerpunkte O angreifenden Gewichtes P in Bezug auf die drei Achsen der ξ, η und ζ auszudrücken, um die Gleichungen der Bewegung aufstellen zu können. Es ist aber aus den vorhergehenden Annahmen leicht zu schließen, daß die Winkel, welche diese Kraft mit den genannten Achsen bildet, die Ergänzungswinkel zu π von denjenigen sind, welche die Achse der z mit ihnen einschließt, daß also ihre Cosinus der Reihe nach

$$-\mathrm{c} = \cos\psi \sin\vartheta \quad , \quad -\mathrm{c}' = -\sin\psi \sin\vartheta \quad , \quad -\mathrm{c}'' = -\cos\vartheta$$

sind. Man hat ferner

$$\xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 1 \, ,$$

und damit wird

$$\mathrm{M}_Z = 0 \quad , \quad \mathrm{M}_H = -\mathrm{Plc} \quad , \quad \mathrm{M}_\Xi = \mathrm{Plc}'$$

$$= \mathrm{Pl} \cos\psi \sin\vartheta \quad , \quad = \mathrm{Pl} \sin\psi \sin\vartheta \, .$$

Die Gleichungen (133) nehmen daher die Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r} = \mathrm{Plc}' \\ &\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r} = -\mathrm{Plc} \\ &\mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} , \qquad (A.$$

worin wieder $\mathfrak{C}$ größer als $\mathfrak{A}$ vorausgesetzt ist.

Die letzte dieser Gleichungen gibt sogleich

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$$

und zeigt, daß die Winkelgeschwindigkeit um die Achse der ζ oder um die geometrische Achse des Körpers unveränderlich ist. Multiplicirt man dann diese Gleichungen (A) der Reihe nach mit c, c′, c″ und nimmt die Summe der Producte, so ergibt sich mit Einschaltung des Gliedes $\mathfrak{A}(\mathrm{c}''\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} - \mathrm{c}''\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}) = 0$ der Ausdruck:

$$\mathfrak{C}\left[\mathrm{c}''\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \mathfrak{r}(\mathrm{c}\mathfrak{q} - \mathrm{c}'\mathfrak{p})\right] + \mathfrak{A}\left[\mathrm{c}'\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{q}(\mathrm{c}''\mathfrak{p} - \mathrm{c}\mathfrak{r}) + \mathrm{c}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{p}(\mathrm{c}'\mathfrak{r} - \mathrm{c}''\mathfrak{q})\right] = 0$$

oder mit Beachtung der Gleichungen (f) in §. 188

$$\mathfrak{C}\frac{d.c''\mathfrak{r}}{dt}+\mathfrak{A}\frac{d.c'\mathfrak{q}}{dt}+\mathfrak{A}\frac{d.c\mathfrak{p}}{dt}=0\,.$$

Integrirt man diese Gleichung und berücksichtigt die frühere Annahme, wonach $\mathfrak{p}_0=0$, $\mathfrak{q}_0=0$ ist, so findet man mit Einführung der obigen Werthe von c, c′, c″ die Gleichung:

$$\text{B)}\quad \mathfrak{C}\mathfrak{r}_0(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)+\mathfrak{A}(\mathfrak{q}\sin\psi\sin\vartheta-\mathfrak{p}\cos\psi\sin\vartheta)=0\,.$$

Endlich addire man die beiden ersten der Gleichungen (A), nachdem man sie mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ multiplicirt hat; ihre Summe gibt

$$\mathfrak{A}\left(\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}+\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\right)=-Pl(\mathfrak{q}c-\mathfrak{p}c')=-Pl\frac{dc''}{dt}\,,$$

und das allgemeine Integral dieser Gleichung ist

$$\text{C.)}\qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2)=2Pl(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)\,.$$

Man schließt daraus sogleich, daß $\cos\vartheta$ immer kleiner als $\cos\vartheta_0$ oder ϑ größer als ϑ_0 werden muß, was übrigens auch so einleuchtet, da das Bestreben der Kraft P immer dahin geht, die Achse der ζ in die Richtung der negativen Achse der z zu bringen.

Nimmt man nun die Gleichungen (129) zu Hülfe, so zieht man zuerst aus der dritten derselben die Beziehung:

$$\text{D.)}\qquad \frac{d\psi}{dt}+\frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta=\mathfrak{r}_0\,,$$

während die beiden ersten durch ihre Verbindung, wie leicht zu finden ist, die Gleichungen:

$$\mathfrak{q}\sin\psi\sin\vartheta-\mathfrak{p}\cos\psi\sin\vartheta=\frac{d\omega}{dt}\sin^2\vartheta$$

$$\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2=\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta+\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

geben, durch welche die Gleichungen (B) und (C) die Form:

$$\text{E.)}\quad\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{A}\frac{d\omega}{dt}\sin^2\vartheta=\mathfrak{C}\mathfrak{r}_0(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)\\&\mathfrak{A}\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta+\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]=2Pl(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)\end{aligned}\right.$$

annehmen und nun mit der Gleichung (D) die Winkel ϑ, ω, ψ in Function von t bestimmen. Denn eliminirt man das Aenderungsgesetz $\frac{d\omega}{dt}$ in der zweiten der vorstehenden Gleichungen mittels der ersten, so folgt

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2Pl}{\mathfrak{A}}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) - \frac{\mathfrak{C}^2 r_0^2}{\mathfrak{A}^2}\frac{(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}, \quad (F.$$

woraus man den Werth von t in Function von ϑ, im Allgemeinen aber nur annäherungsweise erhalten und daraus durch Umkehrung auch den Werth von ϑ in Function von t ziehen kann. Mit diesem gibt sodann die erste der Gleichungen (E) den Werth von ω, und wenn dieser in die Gleichung (D) eingeführt wird, so wird man auch den Winkel ψ in Function von ϑ oder t erhalten, womit die Aufgabe ihre Auflösung gefunden hat.

§. 200.

Als besondere Fälle nehme ich zuerst diejenigen, wo $\vartheta_0 = 0$ oder $\vartheta_0 = \pi$ ist, d. h. wo die geometrische Achse mit der Richtung der Schwere zusammenfällt.

Wenn $\vartheta_0 = \pi$ ist, der Körper also am Anfange der Zeit die Lage des stabilen Gleichgewichts einnimmt, so muß nach der zu der Gleichung (C) gemachten Bemerkung auch $\vartheta = \pi$ bleiben; auch ist in der That die Gleichung (F) für jeden andern Werth von ϑ imaginär, während sie für $\vartheta = \pi$ auf der rechten Seite

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad , \quad \vartheta = \vartheta_0$$

gibt. Die Winkel ω und ψ haben aber keinen Sinn mehr, da die Ebene der $\xi\eta$ fortwährend mit der Ebene der xy zusammenfällt, keine Projection der Achse der ζ und keine Durchschnittslinie mehr vorhanden ist, von der aus der Winkel ψ gemessen werden könnte.

Weniger einfach erscheinen indessen die Ergebnisse der obigen Gleichungen, wenn $\vartheta_0 = 0$ ist, also wenn der Körper anfänglich die Lage des unbeständigen Gleichgewichtes einnimmt, während man doch leicht einsieht, daß hier die Erscheinung dieselbe sein muß, wie vorher und wie früher, wo der Schwerpunkt selbst unterstützt und die geometrische Achse die anfängliche Drehungsachse war. Die Gleichung (F) wird nämlich unter dieser Voraussetzung

$$\mathfrak{M}^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\left[2\mathfrak{M}Pl(1+\cos\vartheta)-\mathfrak{C}^2 r_0^2\right] ,$$

und wenn man hier ϑ' für $\frac{1}{2}\vartheta$, β^2 für $1-\frac{\mathfrak{C}^2 r_0^2}{4\mathfrak{M}Pl}$ setzt und beachtet, daß der Winkel ϑ nur größer werden kann, so erhält man für das allgemeine Integral der vorstehenden Gleichung die Form:

$$\sqrt{\frac{Pl}{\mathfrak{M}}}\,t = \int_0^{\vartheta'} d\vartheta' . \frac{\cot\vartheta'}{\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta'}} ,$$

welche leicht rational gemacht werden kann. Man zieht daraus zuerst das unbestimmte Integral:

$$\Delta . 2\beta\sqrt{\frac{Pl}{\mathfrak{M}}}\,t = \Delta . logn . \frac{\beta-\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta'}}{\beta+\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta'}} ,$$

und wenn man noch allgemein den Werth von ϑ', welcher einer Zeit $t_,$ entspricht, mit $\vartheta_,'$ bezeichnet und die Zahlen statt der Logarithmen nimmt, so folgt

$$\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta'}}{\beta+\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta'}} = \frac{\beta-\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta_,'}}{\beta+\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta_,'}}\, e^{2\beta\sqrt{\frac{Pl}{\mathfrak{M}}}(t-t_,)} ;$$

werden nun aber für $t_,$ und $\vartheta_,'$ die Werthe 0 gesetzt, so findet man, unabhängig von t, also für alle Zeiten

$$\beta-\sqrt{\beta^2-\sin^2\vartheta'} = 0 \;,\quad \text{also auch}\;\; \vartheta' = 0 \;\;\text{und}\;\; \vartheta = 0$$

wie es die Natur der Sache erfordert.

Nehmen wir ferner $\vartheta_0 = \frac{1}{2}\pi$, so daß die geometrische Achse am Anfange der Bewegung eine horizontale Lage hat, so wird $\cos\vartheta_0 = 0$, und die Gleichung (F) nimmt die Form an:

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = -\cos\vartheta\left[\frac{2Pl}{\mathfrak{M}}\sin^2\vartheta + \frac{\mathfrak{C}^2 r_0^2}{\mathfrak{M}^2}\cos\vartheta\right] ,$$

oder wenn man $\frac{1}{2}\pi + \vartheta'$ für ϑ setzt,

$$\cos^2\vartheta'\left(\frac{d\vartheta'}{dt}\right)^2 = \sin\vartheta'\left[\frac{2Pl}{\mathfrak{M}}\cos^2\vartheta' - \frac{\mathfrak{C}^2 r_0^2}{\mathfrak{M}^2}\sin\vartheta'\right] .$$

Man schließt daraus, daß wenn $\mathfrak{C}^2 r_0^2$ sehr groß ist gegen $2\mathfrak{A}Pl$, $\sin\vartheta'$, also auch ϑ' sehr klein bleiben muß, damit dieser Ausdruck nicht imaginär wird, daß sich also in diesem Falle ϑ sehr wenig von seinem anfänglichen Werthe $\frac{1}{2}\pi$ entfernen, oder daß die geometrische Achse immer nahezu horizontal bleiben wird.

§. 201.

Ohne jedoch diesen Fall weiter zu verfolgen, wollen wir sogleich den allgemeineren Fall untersuchen, wo die anfängliche Neigung der geometrischen Achse gegen die Richtung der Schwere eine beliebige ist, aber unter der Voraussetzung, daß die Abweichung derselben von dieser anfänglichen Lage während der Bewegung in sehr enge Grenzen eingeschlossen bleibe.

Dazu bringe ich die Gleichung (F) zuerst unter die Form:

$$\sin^2\vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}[\sin^2\vartheta - 2\beta^2(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)](\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta),$$

indem ich einmal für das Gewicht P das Product Mg, dann wie in §. 179

$$\frac{\mathfrak{A}}{Ml} = l, \text{ und } \frac{\mathfrak{C}^2 r_0^2}{\mathfrak{A}^2} = \frac{4\beta^2 g}{l} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{C} r_0}{2\sqrt{\mathfrak{A}Pl}} = \beta$$

setze, so daß l die Länge des einfachen Pendels ist, welches Schwingungen von derselben Dauer macht, wie der gegebene Körper, wenn er ohne anfängliche Bewegung aus der Lage des stabilen Gleichgewichtes entfernt worden und sich selbst überlassen um eine durch den festen Punkt gehende horizontale Achse, also um einen Durchmesser vom Aequator des Ellipsoids der Massemomente schwingt, und wobei zu bemerken ist, daß sich das Zeichen von β nach dem von r_0 richtet, so daß β mit r_0 positiv oder negativ wird. Machen wir alsdann

$$\vartheta = \vartheta_0 + u \quad , \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{du}{dt},$$

indem wir mit u eine Veränderliche bezeichnen, deren Werth immer sehr klein bleibt, und vernachlässigen wir in Folge dessen die höhern Potenzen als die zweite dieser Veränderlichen, so erhalten wir

$$\sin^2\vartheta = \sin^2\vartheta_0 + u\sin 2\vartheta_0 + u^2,$$

$$\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta = u\sin\vartheta_0 - \frac{1}{2}u^2\cos\vartheta_0,$$

und die obige Gleichung nimmt damit die Form an:

$$\frac{l_{,}}{g}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2u \sin\vartheta_0 - u^2(4\beta^2 + \cos\vartheta_0) .$$

Man zieht daraus mit der Beachtung, daß u am Anfange der Zeit zunehmen muß, das allgemeine Integral:

$$t\sqrt{\frac{g}{l_{,}}} = \int_0^u du . \frac{1}{\sqrt{2u \sin\vartheta_0 - u^2(4\beta^2 + \cos\vartheta_0)}} ,$$

oder wenn die Integration ausgeführt wird,

$$t\sqrt{\frac{g}{l_{,}}(4\beta^2 + \cos\vartheta_0)} = arc\cos\left[1 - \frac{u(\cos\vartheta_0 + 4\beta^2)}{\sin\vartheta_0}\right]$$

als Werth von t in Function von u, und dieser Ausdruck gibt umgekehrt den Werth von u in t:

$$u = \frac{\sin\vartheta_0}{4\beta^2 + \cos\vartheta_0}\left[1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{l_{,}}(\cos\vartheta_0 + 4\beta^2)}\right] .$$

Aus diesem schließt man dann, daß auch im Allgemeinen, wie in dem besondern Falle: $\vartheta_0 = \frac{1}{2}\pi$, β^2 oder das Verhältniß von $C^2 r_0^2$ zu 4MPl sehr groß sein muß, daß also dem Körper entweder eine sehr große anfängliche Umdrehungsgeschwindigkeit um die geometrische Achse ertheilt werden, oder das Moment Pl sehr klein sein muß, wenn u immer sehr klein bleiben soll. Man kann demnach auch $4\beta^2$ für $4\beta^2 + \cos\vartheta_0$ setzen, wodurch man einfacher

$$u = \frac{\sin\vartheta_0}{2\beta^2} \sin^2\beta t\sqrt{\frac{g}{l_{,}}}$$

und für $\vartheta_0 = \frac{1}{2}\pi$

$$u = \frac{1}{2\beta^2} \sin^2\beta t\sqrt{\frac{g}{l_{,}}}$$

findet.

Die erste der Gleichungen (E) erhält auf dieselbe Weise zuerst die Form:

$$\sin^2\vartheta \frac{d\omega}{dt} = 2\beta\sqrt{\frac{g}{l_{,}}}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) ,$$

und mit den vorhergehenden Umwandlungen, wobei man auf der rechten

Seite des Quadrat von u vernachlässigt und auf der linken $\sin^2 \vartheta_0$ für $\sin^2 \vartheta$ setzt, ergibt sich unabhängig von ϑ_0, vorausgesetzt, daß dieser Winkel nicht Null ist, das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{g}{l}} \sin^2 \beta t \sqrt{\frac{g}{l}} ,$$

und daraus der Werth von ω:

$$\omega = \frac{1}{2\beta} t \sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{1}{4\beta^2} \sin 2\beta t \sqrt{\frac{g}{l}} ,$$

welcher zeigt, daß dieser Winkel sehr nahe der Zeit proportional positiv oder negativ zunimmt, je nachdem $\mathfrak{r}_0$ und β positiv oder negativ sind, und zwar um so genauer, je größer β ist; ferner, daß die Bewegung der Durchschnittslinie der Ebene des Aequators und der festen Horizontal-Ebene um die Achse der z immer in demselben Sinne stattfindet, wie die Bewegung um die Achse der ζ, und dabei um so langsamer wird, je größer β ist, d. h. je größer die anfängliche Geschwindigkeit $\mathfrak{r}_0$ war, und je kleiner das Moment Pl ist.

Endlich gibt die Gleichung (D) mit Vernachlässigung des kleinen Unterschiedes zwischen $\cos \vartheta$ und $\cos \vartheta_0$

$$\psi = \mathfrak{r}_0 t - \omega \cos \vartheta_0 ,$$

und für den besondern Fall: $\vartheta_0 = \frac{1}{2}\pi$, einfach

$$\psi = \mathfrak{r}_0 t ,$$

wie dies bei der geringen Veränderung des Winkels ω von selbst einleuchten wird.

Die ebengefundenen Gesetze erklären vollständig die interessante Erscheinung, welche gewöhnlich an der kleinen Maschine von Bohnenberger gezeigt wird, welche aber einfacher durch eine Scheibe von Pappe oder Holz, AB, Fig. 110, hervorgebracht werden kann, die sich auf einem dünnen Stift C dreht. Dieser Stifte ist in der Achse eines prismatischen Stäbchens CD von Holz befestigt, und auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des letztern sind mehrere kleine Stifte a, b angebracht, um an dem einen Paare a derselben den ganzen Apparat mittels eines Fadens aE frei aufhängen zu können, während an einem der Stifte b ein kleines Gewicht F hängt, welches dem Gewichte der Scheibe nahezu das Gleichgewicht hält. Ist das letztere genau der Fall, der Schwerpunkt des Ganzen also in a, und hält man den Stab mit der einen Hand in eine beliebige Richtung, während die andere

Hand die Scheibe in eine möglichst schnelle drehende Bewegung versetzt, so wird dieselbe unverrückt in dieser anfänglichen Lage verharren, wenn man auch den Stab frei an dem Faden schweben läßt. Ist dagegen das Gewicht F etwas kleiner, so daß der Schwerpunkt nach c kommt, so wird sich die Achse CD nach erfolgter Umdrehung der Scheibe sehr langsam unter gleichbleibender Neigung gegen die horizontale Ebene um die Achse aE drehen, und zwar von oben angesehen, wie der Zeiger einer Uhr, wenn die Scheibe selbst, von C aus angesehen, sich in diesem Sinne dreht. Die entgegengesetzte Bewegung wird aber stattfinden, wenn F zu groß ist, der Schwerpunkt also zwischen a und D zu liegen kommt. Am nettesten ist die Erscheinung, wenn der Stab CD anfänglich horizontal gehalten wird, wie ihn die Zeichnung vorstellt.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Gesetze der Bewegung eines festen Systems.

I. Bewegung eines freien Systems.

§. 202.

Die allgemeinen Gesetze der Bewegung eines freien festen Systems von materiellen Punkten, deren Massen m, m′, m″, etc. gegeben sind, und an welchen beliebige und beliebig gerichtete Kräfte P, P′, P″, etc. angreifen, ergeben sich nun sehr einfach durch folgende Betrachtung.

Seien x, y, z die Coordinaten des ersten dieser Atome am Ende der Zeit t in Bezug auf ein unverrückbares rechtwinkliges Coordinaten-System und in Function von t ausgedrückt gedacht, so daß

$$\frac{dx}{dt} = u_x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = u_y \quad , \quad \frac{dz}{dt} = u_z$$

die drei rechtwinkligen Componenten seiner Geschwindigkeit v vorstellen, und

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du_x}{dt} \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{du_y}{dt} \quad , \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{du_z}{dt}$$

die analytischen Maaße der rechtwinkligen Componenten 𝔛, 𝔜, 𝔍 einer Kraft 𝔓 sind, welche dem betreffenden materiellen Punkte, wenn er ganz frei und einzeln sich bewegen könnte, dieselbe Bewegung sowohl bezüglich seiner Geschwindigkeit als der von ihm beschriebenen Bahn ertheilen würde, wie er sie wirklich bei seiner festen Verbindung mit dem System unter dem Einflusse der gegebenen Kräfte P, P′, P″, etc. erhält oder erhalten hat.

Nach derselben Bezeichnung werden x′, y′, z′ die Coordinaten des Punktes, dessen Masse m′ ist und an welchem die Kraft P′ angreift, also auch

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2}\,,\qquad m'\frac{d^2y'}{dt^2}\,,\qquad m'\frac{d^2z'}{dt^2}$$

die Componenten einer Kraft $\mathfrak{P}'$ sein, welche für sich allein demselben Punkte seine wirklich stattfindende Bewegung ertheilen würde, wenn er ganz frei wäre, u. s. f.

Denken wir uns nun sämmtliche materielle Punkte des Systems der Wirkung dieser unbekannten Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, etc. anstatt der Wirkung der Kräfte P, P', etc. unterworfen, so ist einleuchtend, daß die Bewegung dieses Systems dieselbe bleiben muß in dem einen, wie in dem andern Falle, weil die Wirkung der Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, etc., von denen jede für sich allein ihrem einzeln sich bewegenden Angriffspunkte schon die Bewegung ertheilen würde, welche er wirklich bei seiner Verbindung mit dem ganzen System besitzt, durch diese Verbindung nicht geändert werden kann; es muß folglich die Gesammtwirkung dieser Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, etc., welche die wirklich stattfindende Bewegung des Systems zur Folge hat, der Gesammtwirkung der Kräfte P, P', etc., welche in dem System genau dieselbe Bewegung hervorruft, gleich sein. Bezeichnen demnach wie gewöhnlich X, Y, Z die rechtwinklichen Componenten der Kraft P, X', Y', Z' die der Kraft P', u. s. f., so hat man für die Gleichheit dieser Gesammtwirkungen in irgend einem Augenblicke, also auch am Ende der Zeit t, nach Abschn. I. Kap. 5 sechs Bedingungen, nämlich drei:

A.) $\Sigma.\mathfrak{X} = \Sigma.X\,,\quad \Sigma.\mathfrak{Y} = \Sigma.Y\,,\quad \Sigma.\mathfrak{Z} = \Sigma.Z\,,$

für die Gleichheit der fördernden Wirkungen und die drei folgenden

B.) $$\begin{cases} \Sigma.(\mathfrak{Y}x - \mathfrak{X}y) = \Sigma.(Yx - Xy)\,, \\ \Sigma.(\mathfrak{X}z - \mathfrak{Z}x) = \Sigma.(Xz - Zx)\,, \\ \Sigma.(\mathfrak{Z}y - \mathfrak{Y}z) = \Sigma.(Zy - Yz)\,, \end{cases}$$

für die Gleichheit der drehenden Wirkungen in Bezug auf den festen Anfangspunkt und die festen Achsen, welche in jedem Augenblicke mit dem System fest verbunden gedacht werden können.

Ersetzt man dann die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, etc. durch ihre analytischen Werthe $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$, etc., so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma \,.\, m \dfrac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma \,.\, X \;, \quad \Sigma \,.\, m \dfrac{d^2 y}{d t^2} = \Sigma \,.\, Y \;, \\ \qquad\qquad \Sigma \,.\, m \dfrac{d^2 z}{d t^2} = \Sigma \,.\, Z \end{array}\right\} \quad (134.$$

für die fortschreitende Bewegung des gegebenen festen Systems und die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma \,.\, m \left(x \dfrac{d^2 y}{d t^2} - y \dfrac{d^2 x}{d t^2} \right) = \Sigma \,.\, (x Y - y X) \\ \Sigma \,.\, m \left(z \dfrac{d^2 x}{d t^2} - x \dfrac{d^2 z}{d t^2} \right) = \Sigma \,.\, (z X - x Z) \\ \Sigma \,.\, m \left(y \dfrac{d^2 z}{d t^2} - z \dfrac{d^2 y}{d t^2} \right) = \Sigma \,.\, (y Z - z Y) \end{array}\right\} \quad (135.$$

für die drehende Bewegung desselben in Bezug auf den festen Anfangspunkt und die festen Achsen.

Nach d'Alembert hat man sich daran gewöhnt, diese Gleichungen aus einer andern Betrachtung abzuleiten, welche mir weniger natürlich und einfach zu sein scheint, als die vorhergehende, die sich blos auf die natürliche Ansicht über die Gesammtwirkung der Kräfte stützt; diese Betrachtung ist aber immerhin beachtenswerth, da sie gleichsam ein Licht auf die innern Zustände des Systems wirft.

Bringt man nämlich die obigen Gleichungen (134) und (135) unter die Form:

$$\Sigma \,.\left(X - m \frac{d^2 x}{d t^2} \right) = 0 \;, \quad \Sigma \,.\left(Y - m \frac{d^2 y}{d t^2} \right) = 0 \;, \quad \Sigma \,.\left(Z - m \frac{d^2 z}{d t^2} \right) = 0 \;,$$

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma \,.\left[x \left(Y - m \dfrac{d^2 y}{d t^2} \right) - y \left(X - m \dfrac{d^2 x}{d t^2} \right) \right] = 0 \\ \Sigma \,.\left[z \left(X - m \dfrac{d^2 x}{d t^2} \right) - x \left(Z - m \dfrac{d^2 z}{d t^2} \right) \right] = 0 \\ \Sigma \,.\left[y \left(Z - m \dfrac{d^2 z}{d t^2} \right) - z \left(Y - m \dfrac{d^2 y}{d t^2} \right) \right] = 0 \end{array}\right\} ,$$

so erkennt man, daß man die Differenzen:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\ ,\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\ ,$$

$$X' - m'\frac{d^2x'}{dt^2}\ ,\quad Y' - m'\frac{d^2y'}{dt^2}\ ,\quad Z' - m'\frac{d^2z'}{dt^2}\ ,$$

u. ſ. f.

als die rechtwinkligen Componenten von Kräften betrachten kann, welche an denſelben Punkten angreifen, wie die gegebenen Kräfte P, P', etc., und ſich an dem feſten Syſtem im Gleichgewichte halten. Dieſe Kräfte, welche offenbar die Reſultirenden ſind von den gegebenen Kräften P, P', etc. und von den in entgegengeſetztem Sinne genommenen Kräften P, P', etc. nannte d'Alembert, weil ſie zur Bewegung des Syſtems nichts beitragen, verlorene Kräfte und ſtützte die Lehre von der Bewegung eines Syſtems von materiellen Punkten auf den durch die vorhergehende Erklärung einleuchtenden Satz: Die verlorenen Kräfte halten ſich an dem Syſtem im Gleichgewichte. Denn wäre dieſes nicht der Fall, ſo müßten dieſe Kräfte Bewegung veranlaſſen und könnten nicht mehr verlorene Kräfte ſein. Man darf ſich übrigens dabei nicht vorſtellen, daß die Wirkung dieſer Kräfte ganz und gar Null ſei; ihre Wirkung geht immer dahin, die Verbindung der einzelnen materiellen Punkte des Syſtems aufzuheben oder überhaupt zu ändern, und ſie erſcheinen nur wirkungslos, ſo lange die Feſtigkeit des Syſtems dieſer Aenderung widerſteht.

Dieſe verlorenen Kräfte treten übrigens nicht erſt bei einem Syſtem von materiellen Punkten auf; wir ſind denſelben ſchon in gleicher Form bei der gezwungenen Bewegung eines materiellen Punktes begegnet, wo ſie, wie man beſonders aus §. 94 des erſten Buches erſieht, die Componenten des Druckes, den das feſte, die Richtung der Bewegung beſtimmende Hinderniß zu erleiden hat, vorſtellen. Ferner weiß man, daß Kräfte, welche an demſelben materiellen Punkte angreifen, auch wenn er ganz frei iſt, im Allgemeinen ebenſowenig dieſelben Wirkungen äußern, die ſie einzeln auf dieſen Angriffspunkt hervorbringen würden, als wenn ſie auf mehrere in feſter Verbindung ſtehende Punkte wirken. Es gibt folglich bei einem einzelnen materiellen Punkte ebenſogut verlorene Kräfte, wie bei einem Syſtem ſolcher Punkte. In Bezug auf einen einzelnen materiellen Punkt, an dem mehrere Kräfte angreifen, was übrigens auch bei einem Syſtem von materiellen Punkten vorkommen kann, darf aber das Princip von d'Alembert nicht mehr in der obigen Form angewendet werden, indem man daraus

ein falsches Ergebniß ziehen würde. Wenn nämlich P, P', etc. die beliebigen Kräfte sind, welche an einem und demselben materiellen Punkte angreifen, dessen Coordinaten in Bezug auf ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem am Ende der Zeit t durch x, y, z ausgedrückt sind, oder was dasselbe ist, wenn ein System von materiellen Punkten sich in einen einzigen vereinigt, dessen Masse M ist, so sind die Componenten der verlorenen Kräfte offenbar

$$P\cos\widehat{Px} - M\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad P'\cos\widehat{P'x} - M\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad \text{etc.}\ ,$$

$$P\cos\widehat{Py} - M\frac{d^2y}{dt^2}\ ,\quad P'\cos\widehat{P'y} - M\frac{d^2y}{dt^2}\ ,\quad \text{etc.}\ ,$$

$$P\cos\widehat{Pz} - M\frac{d^2z}{dt^2}\ ,\quad P'\cos\widehat{P'z} - M\frac{d^2z}{dt^2}\ ,\quad \text{etc.}\ ,$$

und man sollte hier ebenso die Gleichungen:

$$\Sigma\left(P\cos\widehat{Px} - M\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0\ ,\quad \Sigma\left(P\cos\widehat{Py} - M\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0\ ,$$

$$\Sigma\left(P\cos\widehat{Pz} - M\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

haben, aus denen man, wenn es n Kräfte wären, die Gleichungen:

$$\Sigma . P\cos\widehat{Px} = nM\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad \Sigma . P\cos\widehat{Py} = nM\frac{d^2y}{dt^2}\ ,$$

$$\Sigma . P\cos\widehat{Pz} = nM\frac{d^2z}{dt^2}$$

ziehen müßte, welche offenbar unrichtig sind, und welche darauf hinweisen, daß gemäß der Form, welche die Gleichungen (134) und (135) nach dem Princip von d'Alembert erhalten, für jeden materiellen Punkt des Systems nur eine Kraft, welche indessen auch Null sein kann, in dieselben eingeführt werden darf. Dieser Beschränkung sind jene Gleichungen nach unserer Ableitung nicht unterworfen; denn die Summenzeichen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens sind darnach durchaus unabhängig von einander, das eine bezieht sich auf die Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, etc., deren so viele sind, als materielle Punkte, und das andere auf die wirklich thätigen Kräfte, wobei es gleichgültig ist,

ob sie alle an einem, oder ob sie an verschiedenen Punkten des Systems angreifen, ein Beweis, daß die Ansicht, auf welcher unsere Ableitung der genannten Gleichungen beruht, allgemeiner und natürlicher ist, als das Princip von d'Alembert. Aber auch abgesehen von dieser, bei allgemeinen Betrachtungen wenig bedeutenden Schwierigkeit, sagt dieses Princip nur mit andern Worten, daß die Gesammtwirkung der wirklich angreifenden Kräfte dieselbe ist, wie die der Kräfte $\mathbf{P}$, welche den materiellen Punkten einzeln die Bewegung, die sie wirklich besitzen, mittheilen können, was so ausgesprochen von selbst einleuchtet, und wobei man nicht nothwendig hat, sich an jedem Punkte eine Mittelkraft aus einer Kraft P und einer der Kraft $\mathbf{P}$ gleichen und entgegengesetzten Kraft vorzustellen und dann die Gesetze der Bewegung auf die Bedingungen für das Gleichgewicht zu stützen, ein Verfahren, welches im Grunde nur ein mechanisches und nicht geeignet ist, eine klare Einsicht in die Verhältnisse zu geben, obgleich nicht geläugnet werden kann, daß dasselbe seiner Zeit sehr sinnreich an sich und sehr ersprießlich für die Wissenschaft war.

§. 203.

Aus den Gleichungen (134) ziehen wir die Gesetze der fortschreitenden Bewegung des Systems. Um sie unter eine einfachere Form zu bringen, lege ich durch einen noch unbestimmten Punkt des sich bewegenden Systems ein rechtwinkliges Achsensystem, das fortwährend zu dem festen Coordinatensystem parallel bleibt, und dessen Anfangspunkt am Ende der Zeit t durch die Coordinaten $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ in Bezug auf die festen Coordinatenachsen bestimmt sei, während wir die Lage eines beliebigen, dem in Bewegung begriffenen System angehörenden Punktes in Bezug auf die beweglichen Achsen in demselben Augenblicke mit $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ bezeichnen wollen. Wir haben dann zwischen diesen letztern Coordinaten und den ursprünglichen x, y, z desselben Punktes in Bezug auf die festen Achsen die Beziehungen:

$$x = x_{,} + \mathbf{X} \quad , \quad y = y_{,} + \mathbf{Y} \quad , \quad z = z_{,} + \mathbf{Z} \quad ,$$

also auch die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_{,}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} \;,\; \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_{,}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} \;,\; \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_{,}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2} \;,$$

und die Gleichungen (134) nehmen damit die Form an:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.m\frac{d^2 x_{,}}{dt^2}+\Sigma.m\frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2}&=\Sigma X\\ \Sigma.m\frac{d^2 y_{,}}{dt^2}+\Sigma.m\frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2}&=\Sigma Y\\ \Sigma.m\frac{d^2 z_{,}}{dt^2}+\Sigma.m\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2}&=\Sigma Z\end{aligned}\right\}.$$

Wenn man nun beachtet, daß sich die Summenzeichen auf der linken Seite dieser Gleichungen auf die verschiedenen materiellen Punkte des Systems erstrecken, daß also die Aenderungsgesetze $\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}$, welche sich auf einen bestimmten Punkt des Systems beziehen, gemeinschaftliche Factoren für alle Glieder der entsprechenden Summe sind, und daß demnach wieder

$$\Sigma.m\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} \text{ auf } M\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}\;,\quad \Sigma.m\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} \text{ auf } M\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}\;,\quad \text{u. s. f.}$$

zurückkommt, wo $M=\Sigma m$ die Masse des ganzen Systems bezeichnet, und wenn man ferner den Anfangspunkt des beweglichen Coordinaten-Systems so wählt, daß man die Bedingungen:

$$\Sigma.mx_{,}=0\;,\quad \Sigma.my_{,}=0\;,\quad \Sigma.mz_{,}=0\;,$$

also auch die Bedingungen

$$\Sigma.m\frac{d^2x_{,}}{dt^2}=0\;,\quad \Sigma.m\frac{d^2y_{,}}{dt^2}=0\;,\quad \Sigma.m\frac{d^2z_{,}}{dt^2}=0$$

erhält, welche nach §. 162 bedingen, daß dieser Anfangspunkt oder der Punkt $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ der Mittelpunkt der Masse des gegebenen Systems ist, so werden die vorhergehenden Gleichungen einfach

$$\left.\begin{aligned}M\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}&=\Sigma X\\ M\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}&=\Sigma Y\\ M\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}&=\Sigma Z\end{aligned}\right\}, \qquad (136.$$

und sprechen nun aus, daß sich der Mittelpunkt der Masse des Systems gerade so bewegt, als ob die ganze Masse des letztern in ihm vereinigt, und er der Angriffspunkt der

fördernden Resultirenden aller an dem System thätigen Kräfte wäre.

Die Glieder $\Sigma \,.\, m \frac{d^2 x_{,}}{dt^2}$, $\Sigma \,.\, m \frac{d^2 y_{,}}{dt^2}$, $\Sigma \,.\, m \frac{d^2 z_{,}}{dt^2}$ werden aber auch unabhängig von der Lage des Anfangspunktes der beweglichen Achsen Null, wenn man

$$\Sigma \,.\, m x_{,} = \mathfrak{M} a \quad , \quad \Sigma \,.\, m y_{,} = \mathfrak{M} b \quad , \quad \Sigma \,.\, m z_{,} = \mathfrak{M} c$$

hat, d. h. wenn der Mittelpunkt der Masse gegen die parallel sich fortbewegenden Achsen eine unveränderliche Lage behält, wobei der Anfangspunkt der letztern ganz außerhalb des gegebenen Systems liegen darf, und man kann deßhalb noch allgemeiner sagen: die fortschreitende Bewegung eines freien festen Systems ist dieselbe, wie die eines materiellen Punktes, dessen Masse der Masse des ganzen Systems gleich ist, und an welchem die fördernde Resultirende aller an dem gegebenen System thätigen Kräfte angreift.

Wenn demnach das in Bewegung begriffene System keine drehende Bewegung besitzt, so können $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Coordinaten irgend eines beliebigen dem System angehörenden Punktes sein, wie bereits im ersten Kapitel ausgesprochen wurde.

Durch dasselbe Verfahren werden wir auch die Gleichungen (135) auf eine Form bringen, unter welcher wir leichter verstehen, was sie aussprechen. Die erste dieser Gleichungen wird nämlich durch Einführung von

$$x = x_{,} + \mathfrak{X} \quad , \quad y = y_{,} + \mathfrak{Y}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x_{,}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2} \quad , \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y_{,}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2}$$

und mit derselben Beachtung, wie vorher, in Betreff der Factoren $\frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2}$, $\frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2}$, welche sich natürlich auch auf die Factoren $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ erstreckt, zuerst

$$\Sigma \,.\, m \left(x_{,} \frac{d^2 y_{,}}{dt^2} - y_{,} \frac{d^2 x_{,}}{dt^2} \right) + \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2} \Sigma \,.\, m x_{,} + \mathfrak{X} \Sigma \,.\, m \frac{d^2 y_{,}}{dt^2}$$
$$+ \mathfrak{M} \left(\mathfrak{X} \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2} - \mathfrak{Y} \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2} \right) - \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2} \Sigma \,.\, m y_{,} - \mathfrak{Y} \Sigma \,.\, m \frac{d^2 x_{,}}{dt^2}$$
$$= \mathfrak{X} \Sigma Y - \mathfrak{Y} \Sigma X + \Sigma (x_{,} Y - y_{,} X) \,.$$

Wird dann wieder der Mittelpunkt der Masse des gegebenen Systems als Anfangspunkt des beweglichen Systems genommen, wodurch wieder die Glieder mit

$$\Sigma . m x_{,} \;,\quad \Sigma . m y_{,} \;,\quad \Sigma . m \frac{d^2 x_{,}}{d t^2} \;,\quad \Sigma . m \frac{d^2 y_{,}}{d t^2}$$

verschwinden, wird ferner dasselbe Verfahren auch bei der zweiten und dritten der Gleichungen (135) angewendet, und werden endlich die vorhererhaltenen Gleichungen (136) berücksichtigt, aus deren beiden ersten man z. B.

$$M\left(\mathfrak{X}\frac{d^2 \mathfrak{Y}}{d t^2} - \mathfrak{Y}\frac{d^2 \mathfrak{X}}{d t^2}\right) = \mathfrak{X}\Sigma Y - \mathfrak{Y}\Sigma X$$

zieht, so ergeben sich die einfachen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma . m\left(x_{,}\frac{d^2 y_{,}}{d t^2} - y_{,}\frac{d^2 x_{,}}{d t^2}\right) &= \Sigma(x_{,}Y - y_{,}X) \\
\Sigma . m\left(z_{,}\frac{d^2 x_{,}}{d t^2} - x_{,}\frac{d^2 z_{,}}{d t^2}\right) &= \Sigma(z_{,}X - x_{,}Z) \\
\Sigma . m\left(y_{,}\frac{d^2 z_{,}}{d t^2} - z_{,}\frac{d^2 y_{,}}{d t^2}\right) &= \Sigma(y_{,}Z - z_{,}Y)
\end{aligned}\right\}, \quad (137.$$

aus welchen die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des Mittelpunktes der Masse oder des Anfangspunktes der Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ verschwunden sind, welche ganz die Form der Gleichungen (132) in §. 190 angenommen haben und demnach die drehende Bewegung des Systems um jenen Mittelpunkt, wie um einen festen, darstellen und lehren, daß während und außer der fortschreitenden Bewegung des Mittelpunktes der Masse, an welcher alle übrigen Punkte des Systems auf gleiche Weise Theil nehmen, dieses letztere vermöge des resultirenden Momentes der an ihm thätigen Kräfte noch eine drehende Bewegung um jenen Mittelpunkt erhält, als wenn dieser der Anfangspunkt eines unverrückbaren Coordinatensystems wäre, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß ungeachtet dieser gedachten Unbeweglichkeit des Mittelpunktes der Masse die Intensitäten und Richtungen der Kräfte oder ihrer Momente in jedem Augenblicke dieselben sind, wie bei dem wirklichen Zustande der Bewegung.

Um indessen die Gesetze der drehenden Bewegung eines festen Systems in einem gegebenen Falle zu untersuchen, wird man statt der Gleichungen (137) die den Gleichungen (133) entsprechenden

$$138.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\dfrac{d\mathfrak{p}}{dt} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{q}\mathfrak{r} + \Sigma . M_{\Xi}\,, \\ \mathfrak{B}\dfrac{d\mathfrak{q}}{dt} = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{p}\mathfrak{r} + \Sigma . M_{H}\,, \\ \mathfrak{C}\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt} = (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \Sigma . M_{Z}\,, \end{cases}$$

worin nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Massemomente des Systems in Bezug auf die drei Hauptachsen im Mittelpunkte oder in Bezug auf die drei natürlichen Drehungsachsen des Systems bedeuten, anwenden und diese mit den Gleichungen (129) in §. 187 verbinden, um die Lage der genannten Achsen in Function der Zeit auszudrücken.

§. 204.

Durch die Gleichungen (136) und (137) wird unsere, schon in der Einleitung (§. 15) ausgesprochene Vorstellungsweise von der Bewegung eines Körpers gerechtfertigt, und die Untersuchung der Bewegung eines freien festen Systems auf die im ersten und dritten Kapitel behandelten Hauptfälle zurückgeführt; sie zeigen, daß wirklich der Schwerpunkt oder der Mittelpunkt der Masse des Systems der wahre Hauptpunkt desselben und im Allgemeinen der einzige ist, der eine einfache fortschreitende Bewegung besitzt. In der That ist im zweiten Kapitel gezeigt worden, daß die Drehungsachse des Systems durch die drehende Bewegung selbst im Allgemeinen einen fördernden Druck erleidet, welcher ihr eine fortschreitende Bewegung zu ertheilen strebt und, wenn die Achse frei ist, wirklich ertheilt, und daß, wenn dieses nicht stattfinden soll, diese Achse durch den Mittelpunkt der Masse gehen muß. Bewegt sich aber ein solches System ganz frei, und man trennt in der Vorstellung die gemeinsame fortschreitende Bewegung seiner Punkte von der drehenden Bewegung derselben, so ist einleuchtend, daß diese letztere nicht eine neue besondere fortschreitende Bewegung erzeugen kann, daß also die drehende Bewegung immer um eine solche augenblickliche oder dauernde Drehungsachse stattfinden muß, welche durch die drehende Bewegung selbst keinen fördernden Druck zu erleiden hat, die also durch den Mittelpunkt der Masse des Systems geht.

Auf diese aus der Untersuchung über die drehende Bewegung eines festen Systems hervorgehenden Sätze gestützt, wäre es eigentlich der natürlichste Gang gewesen, die Gleichungen (136) und (137) mit Umgehung der Gleichungen (134) und (135) unmittelbar dadurch

abzuleiten, daß man sogleich die fördernden und drehenden Wirkungen der an dem System thätigen Kräfte in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse als Anfang eines mit dem festen System unveränderlich verbundenen Coordinatensystems dargestellt und damit die Gleichungen für die fortschreitende und drehende Bewegung des Systems nach Kap. 1 und 3 ausgedrückt hätte. Ich habe die vorhergehende Darstellung vorgezogen, einmal weil ich es für ersprießlich erachtete, die durch die Gleichungen (136) und (137) ausgesprochenen Sätze durch eine neue, von den vorhergehenden speciellen Untersuchungen unabhängige Anschauungsweise streng zu begründen, und dann, weil wir auch noch der Gleichungen (134) und (135) bedürfen werden, welche allgemeiner sind, als die Gleichungen (136) und (137), und welche sich nicht schicklich aus diesen rückwärts herleiten lassen.

Aus den obigen Gleichungen haben wir noch den weitern Schluß zu ziehen, daß wenn ein festes System nur eine fortschreitende und keine drehende Bewegung erhalten soll, die Wirkung der an ihm thätigen Kräfte durch eine einzige Kraft muß ersetzt werden können, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Masse des bewegten Systems geht, so daß das resultirende Moment der Kräfte in Bezug auf diesen Punkt Null wird, daß also z. B. ein in der Luft fallender Körper nur dann ohne drehende Bewegung fallen wird, wenn seine äußere Begrenzung von der Art ist, daß die Richtung der Resultirenden des Luftwiderstandes durch den Mittelpunkt der Masse geht, wie dies offenbar bei einer homogenen Kugel oder überhaupt bei einem Umdrehungskörper der Fall ist, dessen geometrische Achse durch den Mittelpunkt der Masse geht und am Anfange der Bewegung eine lothrechte Richtung hat.

Allgemein betrachtet sind aber die Gleichungen (136) und die Gleichungen (137) nicht unabhängig von einander, da die Intensität der Kräfte sich im Allgemeinen mit der Lage der einzelnen Angriffspunkte gegen feste Punkte ändert, und demnach die Intensitäten der fördernden Kräfte ebenso von der drehenden Bewegung, wie die Intensitäten der drehenden Kräfte von der fortschreitenden Bewegung abhängen. In solchen Fällen müssen also beide Bewegungen im Zusammenhange betrachtet werden, und dazu dient der im nachfolgenden §. abgeleitete Lehrsatz. Meistens sind jedoch die durch die drehende Bewegung bewirkten Veränderungen in der Intensität der Kräfte sehr klein, und man kann für eine erste Annäherung von denselben Umgang nehmen.

§. 205.

Für die allgemeine Bewegung eines freien festen Systems gibt es, wie für die eines materiellen Punktes mehrere allgemeine Gesetze, von denen sich das wichtigste in folgender Weise ableiten läßt.

Zwischen der Kraft $\mathfrak{P}$, welche an dem materiellen Punkte $\mathfrak{M}$, dessen Masse wir mit m, dessen Coordinaten am Ende der Zeit t wir mit x, y, z bezeichnet haben, angreifend gedacht wird, und ihren Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ haben wir nach §. 66 des ersten Buches die Beziehung:

$$\mathfrak{P}\frac{dp}{ds} = \mathfrak{X}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{Y}\frac{dy}{ds} + \mathfrak{Z}\frac{dz}{ds},$$

wenn Δp den virtuellen Weg der Kraft $\mathfrak{P}$ für irgend eine virtuelle Geschwindigkeit Δs des Punktes M vorstellt, sowie zwischen den Componenten X, Y, Z und ihrer Resultirenden P, welche an demselben Punkte wirksam ist, die Gleichung:

$$P\frac{dp}{ds} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}$$

stattfindet. Ferner ist aus der Gleichheit der Gesammtwirkungen der Kräfte $\mathfrak{P}$ und der Kräfte P leicht zu folgern, daß auch die Summe der Arbeit für jene Kräfte dieselbe sein muß, wie für diese, d. h. daß man die Gleichung:

$$\text{C.)}\quad \Sigma . \int_{s_0}^{s} ds . \left(\mathfrak{X}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{Y}\frac{dy}{ds} + \mathfrak{Z}\frac{dz}{ds}\right) = \Sigma . \int_{s_0}^{s} ds . \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right),$$

also auch das Aenderungsgesetz:

$$\text{D.)}\quad \Sigma\left(\mathfrak{X}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{Y}\frac{dy}{ds} + \mathfrak{Z}\frac{dz}{ds}\right) = \Sigma\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$$

haben muß. Man überzeugt sich davon entweder mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, indem man nach der in §. 202 gemachten Bemerkung die Bedingung dafür aufstellt, daß sich die Kräfte P und die im entgegengesetzten Sinne genommenen Kräfte $\mathfrak{P}$ in jedem Augenblicke das Gleichgewicht halten, daß also die Gleichung (107) in §. 145 jedenfalls für eine im Sinne der wirklichen Bewegung stattfindende virtuelle Verrückung befriedigt werden muß, so daß man hat

$$\Sigma . P\frac{dp}{ds} - \Sigma . \mathfrak{P}\frac{dp}{ds} = 0,$$

was mit der vorhergehenden Gleichung übereinkommt, oder auf directem Wege mittels eines Verfahrens, welches dem in §. 145 angewendeten ähnlich ist, und durch welches man in dem Ausdruck:

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)$$

die fördernde Arbeit und die drehende Arbeit sowohl für die wirklich an dem System thätigen Kräfte P als für die gedachten Kräfte $\mathfrak{P}$ ausscheidet.

Denkt man sich nämlich durch den Mittelpunkt der Masse des in Bewegung begriffenen Systems wieder zuerst ein parallel sich fortbewegendes und dann noch ein mit dem Körper fest verbundenes rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt, so hat man einmal wie vorher die Beziehungen:

$$x = \mathfrak{X} + x_, \quad , \quad y = \mathfrak{Y} + y_, \quad , \quad z = \mathfrak{Z} + z_, \, ,$$

worin $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Masse in Bezug auf die festen Coordinatenachsen, $x_,$, $y_,$, $z_,$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes im System in Bezug auf die parallel sich fortbewegenden Achsen vorstellen. Bezeichnen dann ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf die mit dem gegebenen Körper festverbundenen Coordinatenachsen und

$$\begin{array}{lll} a = \cos\widehat{x\xi} \, , & b = \cos\widehat{y\xi} \, , & c = \cos\widehat{z\xi} \\ a' = \cos\widehat{x\eta} \, , & b' = \cos\widehat{y\eta} \, , & c' = \cos\widehat{z\eta} \\ a'' = \cos\widehat{x\zeta} \, , & b'' = \cos\widehat{y\zeta} \, , & c'' = \cos\widehat{z\zeta} \end{array}$$

die Cosinus der Winkel zwischen den letztern Achsen und den festen Achsen der x, y, z oder den parallelbleibenden Achsen der $x_,$, $y_,$, $z_,$, so hat man, wie in §. 145, die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = a x_, + b y_, + c z_, \\ \eta = a' x_, + b' y_, + c' z_, \\ \zeta = a'' x_, + b'' y_, + c'' z_, \end{array}\right\} ;$$

man zieht aus ihnen und aus den vorhergehenden die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Aenderung des Bogens s der von demselben Punkte beschriebenen Curve, nämlich

$$\frac{dx}{ds} = \frac{d\mathfrak{X}}{ds} + \frac{dx_,}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{d\mathfrak{Y}}{ds} + \frac{dy_,}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{d\mathfrak{Z}}{ds} + \frac{dz_,}{ds},$$

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= a\frac{dx_,}{ds} + b\frac{dy_,}{ds} + c\frac{dz_,}{ds} + x_,\frac{da}{ds} + y_,\frac{db}{ds} + z_,\frac{dc}{ds}, \\ 0 &= a'\frac{dx_,}{ds} + b'\frac{dy_,}{ds} + c'\frac{dz_,}{ds} + x_,\frac{da'}{ds} + y_,\frac{db'}{ds} + z_,\frac{dc'}{ds}, \\ 0 &= a''\frac{dx_,}{ds} + b''\frac{dy_,}{ds} + c''\frac{dz_,}{ds} + x_,\frac{da''}{ds} + y_,\frac{db''}{ds} + z_,\frac{dc''}{ds}, \end{aligned}\right.$$

und dann durch die gleiche Behandlung wie in dem genannten §. oder wie in dem vorhergehenden Kapitel die Werthe von $\frac{dx_,}{ds}$, $\frac{dy_,}{ds}$, $\frac{dz_,}{ds}$, nämlich

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_,}{ds} &= y_,\left(b\frac{da}{ds} + b'\frac{da'}{ds} + b''\frac{da''}{ds}\right) - z_,\left(a\frac{dc}{ds} + a'\frac{dc'}{ds} + a''\frac{dc''}{ds}\right), \\ \frac{dy_,}{ds} &= z_,\left(c\frac{db}{ds} + c'\frac{db'}{ds} + c''\frac{db''}{ds}\right) - x_,\left(b\frac{da}{ds} + b'\frac{da'}{ds} + b''\frac{da''}{ds}\right), \\ \frac{dz_,}{ds} &= x_,\left(a\frac{dc}{ds} + a'\frac{dc'}{ds} + a''\frac{dc''}{ds}\right) - y_,\left(c\frac{db}{ds} + c'\frac{db'}{ds} + c''\frac{db''}{ds}\right). \end{aligned}\right.$$

Macht man endlich wieder, wie in §. 145,

$$\left\{\begin{aligned} b\frac{da}{ds} + b'\frac{da'}{ds} + b''\frac{da''}{ds} &= \frac{d\omega}{ds}\cos\nu, \\ a\frac{dc}{ds} + a'\frac{dc'}{ds} + a''\frac{dc''}{ds} &= \frac{d\omega}{ds}\cos\mu, \\ c\frac{db}{ds} + c'\frac{db'}{ds} + c''\frac{db''}{ds} &= \frac{d\omega}{ds}\cos\lambda, \end{aligned}\right.$$

worin $\frac{d\omega}{ds}$ die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit vorstellt, und λ, μ, ν die Winkel sind zwischen der augenblicklichen Drehungsachse und den Achsen der $x_,$, $y_,$, $z_,$, und setzt für $x_,$, $y_,$, $z_,$ ihre Werthe:

$$x_, = x - \mathfrak{X}, \quad y_, = y - \mathfrak{Y}, \quad z_, = z - \mathfrak{Z},$$

so findet man

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \frac{d\mathbf{X}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{Y}\cos\nu - \mathbf{Z}\cos\mu) + \frac{d\omega}{ds}(y\cos\nu - z\cos\mu) \\
\frac{dy}{ds} &= \frac{d\mathbf{Y}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{Z}\cos\lambda - \mathbf{X}\cos\nu) + \frac{d\omega}{ds}(z\cos\lambda - x\cos\nu) \\
\frac{dz}{ds} &= \frac{d\mathbf{Z}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{X}\cos\mu - \mathbf{Y}\cos\lambda) + \frac{d\omega}{ds}(x\cos\mu - y\cos\lambda)
\end{aligned}\right\},$$

und der Ausdruck: $\Sigma\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$ nimmt damit und mit der Beachtung, daß die Größen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, λ, μ, ν und $\frac{d\omega}{ds}$ für alle Punkte des Systems dieselben Werthe haben, die Form an:

$$\left[\frac{d\mathbf{X}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{Y}\cos\nu - \mathbf{Z}\cos\mu)\right]\Sigma X + \left[\frac{d\mathbf{Y}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{Z}\cos\lambda - \mathbf{X}\cos\nu)\right]\Sigma Y$$

$$+ \left[\frac{d\mathbf{Z}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{X}\cos\mu - \mathbf{Y}\cos\lambda)\right]\Sigma Z$$

$$+ \frac{d\omega}{ds}\left[\cos\nu\,\Sigma(Xy - Yx) + \cos\mu\,\Sigma(Zx - Xz) + \cos\lambda\,\Sigma(Yz - Zy)\right].$$

Auf gleiche Weise ergibt sich aber auch für das Aenderungsgesetz der Arbeit der Kräfte $\mathfrak{P}$, d. h. für den Ausdruck: $\Sigma\left(\mathfrak{X}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{Y}\frac{dy}{ds} + \mathfrak{Z}\frac{dz}{ds}\right)$ der Werth:

$$\left[\frac{d\mathbf{X}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{Y}\cos\nu - \mathbf{Z}\cos\mu)\right]\Sigma \mathfrak{X} + \left[\frac{d\mathbf{Y}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{Z}\cos\lambda - \mathbf{X}\cos\nu)\right]\Sigma \mathfrak{Y}$$

$$+ \left[\frac{d\mathbf{Z}}{ds} - \frac{d\omega}{ds}(\mathbf{X}\cos\mu - \mathbf{Y}\cos\lambda)\right]\Sigma \mathfrak{Z}$$

$$+ \frac{d\omega}{ds}\left[\cos\nu\,\Sigma(\mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x) + \cos\mu\,\Sigma(\mathfrak{Z}x - \mathfrak{X}z) + \cos\lambda\,\Sigma(\mathfrak{Y}z - \mathfrak{Z}y)\right],$$

und die Gleichungen (A) und (B) in §. 202 zeigen, daß dieser Werth mit dem vorhergehenden gleichbedeutend wird, daß also in der That auch die Gleichungen (C) und (D) richtig sind.

§. 206.

Nach der Bedeutung, welche wir der Kraft $\mathfrak{P}$ unterlegt haben, ist nun offenbar für den Punkt, dessen Masse m und dessen Geschwindigkeit

v ist, der Ausdruck für das Aenderungsgesetz der lebendigen Kraft in Bezug auf die Aenderung des Bogens s (I. Buch, §. 66)

$$\frac{d \cdot mv^2}{ds} = 2\mathfrak{P}\frac{dp}{ds} = 2\left(\mathfrak{X}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{Y}\frac{dy}{ds} + \mathfrak{Z}\frac{dz}{ds}\right);$$

ebenso ist für einen zweiten Punkt, dessen Masse und Geschwindigkeit m' und v' sind, und für welchen s' den Bogen der beschriebenen Curve bezeichnet,

$$\frac{d \cdot m'v'^2}{ds'} = 2\mathfrak{P}'\frac{dp'}{ds'} = 2\left(\mathfrak{X}'\frac{dx'}{ds'} + \mathfrak{Y}'\frac{dy'}{ds'} + \mathfrak{Z}'\frac{dz'}{ds'}\right)$$

und so für alle übrigen Punkte. Man erhält daher als Summe dieser Gleichungen den Ausdruck:

$$\Sigma\frac{d \cdot mv^2}{ds} = 2\Sigma\left(\mathfrak{X}\frac{dx}{ds} + \mathfrak{Y}\frac{dy}{ds} + \mathfrak{Z}\frac{dz}{ds}\right)$$

und zufolge der Gleichung (D) auch das Aenderungsgesetz:

$$\Sigma\frac{d \cdot mv^2}{ds} = 2\Sigma\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right),$$

dessen allgemeines Integral:

139.) $$\Sigma . mv^2 - \Sigma . mv_0^2 = 2\Sigma . \int_{s_0}^{s} ds . \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$$

ausspricht, daß der Zuwachs an lebendiger Kraft für sämmtliche materielle Punkte des Systems in einer bestimmten Zeit der doppelten Arbeit aller an dem System thätigen Kräfte in derselben Zeit gleich ist.

Sind dann die Kräfte wieder von der Art, d. h. in solchen Functionen der Coordinaten x, y, z ihrer Angriffspunkte ausgedrückt, daß der Ausdruck:

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$$

für eine jede das vollständige Aenderungsgesetz einer Function F (x, y, z) dieser Veränderlichen darstellt oder durch

$$\frac{d . F(x, y, z)}{ds}$$

ersetzt werden kann, so wird die vorhergehende Gleichung in

140.) $$\Sigma . mv^2 - \Sigma . mv_0^2 = 2\Sigma . F(x, y, z) - 2\Sigma . F(x_0, y_0, z_0)$$

übergehen; sie zeigt dann unter dieser Form, daß unter der genannten Voraussetzung die lebendige Kraft des Systems nur von seiner Lage abhängt, und daß sie demnach immer dieselbe sein wird, sobald dasselbe in die nämliche Lage zurückkehrt oder eine ähnliche Lage in Bezug auf die Punkte, von welchen die Kräfte ausgehen, einnimmt, nämlich eine solche, für welche der Werthe der Function $F(x, y, z)$ derselbe wird, wie in jener Lage.

Wenn die Kräfte Null sind oder sich an dem System fortwährend das Gleichgewicht halten, so hat man offenbar immer

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

und demnach auch immer

$$\Sigma . mv^2 = \Sigma . mv_0^2 ;$$

die lebendige Kraft des Systems bleibt also in diesem Falle immer unverändert dieselbe, wie am Anfange der Bewegung.

Sind alle Punkte des Systems blos der Wirkung der Schwere unterworfen, und man nimmt die Achse der positiven z parallel zur Richtung der Schwere und dieser dem Sinne nach entgegengesetzt an, so hat man

$$X = 0 \;,\quad Y = 0 \;,\quad Z = -mg,$$
$$X' = 0 \;,\quad Y' = 0 \;,\quad Z' = -m'g \;,$$
u. s. f.,

und der Ausdruck für die lebendige Kraft wird

$$\Sigma . mv^2 - \Sigma . mv_0^2 = 2g\Sigma . m(z_0 - z) \;,$$

oder da man auch hat

$$\Sigma . mz = M\mathfrak{z} \quad,\quad \Sigma . mz_0 = M\mathfrak{z}_0 \;,$$

wenn $M = \Sigma m$ die Masse des ganzen Systems, $\mathfrak{z}$ die Ordinate seines Schwerpunktes am Ende, $\mathfrak{z}_0$ am Anfange der Zeit t bezeichnet,

$$\Sigma . mv^2 - \Sigma . mv_0^2 = 2Mg(\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}) \;;$$

die lebendige Kraft des Systems hängt dann nur von der Lage seines Schwerpunktes über einer festen wagrechten Ebene ab und nimmt daher jedesmal denselben Werth an, so oft dieser in irgend eine wagrechte

Ebene wieder zurückgekehrt ist. Man zieht aber auch in diesem Falle aus den Gleichungen (136) auf die gewöhnliche Weise

$$MV^2 - MV_0^2 = 2Mg(z_0 - z),$$

wo V und V_0 die Geschwindigkeiten des Schwerpunktes am Ende und am Anfange der Zeit t vorstellen, und man schließt aus der Vergleichung dieses Werthes mit dem vorhergehenden, daß sich in diesem Falle die lebendige Kraft des die ganze bewegte Masse vereinigenden Schwerpunktes in gleichem Maaße, wie die lebendige Kraft des Systems selbst, ändert.

Endlich schließt man noch aus der Gleichung (139) durch das ihr vorausgehende Aenderungsgesetz, daß wenn das System durch eine Lage geht, wo sich sämmtliche Kräfte das Gleichgewicht halten, oder wo die Richtungen aller Kräfte senkrecht sind zur Richtung der Bewegungen ihrer Angriffspunkte, wo also

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$$

Null wird, man für diese Lage auch

$$\Sigma\frac{d.mv^2}{ds} = 0$$

erhält, und daß demnach die lebendige Kraft des Systems in dieser Lage im Allgemeinen einen größten oder kleinsten Werth hat in Bezug auf die zunächst vorhergehenden oder nachfolgenden Lagen, sowie umgekehrt ein größter und kleinster Werth der lebendigen Kraft nur in solchen Lagen eintreten kann, wo sich entweder die Kräfte das Gleichgewicht halten, oder wo ihre Richtungen normal zur Richtung der Bewegung ihrer Angriffspunkte sind.

§. 207.

Durch das in §. 203 angewendete Verfahren, durch welches wir die Gesetze der Bewegung eines Systems in Bezug auf ein durch seinen Schwerpunkt gelegtes Achsensystem abgeleitet haben, kann auch dem vorhergehenden allgemeinen Ausdrucke für die lebendige Kraft des Systems eine andere beachtungswerthe Form gegeben werden, indem man in denselben die lebendige Kraft des die ganze Masse des Systems in sich vereinigenden Mittelpunktes der Masse einführt. Man erhält nämlich aus den Gleichungen:

$$x = x_{,} + \mathbf{X} \quad , \quad y = y_{,} + \mathbf{Y} \quad ; \quad z = z_{,} + \mathbf{Z} \; ,$$

worin wieder $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Masse in Bezug auf ein festes Achsensystem, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die Coordinaten eines beliebigen andern dem System angehörenden Punktes in Bezug auf ein durch jenen Mittelpunkt gelegtes, den festen Achsen fortwährend parallel bleibendes Achsensystem vorstellen, die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_{,}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \; , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_{,}}{dt} + \frac{d\mathbf{Y}}{dt} \; , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_{,}}{dt} + \frac{d\mathbf{Z}}{dt} \; ,$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\ &= \left(\frac{dx_{,}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_{,}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_{,}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{Y}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathbf{Z}}{dt}\right)^2 \\ &\quad + 2\left(\frac{dx_{,}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{dy_{,}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{Y}}{dt} + \frac{dz_{,}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{Z}}{dt}\right) . \end{aligned}$$

Bezeichnet man dann die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Masse am Anfange und am Ende der Zeit t mit $\mathbf{V}_0$ und $\mathbf{V}$, die eines andern Punktes im System in Bezug auf jenen Mittelpunkt oder in Bezug auf das durch denselben gelegte Achsensystem zu derselben Zeit mit u_0 und u und beachtet, daß man hat

$$\Sigma . m \frac{dx_{,}}{dt} = 0 \quad , \quad \Sigma . m \frac{dy_{,}}{dt} = 0 \quad , \quad \Sigma . m \frac{dz_{,}}{dt} = 0 \; , \quad \text{(a.}$$

so findet man

$$\begin{aligned} \Sigma . mv^2 &= \Sigma . mu^2 + M\mathbf{V}^2 \; , \\ \Sigma . mv_0{}^2 &= \Sigma . mu_0{}^2 + M\mathbf{V}_0{}^2 \; , \end{aligned}$$

und die Gleichung (139) wird

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . mu^2 - \Sigma . mu_0{}^2 = 2\Sigma . F(x, y, z) - 2\Sigma . F(x_0, y_0, z_0) \\ - M(\mathbf{V}^2 - \mathbf{V}_0{}^2) \end{aligned}\right\} ; \quad \text{(141.}$$

sie zeigt unter dieser Form, daß der Zuwachs an lebendiger Kraft des festen Systems in Bezug auf ein mit dem Mittelpunkte der Masse parallel sich fortbewegendes Coordinatensystem [denn dies ist eigentlich die allgemeine Bedeutung der vorhergehenden Bedingungsgleichungen (a)] um den Zuwachs an

lebendiger Kraft dieses die ganze bewegte Masse in sich vereinigenden Punktes geringer ist, als die doppelte Arbeit der Kräfte oder als der Zuwachs in Bezug auf ein festes Coordinatensystem.

Zuletzt kann man noch für $M(V^2 - V_0^2)$ den aus den Gleichungen (134) sich ergebenden Werth:

$$M(V^2 - V_0^2) = 2\int_{S_0}^{S} dS . \left(\frac{dX}{dS}\Sigma X + \frac{dY}{dS}\Sigma Y + \frac{dZ}{dS}\Sigma Z\right)$$

einführen und damit dem vorstehenden Ausdruck die Form geben:

$$\Sigma . mu^2 - \Sigma . mu_0^2 = 2\Sigma . \int_{s_0}^{s} ds . \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$$

$$-2\int_{S_0}^{S} dS . \left(\frac{dX}{dS}\Sigma X + \frac{dY}{dS}\Sigma Y + \frac{dZ}{dS}\Sigma Z\right),$$

und wenn man in dem zweiten Integral die unabhängige Veränderliche vertauscht und s statt S einführt, in dem ersten dagegen wieder

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx_,}{ds} + \frac{dX}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy_,}{ds} + \frac{dY}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dz_,}{ds} + \frac{dZ}{ds}$$

setzt und die frühere Bemerkung in Betreff der Summenglieder beachtet, so folgt daraus der Ausdruck:

$$\Sigma . mu^2 - \Sigma . mu_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} ds . \Sigma\left(X\frac{dx_,}{ds} + Y\frac{dy_,}{ds} + Z\frac{dz_,}{ds}\right),$$

in welchem man noch den Bogen $s_,$ der mit der relativen Bewegung in Bezug auf das bewegliche Achsensystem beschriebenen Curve statt des Bogens s setzen kann, um die Gleichung:

142.) $$\Sigma . mu^2 - \Sigma . mu_0^2 = 2\int_{s_{,0}}^{s_,} ds_, . \Sigma\left(X\frac{dx_,}{ds_,} + Y\frac{dy_,}{ds_,} + Z\frac{dz_,}{ds_,}\right)$$

zu erhalten, welche zeigt, daß die lebendige Kraft des Systems in Bezug auf ein mit dem Mittelpunkte der Masse fest verbundenes und zu einem festen parallel sich bewegendes Achsensystem gerade so wächst oder sich ändert, als wenn

diese Achsen selbst fest wären, wobei natürlich wieder vorausgesetzt wird, daß die Kräfte in jedem Augenblicke dieselben Intensitäten besitzen, wie bei der wirklichen Bewegung, und wobei demgemäß zu beachten ist, daß die Componenten X, Y, Z im Allgemeinen Functionen von $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ und von **X**, **Y**, **Z** sind.

Das im Vorhergehenden abgeleitete Gesetz, welches wie bei dem materiellen Punkte den Namen: Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft führt, gilt indessen nicht nur für ein festes System, sondern auch für ein veränderliches, ebenso wie die Sätze von der Einhaltung der Flächen und von der kleinsten Wirkung, welche wir bereits bei dem materiellen Punkte kennen gelernt haben, die aber für die Bewegung eines festen Systems von geringerer Wichtigkeit sind und deßhalb erst im folgenden Buche mit dem erstern allgemein bewiesen werden sollen.

II. Gezwungene Bewegung eines festen Systems.

§. 208.

Wenn das feste System, dessen Bewegung untersucht werden soll, nicht frei, sondern an bestimmte Bedingungen gebunden ist, so können diese entweder darin bestehen, daß ein Punkt des Systems oder mehrere, die in einer Geraden liegen, unbeweglich sind, oder daß ein oder mehrere Punkte desselben eine vorgeschriebene Bewegung erhalten sollen. Die beiden ersten Fälle sind bereits in den beiden vorhergehenden Kapiteln ausführlich behandelt worden; in den andern Fällen kann die Beschränkung der Bewegung geometrisch immer dadurch ausgedrückt werden, daß man das System sich während der Bewegung mit einem oder mehreren Punkten gegen feste Flächen oder Curven stützen läßt, deren Gestalt aus den gegebenen Bedingungen hervorgeht, und man wird demnach in solchen Fällen die Gleichungen für die gesuchte Bewegung erhalten, wenn man sowohl in die Gleichungen (136) für die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der bewegten Masse, als in die Gleichungen (137) für die drehende Bewegung des Systems um diesen Mittelpunkt zu den gegebenen Kräften wieder die unbekannten normalen Druckkräfte, welche jene festen Hindernisse zu erleiden haben, in entgegengesetztem Sinne genommen als widerstehende Kräfte einführt und das System als ganz frei betrachtet; dabei muß jedoch vorausgesetzt

bleiben, daß durch jene Druckkräfte auf den festen Flächen oder Curven keine neuen Widerstände, wie die Reibung, hervorgerufen werden.

Die Gleichungen (136) nehmen auf solche Weise die leicht zu deutende Form an:

$$143.)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2 X}{dt^2} = \Sigma X - \Sigma . N \cos\lambda \;, \\[2ex] M\dfrac{d^2 Y}{dt^2} = \Sigma Y - \Sigma . N \cos\mu \;, \\[2ex] M\dfrac{d^2 Z}{dt^2} = \Sigma Z - \Sigma . N \cos\nu \;, \end{cases}$$

worin N die unbekannte Intensität einer der genannten Druckkräfte und λ, μ, ν die Winkel bezeichnen, welche die Normale in einem Berührungspunkte des festen Systems und der entsprechenden Fläche oder Curve am Ende der Zeit t mit den festen Coordinatenachsen einschließt, so daß $N\cos\lambda$, $N\cos\mu$, $N\cos\nu$ die zu diesen Achsen parallelen Componenten des Druckes vorstellen, den diese Fläche oder Curve zu erleiden hat.

Ebenso werden die Gleichungen (137) nun die Formen:

$$144.)\quad \begin{cases} \Sigma.m\left(x_{\prime}\dfrac{d^2y_{\prime}}{dt^2} - y_{\prime}\dfrac{d^2x_{\prime}}{dt^2}\right) = \Sigma(x_{\prime}Y - y_{\prime}X) - \Sigma.N(x_{\prime}'\cos\mu - y_{\prime}'\cos\lambda) \\[2ex] \Sigma.m\left(z_{\prime}\dfrac{d^2x_{\prime}}{dt^2} - x_{\prime}\dfrac{d^2z_{\prime}}{dt^2}\right) = \Sigma(z_{\prime}X - x_{\prime}Z) - \Sigma.N(z_{\prime}'\cos\lambda - x_{\prime}'\cos\nu) \\[2ex] \Sigma.m\left(y_{\prime}\dfrac{d^2z_{\prime}}{dt^2} - z_{\prime}\dfrac{d^2y_{\prime}}{dt^2}\right) = \Sigma(y_{\prime}Z - z_{\prime}Y) - \Sigma.N(y_{\prime}'\cos\nu - z_{\prime}'\cos\mu) \end{cases}$$

erhalten, worin alle Veränderlichen auf das durch den Mittelpunkt der bewegten Masse gelegte, parallel zu den festen Achsen sich fortbewegende Coordinatensystem bezogen sind, und $x_{\prime}'$, $y_{\prime}'$, $z_{\prime}'$ die Coordinaten eines Punktes bedeuten, welcher am Ende der Zeit t mit der festen Fläche, auf die der Druck N ausgeübt wird, in Berührung steht.

Diese letztern Gleichungen wird man aber nach dem vorhergehenden Kapitel (§§. 189 und 190) in die folgenden umwandeln:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{q}\mathfrak{r}+\Sigma.M_{\Xi}-\Sigma.N_{\Xi} \\ \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{p}\mathfrak{r}+\Sigma.M_{H}-\Sigma.N_{H} \\ \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\mathfrak{p}\mathfrak{q}+\Sigma.M_{Z}-\Sigma.N_{Z} \end{aligned}\right\}, \qquad (145.$$

in welchen $\Sigma.N_{\Xi}$, $\Sigma.N_{H}$, $\Sigma.N_{Z}$ die Componenten des aus den Kräften N sich ergebenden resultirenden Momentes, in Bezug auf die durch den Mittelpunkt der Masse gezogenen Hauptachsen der ξ, η, ζ genommen, ausdrücken, und die übrigen Buchstaben die an dem genannten Orte erläuterte Bedeutung haben, und wird dieselben mit den Gleichungen (129) in §. 187, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p} &= -\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\cos\psi+\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi \\ \mathfrak{q} &= \frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\sin\psi+\frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi \\ \mathfrak{r} &= \frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta+\frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right\}, \qquad (146.$$

verbinden, um die Lage der natürlichen Drehungsachsen der ξ, η, ζ gegen das parallel sich bewegende Achsensystem der $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ in Function der Zeit t zu bestimmen.

Endlich werden die Gleichungen der vorgeschriebenen Hindernisse mit der nähern Bestimmung derjenigen Punkte des Systems, welche während der Bewegung mit diesen Hindernissen in Berührung kommen dürfen oder können, die nöthigen Mittel darbieten, um durch Elimination der unbekannten Kräfte N die Gesetze der Bewegung durch die Gegebenen darzustellen.

§. 209.

Als Anwendung des Vorhergehenden wollen wir die Bewegung eines schweren festen Körpers auf einer unbiegsamen und unbeweglichen Ebene untersuchen.

Sei $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Gleichung der äußern Begrenzungsfläche des gegebenen Körpers in Bezug auf ein mit ihm festverbundenes Coordinatensystem, dessen Achsen zugleich die natürlichen Drehungs-Achsen des Körpers oder seine Hauptachsen im Schwerpunkte sind, und

dessen Anfang demnach dieser letztere Punkt selbst ist. Diese Gleichung wird die Lage aller Punkte bestimmen, welche nach und nach oder gleichzeitig mit der Ebene in Berührung kommen können. Ferner sei die Achse der z eines unbeweglichen Coordinatensystems parallel zur Richtung der Schwere und in gleichem Sinne wie diese gerichtet; die beiden andern Achsen der x und der y sollen aber noch eine beliebige Lage um jene haben, so daß die Gleichung der gegebenen Ebene die allgemeine und symmetrische Form:

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu = p$$

erhält, worin λ, μ, ν die Winkel zwischen der Normalen zu dieser Ebene und den drei festen Achsen bezeichnen und p die Länge der Senkrechten ist, welche vom Anfangspunkte der letztern auf die Ebene gefällt werden kann. Die Winkel zwischen der Richtung des normalen Druckes auf die Ebene und den drei Achsen der x, y, z sind dann ebenfalls λ, μ, ν, und die Gleichungen (143) der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes werden für unsern Fall

$$a.)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2 X}{dt^2} = - N \cos\lambda\,, \\[2ex] M\dfrac{d^2 Y}{dt^2} = - N \cos\mu\,, \\[2ex] M\dfrac{d^2 Z}{dt^2} = Mg - N \cos\nu\,. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den beiden ersten dieser Gleichungen den unbekannten Druck N, so ergibt sich

$$\frac{d^2 Y}{dt^2}\cos\lambda - \frac{d^2 X}{dt^2}\cos\mu = 0\,,$$

und wenn dann $\overset{x}{V}_0$, $\overset{y}{V}_0$, $\overset{z}{V}_0$ die drei zu den festen Achsen parallelen Componenten der anfänglichen Geschwindigkeit des Schwerpunktes, X_0, Y_0, Z_0 die Coordinaten seiner anfänglichen Lage bezeichnen, so gibt die erste Integration

$$\left(\frac{dY}{dt} - \overset{y}{V}_0\right)\cos\lambda - \left(\frac{dX}{dt} - \overset{x}{V}_0\right)\cos\mu = 0\,,$$

und die zweite

$$\frac{Y - Y_0}{\cos\mu} - \frac{X - X_0}{\cos\lambda} = \left(\frac{\overset{y}{V}_0}{\cos\mu} - \frac{\overset{x}{V}_0}{\cos\lambda}\right)t\,.$$

Man schließt aus diesen Gleichungen, daß nach der horizontalen Richtung, welche zu der Projection der auf der Ebene errichteten Normalen senkrecht ist, oder nach einer Richtung, welche zur Durchschnittslinie der gegebenen Ebene mit der wagrechten Ebene der xy parallel ist, die Bewegung als eine gleichförmige erscheint.

Eliminirt man dagegen die unbekannte Kraft N aus der ersten und dritten oder aus der zweiten und dritten der Gleichungen (a), so findet man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\cos\lambda - \frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}\cos\nu = g\cos\lambda \\ \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\cos\mu - \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}\cos\nu = g\cos\mu \end{array}\right\}$$

und durch die Integration zuerst

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} - \overset{z}{\mathfrak{V}}_0\right)\cos\lambda - \left(\frac{d\mathfrak{X}}{dt} - \overset{x}{\mathfrak{V}}_0\right)\cos\nu = gt\cos\lambda \\ \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} - \overset{z}{\mathfrak{V}}_0\right)\cos\mu - \left(\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} - \overset{y}{\mathfrak{V}}_0\right)\cos\nu = gt\cos\mu \end{array}\right\};$$

daraus folgt sodann

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)\cos\lambda-(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}_0)\cos\nu=\frac{1}{2}gt^2\cos\lambda+(\overset{z}{\mathfrak{V}}_0\cos\lambda-\overset{x}{\mathfrak{V}}_0\cos\nu)t \\ (\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)\cos\mu-(\mathfrak{Y}-\mathfrak{Y}_0)\cos\nu=\frac{1}{2}gt^2\cos\mu+(\overset{z}{\mathfrak{V}}_0\cos\mu-\overset{y}{\mathfrak{V}}_0\cos\nu)t \end{array}\right\},$$

und man schließt aus diesen Ergebnissen, daß die Bewegung des Schwerpunktes, nach einer Richtung betrachtet, welche zu einem der Risse der gegebenen Ebene in den Tafeln der xz und yz parallel ist, als eine gleichförmig veränderte erscheint.

Für die Aenderung der Geschwindigkeit des Schwerpunktes erhält man aus den Gleichungen (a) auf die gewöhnliche Weise den bekannten Ausdruck wieder:

$$\mathfrak{V}^2 - \mathfrak{V}_0^2 = 2g(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0),$$

welcher zeigt, daß auch in dem jetzigen Falle, die Form des Körpers mag sein, welche sie will, die Zunahme der lebendigen Kraft des die ganze bewegte Masse in sich vereinigenden Schwerpunktes nur von seiner Lage in Bezug auf die wagrechte Ebene der xy abhängt.

§. 210.

Während dieser fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes wird sich der Körper im Allgemeinen auch gegen die feste Ebene drehen und immer in neuen Punkten mit derselben in Berührung kommen. Sind in diesem Falle ξ, η, ζ die veränderlichen Coordinaten des Berührungspunktes oder des Angriffspunktes der Kraft N am Ende der Zeit t in Bezug auf die drei Hauptachsen des Körpers in seinem Schwerpunkte, und λ', μ', ν' die Winkel, welche die Richtung des auch zu der Begrenzungsfläche desselben normalen Widerstandes N der Ebene in Bezug auf dieselben Achsen bestimmen, so erhält man für die drehende Wirkung dieser Kraft in Bezug auf dieselben Hauptachsen die Componenten:

$$N(\eta \cos\nu' - \zeta \cos\mu') \quad , \quad N(\zeta \cos\lambda' - \xi \cos\nu') \; ,$$
$$N(\xi \cos\mu' - \eta \cos\lambda') \; ;$$

die drehende Wirkung des Gewichtes Mg, dessen Richtung immer durch den Anfang der Achsen der ξ, η, ζ geht, ist dagegen Null, und die Gleichungen (145) werden demnach

$$\text{b.)} \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r} - N(\eta \cos\nu' - \zeta\cos\mu') \; , \\ \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r} - N(\zeta \cos\lambda' - \xi\cos\nu') \; , \\ \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} - N(\xi \cos\mu' - \eta\cos\lambda') \; . \end{aligned} \right.$$

Verbindet man dann diese Gleichungen mit den unveränderten Gleichungen (146), so wird man daraus die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ des Körpers um seine drei Hauptachsen und die Lage dieser letztern gegen die mit dem Schwerpunkte parallel sich fortbewegenden Coordinatenachsen ableiten, wenn die Momente von N oder die Veränderlichen N, ξ, η, ζ, λ', μ', ν' in Function von ω, ϑ, ψ ausgedrückt worden sind.

Dazu findet man dann zuerst zwischen den unveränderlichen Winkeln λ, μ, ν, welche die Normale zu der geneigten Ebene mit den drei festen Achsen bildet, und den Winkeln λ', μ', ν', welche dieselbe Gerade, die zugleich im Berührungspunkte Normale zur Begrenzungsfläche des Körpers ist, mit den drei Hauptachsen desselben einschließt, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda' &= a\ \cos\lambda + b\ \cos\mu + c\ \cos\nu \\ \cos\mu' &= a'\ \cos\lambda + b'\ \cos\mu + c'\ \cos\nu \\ \cos\nu' &= a''\ \cos\lambda + b''\ \cos\mu + c''\ \cos\nu \end{aligned}\right\}, \quad \text{(c.}$$

durch welche die Winkel λ', μ', ν' in Function der Cosinus a, b, c, etc. und dann vermöge der Beziehungen zwischen diesen Cosinus und den Functionen der Winkel ω, ϑ, ψ in §. 23 der Einleitung auch in Function dieser letztern Winkel selbst dargestellt werden können. Ferner hat man zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ des Berührungspunktes, welche der Gleichung $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ der Begrenzungsfläche des Körpers Genüge leisten müssen, und den Winkeln λ', μ', ν' die bekannten Beziehungen (Einl. §. 34):

$$\cos\lambda' = V\frac{dF}{d\xi}\ ,\quad \cos\mu' = V\frac{dF}{d\eta}\ ,\quad \cos\nu' = V\frac{dF}{d\zeta}\ , \quad \text{(d.}$$

worin zur Abkürzung F für $F(\xi, \eta, \zeta)$ steht, und V den Ausdruck:

$$\left[\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

vertritt. Setzt man nun in diese Gleichungen (d) die obigen Werthe (c) für $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, so wird man daraus mit Hülfe der Gleichung $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ auch die Coordinaten ξ, η, ζ des Berührungspunktes in Function der Cosinus a, b, c, etc. und durch diese wieder in Function von ω, ϑ, ψ erhalten.

Es ist demnach nur noch N zu bestimmen übrig. Stellt man nun die Beziehungen auf, welche zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ des Berührungspunktes, insofern derselbe dem beweglichen Körper angehört, und in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem genommen, und zwischen den Coordinaten x, y, z desselben, als der festen geneigten Ebene angehörig und in Bezug auf die unverrückbaren Coordinatenachsen, so findet man mit der Beachtung, daß der Anfang der beweglichen Coordinaten in Bezug auf die festen durch die Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bestimmt ist, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{X} + a\xi + a'\eta + a''\zeta \\ y &= \mathfrak{Y} + b\xi + b'\eta + b''\zeta \\ z &= \mathfrak{Z} + c\xi + c'\eta + c''\zeta \end{aligned}\right\}. \quad \text{(e.}$$

Wenn man dann beachtet, daß diese Coordinaten des Berührungspunktes, weil er auch der geneigten Ebene angehört, der Gleichung

dieser letztern Genüge leisten müssen, so erhält man durch Einführung der vorstehenden Werthe für x, y, z in die Gleichung:

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu = p$$

und mit Beachtung der Gleichungen (c) die neue Beziehung:

f.) $X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu + \xi \cos\lambda' + \eta \cos\mu' + \zeta \cos\nu' = p,$

deren Bedeutung leicht zu erkennen ist, wenn man berücksichtigt, daß nach §. 18 der Einleitung die Summe:

$$\xi \cos\lambda' + \eta \cos\mu' + \zeta \cos\nu'$$

den Abstand des Anfangspunktes der Coordinaten ξ, η, ζ oder des Schwerpunktes von der festen berührenden Ebene und die Summe:

$$X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu$$

den Abstand desselben Punktes von einer durch den festen Anfangspunkt der x, y, z gelegten parallelen Ebene ausdrückt, und p die senkrechte Entfernung dieses letztern Punktes von der gegebenen Ebene bezeichnet; man wird dadurch erkennen, daß die Gleichung (f) die Bedingung für die fortwährende Berührung des Körpers und der festen Ebene enthält.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (a) im vorhergehenden §. der Reihe nach mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, so gibt ihre Summe:

$$N = Mg \cos\nu - M\left(\frac{d^2 X}{dt^2}\cos\lambda + \frac{d^2 Y}{dt^2}\cos\mu + \frac{d^2 Z}{dt^2}\cos\nu\right),$$

und wenn man die eingeklammerte Größe durch das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d^2.(X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu)}{dt^2}$$

ersetzt und für dieses seinen Werth aus der Gleichung (f) einführt, so findet man für den Widerstand N den Werth:

$$N = Mg \cos\nu + M\frac{d^2.(\xi \cos\lambda' + \eta \cos\mu' + \zeta \cos\nu')}{dt^2},$$

welcher nun als Function der Veränderlichen ξ, η, ζ, λ', μ', ν' erscheint und nach dem Vorhergehenden, wie diese, in Function von ω, ϑ, ψ ausgedrückt werden kann, so daß dann auch die Momente von N in den Gleichungen (b) als Functionen dieser Veränderlichen dargestellt werden können. Die Auflösung der Aufgabe hängt demnach zunächst von der Integration der Gleichungen (b) und (146) ab, aus welchen die Winkel ω, ϑ, ψ in Function der Zeit t gezogen werden

müssen; damit wird man dann auch den Werth von N zufolge des Vorhergehenden in Function von t erhalten, und wenn derselbe in die Gleichungen (a) eingeführt worden, aus diesen endlich die Werthe der Coordinaten $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ des Schwerpunktes in Function von t ziehen, womit die Aufgabe ihre vollständige Lösung gefunden hat.

Wenn der gegebene Körper die geneigte Ebene fortwährend nur mit einem Ecke oder einer Spitze berührt, so werden die Coordinaten ξ, η, ζ constant und unabhängig von ω, ϑ, ψ; die Beziehungen (d) finden nicht mehr statt, da diese Gleichungen für einen solchen Punkt keine bestimmten Werthe mehr geben, und wären auch überflüssig. Alle übrigen Gleichungen bleiben dagegen in Gültigkeit, und der Werth von N nimmt die einfachere Form an:

$$N = \mathbf{M} g \cos\nu + \mathbf{M}\left(\xi \frac{d^2 . \cos\lambda'}{dt^2} + \eta \frac{d^2 . \cos\mu'}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 . \cos\nu'}{dt^2}\right).$$

Auf gleiche Weise wird man endlich auch den Fall behandeln, wo der Körper die geneigte Ebene mit zwei oder mehreren Punkten, die in einer Geraden liegen, also mit einer Kante oder Schneide fortwährend berührt, wobei er sich natürlich nur um diese Gerade, welche indessen selbst eine fortschreitende Bewegung annehmen wird, drehen kann.

§. 211.

Der einfachste Fall dieser Art ist die Bewegung einer homogenen Kugel oder überhaupt einer Kugel, deren Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammenfällt, auf einer geneigten Ebene. Für eine solche Kugel ist immer, wenn r ihren Halbmesser bezeichnet

$$\xi \cos\lambda' + \eta \cos\mu' + \zeta \cos\nu' = r,$$

und demnach hat man durch die Gleichung (f)

$$\mathbf{X} \cos\lambda + \mathbf{Y} \cos\mu + \mathbf{Z} \cos\nu = p - r,$$

also auch das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} \cos\lambda + \frac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2} \cos\mu + \frac{d^2 \mathbf{Z}}{dt^2} \cos\nu = 0.$$

Durch dieses letztere kommt der Werth von N sogleich auf $\mathbf{M} g \cos\nu$ zurück, wie in dem Falle eines materiellen Punktes von der Masse $\mathbf{M}$, während die vorhergehende Gleichung ausspricht, daß sich der Schwerpunkt in einer Ebene bewegt, welche zu der gegebenen parallel ist.

Ferner ist leicht zu sehen, daß in den Gleichungen (b) die Coeffizienten von N Null werden, weil die Normale immer durch den Anfang des beweglichen Systems geht. Es sind aber auch die Massemomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in Bezug auf drei beliebige Achsen im Mittelpunkte der Kugel gleich, und es kommen dadurch jene Gleichungen auf die einfachen:

$$\frac{d\mathfrak{p}}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0$$

oder

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \quad , \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 \quad , \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$$

zurück; sie zeigen, daß die drehende Bewegung der Kugel eine gleichförmige ist und immer um denselben Durchmesser stattfindet.

Endlich zeigen die Gleichungen (a), sowie die daraus abgeleiteten Gleichungen in §. 209, daß die Bewegung des Schwerpunktes oder Mittelpunktes denselben Gesetzen folgt, wie die Bewegung eines materiellen Punktes auf derselben geneigten Ebene, wenn keine Reibung stattfindet. Dieser Mittelpunkt bleibt also, wenn er selbst keine anfängliche, seitwärts gerichtete Geschwindigkeit hat, welches auch die drehende Bewegung der Kugel sein mag, immer in derselben lothrechten Ebene, welche auch die Normale zu der geneigten Ebene in der anfänglichen Lage jenes Punktes enthält, welche also zu dieser letztern Ebene senkrecht ist. Denn nimmt man die genannte Ebene als die Ebene der xz an, so wird

$$\cos\mu = 0 \quad , \quad \cos\lambda = -\sin\nu \;;$$

die zweite der Gleichungen (a) gibt

$$\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} = \overset{y}{\mathfrak{V}}_0 \quad , \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_0 + \overset{y}{\mathfrak{V}}_0 t$$

und zeigt, daß wenn $\overset{y}{\mathfrak{V}}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$ Null ist, auch $\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}$ und $\mathfrak{Y}$ Null bleibt, daß die Bewegung dagegen parallel zur Achse der y eine gleichförmige wird, wenn der Mittelpunkt eine parallel zu dieser Achse gerichtete anfängliche Geschwindigkeit besitzt. Endlich zeigen auch die beiden andern Gleichungen (a), daß die drehende Bewegung der Kugel im jetzigen Falle, wo keine Reibung vorausgesetzt ist, durchaus keinen Einfluß auf die fortschreitende Bewegung ihres Mittelpunktes hat.

Weiter unten wird gezeigt werden, wie sich diese Verhältnisse durch die Reibung ändern.

§. 212.

Wenn die gegebene Ebene eine wagrechte Lage hat, so wird man sie als Ebene der xy nehmen und hat dann für die allgemeine Betrachtung der Bewegung eines beliebigen schweren Körpers auf derselben

$$\cos\lambda = 0 \quad , \quad \cos\mu = 0 \quad , \quad \cos\nu = 1 \quad , \quad p = 0 \; ;$$

die beiden ersten der Gleichungen (a') werden

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0$$

und zeigen, daß die Bewegung des Schwerpunktes, parallel zu der festen Ebene betrachtet, eine gleichförmige geradlinige ist und nur von der anfänglichen Geschwindigkeit abhängt. Die dritte dieser Gleichungen dagegen gibt einfach

$$N = Mg - M\frac{d^2 Z}{dt^2} \; ,$$

woraus folgt, daß der Druck auf die Ebene von dem zweiten Aenderungsgesetze der verticalen Ordinate abhängt oder dem Unterschiede zwischen dem Gewichte und einer Kraft $\mathfrak{Z}$ gleich ist, welche einem materiellen Punkte von der Masse M in der Einheit der Zeit die Geschwindigkeit $\frac{dZ}{dt}$ ertheilen kann.

Die Gleichungen (c) werden nun ebenfalls sehr einfach, nämlich

$$\cos\lambda' = c \quad , \quad \cos\mu' = c' \quad , \quad \cos\nu' = c'' \; ,$$

und damit nimmt die Gleichung (f) die Form an:

$$Z + c\xi + c'\eta + c''\zeta = 0 \; , \qquad \text{(g.}$$

aus welcher man den Werth von $\frac{d^2 Z}{dt^2}$ ziehen kann, um ihn in den obigen Ausdruck von N einzuführen. Ferner werden die Gleichungen (d) für eine stetig gekrümmte Begrenzungsfläche des Bewegten

$$c = V\frac{dF}{d\xi} \quad , \quad c' = V\frac{dF}{d\eta} \quad , \quad c'' = V\frac{dF}{d\zeta} \qquad \text{(h.}$$

und geben die Werthe von ξ, η, ζ in Function von c, c', c''. Diese Gleichungen werden dagegen überflüssig, wenn der Körper sich auf einer Spitze oder Schneide bewegt, für welche die Coordinaten ξ, η, ζ constant sind.

Die Aufgabe ist also wieder auf die Integration der Gleichungen (b) und (146) zurückgeführt, von denen die ersten nun die Form:

$$\text{i.)}\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} &= (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{q}\mathfrak{r} - M\left(g-\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right)(c''\eta - c'\zeta)\\
\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{p}\mathfrak{r} - M\left(g-\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right)(c\zeta - c''\xi)\\
\mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\mathfrak{p}\mathfrak{q} - M\left(g-\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right)(c'\xi - c\eta)
\end{aligned}\right.$$

annehmen, wenn man noch $\mathfrak{Z}$, ξ, η, ζ unersetzt läßt, und von denen man auch in dieser Form zwei erste Integrale erhalten kann.

Multiplicirt man dieselben nämlich zuerst der Reihe nach mit c, c', c'' und nimmt ihre Summen, so verschwinden die mit M multiplicirten Glieder, und die übrigen können mit Beachtung der Gleichungen (f) in §. 188 unter die Form:

$$\mathfrak{A}\frac{d.c\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{d.c'\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{C}\frac{d.c''\mathfrak{r}}{dt} = 0$$

gebracht werden; man zieht daraus als erstes Integral

$$\text{A.)}\qquad \mathop{\Delta}_{0}^{t}(\mathfrak{A}\mathfrak{p}c + \mathfrak{B}\mathfrak{q}c' + \mathfrak{C}\mathfrak{r}c'') = 0\ ,$$

welches mit Berücksichtigung der Bedeutung der Gleichung (c) in §. 191 und mit der Beachtung, daß c, c', c'' die Cosinus der Winkel sind zwischen der festen Achse der z und den beweglichen Achsen der ξ, η, ζ, den Satz ausspricht, daß die Summe der Momente der Bewegungsgrößen um die lothrechte Achse der z, oder daß die Componente des Momentes $\Sigma.M_{mv}$ aller Bewegungsgrößen nach einer zur festen Ebene senkrechten Achse während der Bewegung einen unveränderlichen Werth behält.

Multiplicirt man dann die Gleichungen (i) der Reihe nach mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und nimmt ihre Summe, so ergibt sich

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{C}\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$
$$= M\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt}-g\right)[\xi(c'\mathfrak{r}-c''\mathfrak{q})+\eta(c''\mathfrak{p}-c\mathfrak{r})+\zeta(c\mathfrak{q}-c'\mathfrak{p})]$$

oder mit Beachtung der Gleichungen (f) in §. 188

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}+\mathfrak{B}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}+\mathfrak{C}\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=M\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}-g\right)\left(\xi\frac{dc}{dt}+\eta\frac{dc'}{dt}+\zeta\frac{dc''}{dt}\right).$$

Nun zieht man aus der Gleichung (g) das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt}+\xi\frac{dc}{dt}+\eta\frac{dc'}{dt}+\zeta\frac{dc''}{dt}=-\left(c\frac{d\xi}{dt}+c'\frac{d\eta}{dt}+c''\frac{d\zeta}{dt}\right),$$

und man sieht sogleich, daß für einen Körper, welcher sich auf einer Spitze bewegt, die zweite Seite dieser Gleichung Null wird. Sie wird aber auch für die Bewegung auf einer stetig gekrümmten Fläche Null; denn vermöge der Gleichungen (h) hat man

$$c\frac{d\xi}{dt}+c'\frac{d\eta}{dt}+c''\frac{d\zeta}{dt}=V\left(\frac{dF}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{dF}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\frac{dF}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$=V\frac{dF}{dt}=0,$$

da die Begrenzungsfläche des festen Körpers während der Bewegung keine Veränderung erleiden kann. Man hat also in allen Fällen

$$\xi\frac{dc}{dt}+\eta\frac{dc'}{dt}+\zeta\frac{dc''}{dt}=-\frac{d\mathfrak{z}}{dt},$$

und damit wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}+\mathfrak{B}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}+\mathfrak{C}\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}=M\left(g-\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)\frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Das erste Integral dieser Gleichung:

$$\overset{t}{\underset{0}{\Delta}}(\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2+\mathfrak{B}\mathfrak{q}^2+\mathfrak{C}\mathfrak{r}^2)=2Mg(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_0)-M\left[\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2-\dot{V}_0^2\right] \quad (B.$$

lehrt mit Berücksichtigung der Bedeutung der Gleichung (b) in §. 191, daß die in der Zeit t erworbene lebendige Kraft des bewegten Körpers in Bezug auf den beweglichen Anfangspunkt der ξ, η, ζ um die in derselben Zeit erworbene lebendige Kraft dieses Anfangspunktes selbst, die ganze bewegte Masse in ihm vereinigt angenommen, kleiner ist als die Arbeit des bewegenden Gewichtes Mg; ein Satz, der zufolge des am Ende des §. 209 ausgesprochenen Gesetzes, wie bei einem freien System, für jede Lage der festen Ebene, auf welche sich der Körper stützt, gültig ist.

§. 213.

Die beiden Integrale (A) und (B), welche wir im vorhergehenden §. aus den Gleichungen (i) gezogen haben, reichen zur Auflösung der Aufgabe hin, wenn es sich darum handelt, die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, welcher von einer Umdrehungsfläche begrenzt und homogen, oder in welchem die Masse doch so vertheilt ist, daß der Schwerpunkt in der geometrischen Achse liegt, und die Massemomente in Bezug auf zwei zu dieser Achse und unter sich senkrechte Geraden gleich sind, namentlich in dem einfachsten Falle, wo die geometrische Achse in eine Spitze endigt, und der Körper sich mit dieser auf die feste Ebene stützt, wie es bei einem gewöhnlichen Kreisel stattfindet.

Betrachten wir für diesen die Sache etwas näher, und setzen wir voraus, daß man demselben gleichzeitig eine ziemlich große Umdrehungsgeschwindigkeit $\mathfrak{r}_0$ um seine Achse, in Bezug auf welche das Massemoment $\mathfrak{C}$ sei, und eine fördernde Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ parallel zu der wagrechten Ebene ertheilt, und daß die Achse selbst anfänglich einen kleinen Winkel ϑ_0 mit der Richtung der Schwere gemacht habe; unter diesen Voraussetzungen findet man die Werthe:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \quad , \quad \xi = 0 \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 1 \, ,$$

worin l die Entfernung des Schwerpunktes von der Spitze bezeichnet, und die Gleichung (g) wird

$$\mathfrak{z} = -\, l c'' = -\, l \cos\vartheta \, ,$$

wie auch so leicht einzusehen ist, und gibt das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = l \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \, .$$

Ferner gibt die letzte der Gleichungen (i)

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = 0 \quad , \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0$$

und zeigt, daß die anfängliche Umdrehungsgeschwindigkeit um die geometrische Achse ungeändert bleibt.

Endlich zieht man aus den beiden ersten der Gleichungen (146) die Ausdrücke:

$$c\mathfrak{p} + c'\mathfrak{q} = \sin\vartheta(\mathfrak{q}\sin\psi - \mathfrak{p}\cos\psi) = \frac{d\omega}{dt}\sin^2\vartheta \, ,$$

$$\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2 = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \sin^2\vartheta + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \, ,$$

und die Gleichungen (A) und (B) des vorhergehenden §. nehmen damit die Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{A}\frac{d\omega}{dt}\sin^2\vartheta = \mathfrak{C}\mathfrak{r}_0(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta) - \mathfrak{A}(c_0\mathfrak{p}_0 + c_0'\mathfrak{q}_0) \\ &\mathfrak{A}\left[\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\sin^2\vartheta+\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] = 2Mgl(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta) \\ &\qquad - Ml^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + M\overset{z}{\mathfrak{v}}_0{}^2 + \mathfrak{A}(\mathfrak{p}_0{}^2+\mathfrak{q}_0{}^2) \end{aligned}\right\} . \text{(C.}$$

Diese Gleichungen geben wie in dem in §. 199 behandelten Falle, welchem der jetzige sehr ähnlich ist, die Werthe von ϑ und ω in Function von t, und mit diesen zieht man wieder aus der dritten der Gleichungen (146):

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta = \mathfrak{r}_0$$

den Werth von ψ und kennt auf solche Weise die Richtung der geometrischen Achse des Kreisels und einer dazu senkrechten Geraden am Ende der Zeit t. Die Lage seines Schwerpunktes wird dann theils durch die Gleichung: $\mathfrak{z} = -l\cos\vartheta$, theils durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \overset{x}{\mathfrak{v}}_0 t \quad , \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + \overset{y}{\mathfrak{v}}_0 t \, ,$$

worin $\overset{x}{\mathfrak{v}}_0$, $\overset{y}{\mathfrak{v}}_0$ die Componenten der anfänglichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ vorstellen, bestimmt, und die Gesetze der Bewegung des Kreisels sind demnach vollständig bekannt.

Um aber noch etwas näher auf die bestimmte Auflösung einzugehen, setze ich der schon gemachten Annahme gemäß

$$\overset{z}{\mathfrak{v}}_0 = 0 \quad , \qquad \mathfrak{p}_0 = 0 \quad , \qquad \mathfrak{q}_0 = 0$$

und nehme wie in dem obengenannten Falle an, daß der Winkel ϑ sich von seinem anfänglichen Werthe ϑ_0 nur wenig entferne. Eliminirt man nun zuerst wieder $\frac{d\omega}{dt}$ aus den beiden Gleichungen (C), wodurch man die Gleichung:

$$(\mathfrak{A}+Ml^2\sin^2\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2Mgl(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta) - \frac{\mathfrak{C}^2\mathfrak{r}_0{}^2(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)^2}{\mathfrak{A}\sin^2\vartheta} \quad \text{(D.}$$

erhält, und macht dann wieder wie in §. 201

$$\vartheta = \vartheta_0 + u \quad , \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{du}{dt} ,$$

$$\sin^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta_0 + u \sin 2\vartheta_0 + u^2 ,$$

$$\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta = u \sin \vartheta_0 - \frac{1}{2} u^2 \cos \vartheta_0 \quad ,$$

$$\frac{\mathfrak{M}}{Ml} = l_, \quad , \quad \frac{\mathfrak{C}^2 \mathfrak{r}_0^2}{\mathfrak{M}^2} = \frac{4\beta^2 g}{l_,} ,$$

so nimmt die vorstehende Gleichung zuerst die Form an:

$$(l_, + l \sin^2 \vartheta_0 + l u \sin 2\vartheta_0 + l u^2) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2gu \sin \vartheta_0 - g(4\beta^2 + \cos \vartheta_0) u^2$$

und wird dann innerhalb derselben Annäherungsgrenzen

$$\frac{l_, + l \sin^2 \vartheta_0}{g} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 2u \sin \vartheta_0 - \left(4\beta^2 + \cos \vartheta_0 + \frac{4l \sin^2 \vartheta_0 \cos \vartheta_0}{l_, + l \sin^2 \vartheta_0}\right) u^2 .$$

Vergleicht man nun diesen Ausdruck mit der entsprechenden Gleichung in §. 201, so wird man leicht sehen, daß namentlich in dem oben vorausgesetzten Falle einer geringen anfänglichen Neigung der Achse des Kreisels die Coeffizienten von $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ und u^2 wenig von den dortigen verschieden sind, daß man vielmehr für einen großen Werth von $\mathfrak{r}_0$ oder β unsere letztere Gleichung der Form nach ganz und gar auf die dortige zurückführen kann, wenn man $l_, + l \sin^2 \vartheta_0 = l'$ setzt und die Glieder $\cos \vartheta_0 + \frac{4l \sin^2 \vartheta_0 \cos \vartheta_0}{l_, + l \sin^2 \vartheta_0}$ neben $4\beta^2$ vernachlässigt. Es besteht dann zwischen beiden Fällen nur ein kleiner Unterschied, welcher in den Werthen von $l_,$ und l' liegt. Dort ist nämlich $\mathfrak{M}$ das Massemoment in Bezug auf die zur geometrischen Achse senkrechte Hauptachse im festen Drehungspunkte, während es im jetzigen Falle das Masse-Moment in Bezug auf die entsprechende Achse im Schwerpunkte bezeichnet; nennen wir daher jenes Massemoment $\mathfrak{M}_,$, so haben wir

$$\mathfrak{M}_, = \mathfrak{M} + Ml^2$$

und sehen daraus, daß im Allgemeinen das dortige

$$l_, = \frac{\mathfrak{M}_,}{Ml} \text{ größer ist als } \frac{\mathfrak{M} + Ml^2 \sin^2 \vartheta}{Ml}$$

oder unser jetziges l', daß also der in den nachfolgenden Ergebnissen vorkommende Coeffizient von t, nämlich $\sqrt{\frac{g}{l}}$, im jetzigen Falle etwas größer wird als dort.

Aus diesen Bemerkungen und den obigen Gleichungen wird man mit Hülfe der in §. 201 erhaltenen weitern Ergebnisse nun den Schluß ziehen, daß sich die Achse des Kreisels in einer nahe gleichen Neigung gegen eine durch den Schwerpunkt gezogene Lothlinie nahezu gleichförmig um diesen Punkt dreht, die Spitze des Kreisels also um den Fußpunkt der Lothlinie auf der festen Ebene nahe kreisförmige Curven beschreibt, während sich diese Lothlinie selbst mit dem Schwerpunkte in gerader Richtung mit der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 gleichförmig fortbewegt.

Bei der wirklich stattfindenden Bewegung eines solchen Kreisels werden indessen diese Bewegungsgesetze durch die Reibung wesentlich verändert.

§. 214.

In dem ebenbetrachteten Falle wurde das Niedersinken des Körpers durch seine rasche Umdrehung um eine zur festen Ebene nahezu senkrechte Achse verhindert; wir wollen deßhalb gerade noch die Bewegung eines Körpers untersuchen, welcher sich mit einer Schneide oder Kante auf eine horizontale Ebene stützt und sich um jene drehend auf die Ebene niederfällt. Dazu nehme ich einen homogenen prismatischen Stab, dessen Länge l, dessen Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten h und k sei, und welcher sich mit der Kante h auf die feste horizontale Ebene stützen soll.

In diesem Falle kann man sich den Druck, welchen der Stab auf die Ebene ausübt, als zwei Kräfte N_1 und N_2 vorstellen, welche in den beiden Endpunkten der Kante h angreifen, so daß man für die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in Bezug auf die drei zu den Kanten parallelen Hauptachsen im Schwerpunkte die Werthe hat:

$$\begin{array}{lll} \xi_1 = +\frac{1}{2}h\,, & \left.\begin{array}{l}\eta_1\\ \\ \eta_2\end{array}\right\} = \frac{1}{2}k\,, & \left.\begin{array}{l}\zeta_1\\ \\ \zeta_2\end{array}\right\} = \frac{1}{2}l\,. \\ \xi_2 = -\frac{1}{2}h\,, & & \end{array}$$

Die Gleichung (g), welche dann sowohl für den einen wie für den

andern dieser beiden Punkte befriedigt werden muß, nimmt für den erstern die Form an:

$$\mathbf{Z} + \frac{1}{2}\,c\,h + \frac{1}{2}\,c'\,k + \frac{1}{2}\,c''\,l = 0\;;$$

für den andern wird sie

$$\mathbf{Z} - \frac{1}{2}\,c\,h + \frac{1}{2}\,c'\,k + \frac{1}{2}\,c''\,l = 0\,,$$

und man zieht daraus die neuen Gleichungen:

$$c\,h = 0 \quad , \qquad \mathbf{Z} + \frac{1}{2}(c'\,k + c''\,l) = 0\,,$$

von denen die erste zeigt, daß c oder $\cos\widehat{\xi z}$ fortwährend Null, also $\widehat{\xi z}$ gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist und bleiben muß. Daraus folgt aber, da man auch $c = -\cos\psi\sin\vartheta$ hat, daß auch $\cos\psi = 0$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$ ist, und daß $c' = \cos\widehat{\eta z} = \sin\widehat{\zeta z} = \sin\vartheta$ wird. Mit diesen Werthen folgt sofort aus der zweiten der obigen Gleichungen

$$\frac{1}{2}(k\sin\vartheta + l\cos\vartheta) \qquad = -\mathbf{Z}$$

$$\frac{1}{2}(k\cos\vartheta - l\sin\vartheta)\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{d\mathbf{Z}}{dt}\,,$$

und wenn man nun die erste dieser Gleichungen mit $\frac{d\vartheta}{dt}$ multiplicirt und beide zum Quadrat erhebt, so gibt ihre Summe

$$(k^2 + l^2 - 4\mathbf{Z}^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 4\left(\frac{d\mathbf{Z}}{dt}\right)^2,$$

und daraus zieht man weiter

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mp\frac{2}{\sqrt{k^2 + l^2 - 4\mathbf{Z}^2}}\cdot\frac{d\mathbf{Z}}{dt}\,.$$

Mit den vorhergehenden Werthen von c, ξ_1 und ξ_2 kommen sodann die beiden letzten der Gleichungen (145) den beiden letzten der Gleichungen (i) entsprechend auf folgende zurück:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\,h\,(N_1 - N_2)\cos\vartheta \\ \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} - \frac{1}{2}\,h\,(N_1 - N_2)\sin\vartheta\end{aligned}\right\}, \quad (k.$$

und wenn man daraus $N_1 - N_2$ eliminirt, so ergibt sich zuerst die Beziehung:

$$\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\sin\vartheta + \mathfrak{C}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\cos\vartheta = \mathfrak{p}\left[(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{r}\sin\vartheta + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{q}\cos\vartheta\right].$$

Die Gleichungen (146) geben aber für $\psi = \frac{1}{2}\pi$ die einfachen Werthe:

$$\mathfrak{p} = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \mathfrak{q} = \frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta, \quad \mathfrak{r} = \frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta,$$

woraus wieder die Aenderungsgesetze:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}\sin\vartheta + \frac{d\omega}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d^2\omega}{dt^2}\cos\vartheta - \frac{d\omega}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta$$

folgen, und womit nun die vorhergehende Beziehung nach einigen Reductionen die Form annimmt:

$$\frac{\frac{d^2\omega}{dt^2}}{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{2(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\sin\vartheta\cos\vartheta}{\mathfrak{B}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\cos^2\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Das unbestimmte Integral dieser Gleichung ist, wie leicht zu sehen,

$$\Delta.\,logn\,\frac{d\omega}{dt} = -\,\Delta.\,logn\left[\mathfrak{B}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\cos^2\vartheta\right];$$

wenn daher $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0$ und ϑ_0 die anfänglichen Werthe von $\frac{d\omega}{dt}$ und ϑ bezeichnen, so hat man, wenn man von den Logarithmen zu den entsprechenden Zahlen übergeht,

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0 \frac{\mathfrak{B}\sin^2\vartheta_0 + \mathfrak{C}\cos^2\vartheta_0}{\mathfrak{B}\sin^2\vartheta + \mathfrak{C}\cos^2\vartheta}$$

und schließt daraus, daß für den Fall, wo $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0 = 0$, also auch $\mathfrak{p}_0 = 0$, $\mathfrak{q}_0 = 0$, d. h. in dem Falle, wo der Stab keine anfängliche Winkelgeschwindigkeit um eine verticale Achse besitzt, $\frac{d\omega}{dt}$, also auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ immer Null bleiben, wie vorherzusehen war. Für diesen Fall geben dann auch die Gleichungen (k) den Werth: $N_1 - N_2 = 0$ oder $N_1 = N_2$, wie ebenfalls leicht vorauszusehen ist; diese Gleichungen zeigen aber, daß $N_1 - N_2$ nicht mehr Null wird, der Druck in beiden Endpunkten der Kante h also nicht mehr gleich ist, wenn dem Stabe eine anfängliche Winkelgeschwindigkeit um eine verticale Achse ertheilt worden ist.

Beschränken wir uns nun für das Folgende auf den einfacheren Fall, wo $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Null sind, so gibt uns die dritte der Gleichungen (a) in §. 209 wie früher

$$N_1 + N_2 = N = Mg - M\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2},$$

und die Gleichung (B) in §. 212 wird

$$\mathfrak{M}\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{p}_0^2 + 2Mg(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0) - M\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + M\overset{z}{V}_0^2$$

und nimmt, wenn man für $\mathfrak{p}^2 = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ den obigen Werth in Function von $\mathfrak{z}$ einführt und $\overset{z}{V}_0 = 0$ setzt, woraus nach dem Werthe von $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ entweder

$$\mathfrak{p}_0 = 0 \qquad \text{oder} \qquad l\,\sin\vartheta_0 - k\,\cos\vartheta_0 = 0$$

folgt, die Form an:

$$\left(M + \frac{4\mathfrak{M}}{l^2 + k^2 - 4\mathfrak{z}^2}\right)\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2 = 2Mg(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0).$$

Macht man dann noch zur Abkürzung $l^2 + k^2 = l_,^2$, führt für das Massemoment $\mathfrak{M}$ seinen Werth $\frac{1}{12}M(l^2 + k^2) = \frac{1}{12}Ml_,^2$ ein und beachtet, daß $\mathfrak{z}$ mit t wächst, so zieht man aus der vorstehenden Gleichung das Integral:

$$t = \int_{+\mathfrak{z}_0}^{-\frac{1}{2}k} d\mathfrak{z}\,.\,\frac{2\sqrt{l_,^2 - 3\mathfrak{z}^2}}{\sqrt{6g(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)(l_,^2 - 4\mathfrak{z}^2)}}$$

als Ausdruck für die Zeit, welche der Stab zum Niederfallen braucht. Dieser Ausdruck nimmt eine einfachere Form an, wenn man darin noch

$$\mathfrak{z} = -\frac{1}{2} l_{,} \cos\chi \quad , \quad \mathfrak{z}_0 = -\frac{1}{2} l_{,} \cos\chi_0 \quad , \quad k = l_{,} \cos\gamma$$

setzt; man findet nämlich dadurch

$$t = \sqrt{\frac{l_{,}}{3g}} \int_{\chi_0}^{\gamma} d\chi \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\cos^2\chi}}{\sqrt{\cos\chi_0 - \cos\chi}} \; ;$$

man kann aber auch daraus den Werth von t nur auf dem Wege der Annäherung berechnen.

Im Uebrigen wird man leicht aus den beiden ersten der Gleichungen (a) in §. 209, welche für unsern Fall in die einfachen:

$$\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} = 0$$

übergehen, schließen, daß der Schwerpunkt des Stabes, wenn ihm keine anfängliche Geschwindigkeit in wagrechter Richtung ertheilt worden ist, längs einer lothrechten Geraden niedersinkt, und daß demnach die Kante, mit welcher er sich auf die Ebene stützt, in demselben Maaße rückwärts ausweicht. Ferner wird man sich durch Vergleichung des vorhergehenden Werthes von $\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2$, worin $M + \frac{4\mathfrak{M}}{l^2 + k^2 - 4\mathfrak{z}^2}$ jedenfalls größer als $\frac{1}{3}M$ ist, mit dem Ausdrucke:

$$M\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2 = 2Mg(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)$$

für die lothrechte Geschwindigkeit eines schweren Punktes von der Masse M schließen, daß die lebendige Kraft, welche der Schwerpunkt des Stabes in unserem jetzigen Falle erwirbt, geringer ist, als wenn derselbe frei von der Höhe $\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0$ herabfällt, ohne gedreht zu werden, daß also der Stab auch eine größere Zeit zum Niedersinken braucht, als ein schwerer Punkt, welcher den Weg seines Schwerpunktes zurücklegt.

§. 215.

Das in den vorhergehenden §§. angewendete Verfahren, um die gezwungene Bewegung eines festen Systems zu untersuchen, wurde ausdrücklich unter dem Vorbehalte angewendet, daß durch die Bewegung

auf der festen Fläche keine Reibung erzeugt wird; denn jenes Verfahren ist nicht mehr allgemein anwendbar, wenn dieses letztere der Fall ist, d. h. die Gesetze für die gezwungene Bewegung eines festen Systems, das sich immer auf eine feste Fläche stützt, können nicht allgemein dadurch erhalten werden, daß man auch die Reibung wie eine andere Kraft in die Gleichungen (136) und (137) oder (143) und (144) einführt; denn in diesem Falle sind die durch die genannten Gleichungen ausgesprochenen Gesetze:

1) daß sich der Mittelpunkt der Masse des festen Systems so bewegt, wie ein materieller Punkt von gleicher Masse, an welchem sämmtliche fördernde Kräfte des Systems thätig sind, und

2) daß sich das System unter dem Einflusse sämmtlicher drehenden Kräfte so um jenen Mittelpunkt dreht, als ob dieser fest wäre,

nicht mehr allgemein wahr. Der Grund davon ist leicht einzusehen; er besteht darin, daß die Reibung nicht wie eine bewegende Kraft nach einer bestimmten Richtung wirkt, sondern sich der Bewegung der mit der festen Fläche in Berührung stehenden Punkte in jeder Richtung widersetzt, und daß sie keine Bewegung in ihrem frühern Sinne erzeugen kann, wenn die Geschwindigkeit jener Punkte durch ihren Einfluß Null geworden ist.

Bei einem freien Körper oder einem Körper, welcher sich ohne Reibung auf einer Fläche bewegt, bleibt die fortschreitende Bewegung, welche dem Mittelpunkte der Masse durch die fördernden Kräfte ΣX, ΣY, ΣZ mitgetheilt wird, unabhängig von den drehenden Kräften und der drehenden Bewegung, weil auch im letztern Falle die mit der Fläche in Berührung kommenden Punkte bei dieser drehenden Bewegung ungehindert an der Fläche vorübergleiten und in Bezug auf die Bewegung des Mittelpunktes ungehindert rückwärts ausgleiten können. Tritt dagegen an diesen Berührungspunkten Reibung auf, so hindert diese nicht nur die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse, wie eine verzögernde Kraft, sondern sie hindert auch das Darüberhingleiten der berührenden Punkte bei der drehenden Bewegung; diese stützen sich gleichsam auf jenen Widerstand, und bei hinreichender Größe desselben, wenn derselbe nämlich größer ist, als der auf die Berührungspunkte tangential ausgeübte Druck, wird das System durch die drehenden Kräfte um den oder die Berührungspunkte, wie um einen festen Punkt oder um eine feste Achse gedreht werden, der Mittelpunkt selbst also dadurch eine fortschreitende Bewegung erhalten, welche ihm die fördernden Kräfte des Systems nicht zu ertheilen vermögen. Endlich wird es in vielen Fällen

auch zweifelhaft werden, in welchem Sinne die Reibung als fördernde Kraft zu nehmen, mit welchem Zeichen sie also in die Gleichungen (143) und (144) einzuführen ist, da es selbst vorkommen kann, daß dieser Widerstand während der Bewegung das Zeichen wechselt; die Untersuchung der Bewegung mittels dieser Gleichungen kann also niemals zu einem befriedigenden Ergebnisse führen.

Einige Beispiele mögen die vorhergehende Auseinandersetzung näher erläutern und bestätigen.

Wir haben in dem vorhergehenden §. die Bewegung eines parallelepipedischen Stabes untersucht, welcher sich mit einer Kante auf eine horizontale Ebene stützt und durch sein Gewicht niedersinkt, und gefunden, daß wenn keine Reibung stattfindet, sein Mittelpunkt sich in einer verticalen Geraden bewegt, und daß der Druck auf die Ebene um die Kraft $M \frac{d^2 z}{dt^2}$, welche die Aenderung der verticalen Geschwindigkeit des Mittelpunktes zu erzeugen vermag, kleiner ist, als das Gewicht Mg des Stabes. Kommt nun die Reibung hinzu und ist der Reibungs-Coefficient nicht sehr klein, so wird im Anfange der Bewegung, wo der Druck auf die Ebene noch hinreichend groß ist, der Mittelpunkt des Stabes einen Kreisbogen um die untere Kante, mit welcher er sich auf die Ebene stützt, beschreiben, und diese Kante wird erst später, wenn durch die Beschleunigung der Bewegung der Druck und die Reibung kleiner geworden sind, rückwärts ausgleiten können; man wird ferner leicht einsehen, daß es für eine bestimmte anfängliche Lage des Stabes eine gewisse Größe für den Reibungscoefficienten geben muß, für welche jenes Ausgleiten gar nicht stattfindet, der Mittelpunkt des Stabes also nur einen Kreisbogen beschreibt, und daß sich darin nichts ändert, wenn dann der Reibungscoefficient noch viel größer genommen wird. Eine einfache Betrachtung genügt aber, um einzusehen, daß die Gleichungen (143) und (144) oder die daraus abgeleiteten (a) und (b) der §§. 209 und 210 im Allgemeinen nicht zu diesen Ergebnissen führen können; denn die beiden ersten der Gleichungen (a) in §. 209 geben durch Einführung der Reibung eine zu der festen Ebene parallele fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes, welche von der Größe des Reibungs-Coefficienten abhängt, und vermöge welcher derselbe von Anfang an selbst eine über den Kreisbogen hinausgehende Curve beschreiben müßte, was ohne eine anfängliche Geschwindigkeit offenbar nicht möglich ist. Die obengenannten Gleichungen werden nur dann anwendbar, wenn die untere Kante schon im Anfange der Bewegung ausgleiten kann,

oder nur für denjenigen Theil der Bewegung, für welchen ein solches Ausgleiten stattfindet.

Noch weniger genügend wird die Anwendung der genannten Gleichungen, wenn sich der Stab auf eine geneigte Ebene stützt und gegen den untern Theil derselben zu fallen anfängt, da es in diesem Falle zweifelhaft wird, ob die Reibung nach oben oder nach unten gerichtet anzunehmen ist.

Ein anderes, noch einleuchtenderes Beispiel ist die Bewegung einer homogenen Kugel oder eines homogenen Cylinders auf einer geneigten Ebene unter dem Einflusse der Reibung; denn man überzeugt sich leicht, daß die Gleichungen (143) für diesen Fall ganz dieselben sind, wie für einen Körper, der sich mit drei oder mehreren Punkten, welche nicht in einer Geraden liegen, auf die Ebene stützt und daher nur gleiten kann, daß also auch die Geschwindigkeit des Mittelpunktes dieselbe sein müßte, wie die eines gleitenden Körpers, da die aus den Gleichungen (144) folgende drehende Bewegung um den Mittelpunkt gänzlich unabhängig ist von der Bewegung dieses letztern und umgekehrt, und demnach keine von beiden Bewegungen einen Einfluß auf die Geschwindigkeit der andern haben kann. Wir finden nach dieser Betrachtungsweise, wenn wir etwas näher darauf eingehen und dazu die geneigte Ebene als Ebene der xy, die Ebene der xz parallel zur Richtung der Schwere annehmen und den Winkel zwischen dieser Richtung und der Normalen zur Ebene oder der Achse der z mit α bezeichnen, durch die erste und dritte der Gleichungen (143)

$$\text{a.)} \quad \left\{ \begin{aligned} M\frac{d^2X}{dt^2} &= Mg \sin\alpha - fN \\ 0 &= Mg \cos\alpha - N \end{aligned} \right.$$

als Gleichungen der fortschreitenden Bewegung des Mittelpunktes und daraus durch Elimination von N und die erste Integration

$$\overset{x}{V} = \overset{x}{V}_0 + gt(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

wie für einen materiellen Punkt (Bd. I., §. 51) oder einen gleitenden Körper, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird (Bd. II., §. 152). Es müßte also auf einer Ebene, für welche $\tang\alpha =$ oder $<$ f ist, der Mittelpunkt der Kugel oder die Achse des Cylinders ohne anfängliche Geschwindigkeit die Geschwindigkeit Null behalten oder in Ruhe bleiben, was offenbar nicht der Fall sein kann, weil diese Körper in dem Falle,

wo $tang\,\alpha$ gleich und selbst größer ist als f ist, um den jeden Augenblick wechselnden Berührungspunkt oder die Berührungslinie wie um eine augenblickliche feste Drehungsachse gedreht werden, und der Mittelpunkt dadurch eine Geschwindigkeit erhält, welche ihm die fördernden Kräfte nicht ertheilen können. Es dürfte nach diesem kaum nothwendig sein, zu bemerken, daß für den erwähnten Fall $tang\,\alpha =$ oder $<$ f auch der aus der zweiten der Gleichungen (145) sich ergebende Ausdruck für die drehende Bewegung um eine durch den Mittelpunkt gehende, zur festen Ebene parallele Achse:

$$\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = frN = frMg\,cos\,\alpha \qquad (b.$$

unrichtig sein muß, abgesehen davon, daß diese drehende Bewegung um den stillstehenden Mittelpunkt statthaben müßte.

§. 216.

Die vorhergehenden Erörterungen deuten darauf hin, daß die Untersuchung der Bewegung eines Körpers, der sich mit einem oder mehreren in einer Geraden liegenden Punkten auf eine feste Fläche stützt, in dem Falle, wo die Reibung berücksichtigt wird, wesentlich von der Untersuchung abhängt, ob die Berührungspunkte auf der Fläche fortgleiten oder nicht, d. h. ob der tangential gerichtete fördernde Druck auf die mit der festen Fläche in Berührung stehenden Punkte des Körpers größer oder kleiner ist, als die Reibung zwischen diesen Punkten und der festen Fläche; es wird daher nothwendig, die allgemeinen Gleichungen (134) und (135) in §. 202 für die freie Bewegung eines festen Systems, welche immerhin auch für unsern jetzigen Fall gültig bleiben, wenn man darin die Widerstände N und die Reibungen fN einführt, in andere umzuwandeln, in welchen die fortschreitende Bewegung des Berührungspunktes oder der Berührungslinie und die drehende Bewegung des Systems um die letztern deutlicher hervortritt.

Betrachten wir dazu insbesondere wieder den Fall, wo der Körper sich nur mit einem Punkte auf die Fläche stützt, weil sich der andere leicht auf diesen zurückführen läßt, und bezeichnen wir die Coordinaten des augenblicklichen Berührungspunktes am Ende der Zeit t in Bezug auf ein unverrückbares Coordinatensystem der x, y, z mit $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, legen durch diesen Punkt ein neues Coordinatensystem der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, welches zu dem vorhergehenden parallel bleibt, und bezeichnen die

Coordinaten des Mittelpunktes der Masse des bewegten Körpers in Bezug auf dasselbe mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so erhalten wir zuerst wieder für die Coordinaten eines beliebigen Punktes im System die Beziehungen:

$$x = x_, + \mathfrak{x} \quad , \qquad y = y_, + \mathfrak{y} \quad , \qquad z = z_, + \mathfrak{z} \; ,$$

für die des Mittelpunktes der Masse ebenso

$$X = x_, + \mathfrak{X} \quad , \qquad Y = y_, + \mathfrak{Y} \quad , \qquad Z = z_, + \mathfrak{Z} \; ,$$

wozu noch die weitern kommen

$$\Sigma . m\mathfrak{x} = M\mathfrak{X} \quad , \qquad \Sigma . m\mathfrak{y} = M\mathfrak{Y} \quad , \qquad \Sigma . m\mathfrak{z} = M\mathfrak{Z} \; ,$$

und die Gleichungen (134) nehmen damit und durch Einführung des normalen Widerstandes N und der Reibung fN die Form an:

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma . m \frac{d^2 x_,}{dt^2} + M \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2} &= \Sigma X - N \cos\lambda - fN \cos l \; , \\ \Sigma . m \frac{d^2 y_,}{dt^2} + M \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2} &= \Sigma Y - N \cos\mu - fN \cos m \; , \\ \Sigma . m \frac{d^2 z_,}{dt^2} + M \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2} &= \Sigma Z - N \cos\nu - fN \cos n \; , \end{aligned}\right.$$

worin λ, μ, ν wie früher die Winkel zwischen den Coordinatenachsen und der durch den Berührungspunkt gezogenen Normalen zur festen Fläche und l, m, n die Winkel zwischen denselben Achsen und der Tangente an der von dem Berührungspunkte beschriebenen Curve bezeichnen, so daß man hat

$$\cos\lambda \cos l + \cos\mu \cos m + \cos\nu \cos n = 0 \; .$$

Da aber die Coordinaten $x_,$, $y_,$, $z_,$ einem bestimmten Punkte des Systems angehören, so hat man auch

$$\Sigma . m \frac{d^2 x_,}{dt^2} = M \frac{d^2 x_,}{dt^2} \; , \quad \Sigma . m \frac{d^2 y_,}{dt^2} = M \frac{d^2 y_,}{dt^2} \; , \quad \Sigma . m \frac{d^2 z_,}{dt^2} = M \frac{d^2 z_,}{dt^2} \; ,$$

und die vorhergehenden Gleichungen lassen sich deßhalb auch unter die Form bringen:

$$147.) \left\{\begin{aligned} M \frac{d^2 x_,}{dt^2} &= \Sigma X - M \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2} - N(\cos\lambda \pm f \cos l) \; , \\ M \frac{d^2 y_,}{dt^2} &= \Sigma Y - M \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2} - N(\cos\mu \pm f \cos m) \; , \\ M \frac{d^2 z_,}{dt^2} &= \Sigma Z - M \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2} - N(\cos\nu \pm f \cos n) \; . \end{aligned}\right.$$

Durch dieselben Substitutionen wird dann die erste der Gleichungen (135), nachdem darin die Kräfte N und fN eingeführt worden sind, zuerst in folgende umgewandelt:

$$\Sigma . m\left(\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}-\mathfrak{y}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)+M\left(\mathfrak{X}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}-\mathfrak{Y}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}\right)$$

$$+M\left(x_{,}\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}-y_{,}\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}\right)+M\left(x_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}-y_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}\right)$$

$$=\Sigma(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)+x_{,}\Sigma Y-y_{,}\Sigma X-N(x_{,}\cos\mu-y_{,}\cos\lambda)$$

$$\pm fN(x_{,}\cos m-y_{,}\cos l)$$

und nimmt mit Berücksichtigung der beiden ersten der Gleichungen (147), wenn sie mit $y_{,}$ und $x_{,}$ multiplicirt worden sind, die einfache Form:

$$\Sigma . m\left(\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}-\mathfrak{y}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)=\Sigma(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)-M\left(\mathfrak{X}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}-\mathfrak{Y}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}\right)$$

an, in welcher nun die unbekannten Kräfte N und fN verschwunden sind. Aehnliche Umwandlungen werden wir auch mit den beiden letzten der Gleichungen (135) vornehmen und dadurch folgende drei Gleichungen für die drehende Bewegung des Systems um den augenblicklichen Berührungspunkt erhalten, worin die drehenden Kräfte: $\Sigma(\mathfrak{x}Y-\mathfrak{y}X)$, $\Sigma(\mathfrak{z}X-\mathfrak{x}Z)$, $\Sigma(\mathfrak{y}Z-\mathfrak{z}Y)$ in Bezug auf die Achsen der $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ durch $M_{\mathfrak{z}}$, $M_{\mathfrak{y}}$ und $M_{\mathfrak{x}}$ ersetzt sind:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma . m\left(\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}-\mathfrak{y}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right)&=M_{\mathfrak{z}}-M\left(\mathfrak{X}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}-\mathfrak{Y}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}\right)\\
\Sigma . m\left(\mathfrak{z}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}-\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right)&=M_{\mathfrak{y}}-M\left(\mathfrak{Z}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}-\mathfrak{X}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}\right)\\
\Sigma . m\left(\mathfrak{y}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}-\mathfrak{z}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)&=M_{\mathfrak{x}}-M\left(\mathfrak{Y}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}-\mathfrak{Z}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (148.$$

In diesen sechs Gleichungen (147) und (148), verbunden mit den Gleichungen für die feste Fläche und die Begrenzungsfläche des auf ihr sich bewegenden Körpers, ist nun die Auflösung unserer Aufgabe für alle Fälle enthalten; sie werden zeigen, ob unter gegebenen, oder unter welchen Verhältnissen die rechte Seite der Gleichungen (147) Null wird oder die Glieder $fN\cos l$, $fN\cos m$, $fN\cos n$ ohne Rücksicht auf ihr Zeichen größer werden, als die drei andern derselben Gleichungsseite, und unter welchen Verhältnissen jene Glieder kleiner bleiben als diese. In den Fällen, wo das letztere stattfindet, oder so

lange dasselbe stattfindet, wird die mittels unserer letzten Gleichungen sich ergebende Bewegung des Mittelpunktes der Masse dieselbe sein, wie die aus den Gleichungen (143) und (144) folgende, wenn in diesen noch die Reibung im entsprechenden Sinne genommen eingeführt wird; so lange aber in den Gleichungen (147) die Componenten der Reibung die überwiegenden Kräfte sind, wird die durch die Gleichungen (143) und (144) sich ergebende Auflösung sich wesentlich unterscheiden von der aus unsern Gleichungen (147) und (148) folgenden, und nur die letztere die richtige sein, und es muß dabei für den anfänglichen Zustand des Systems wohl unterschieden und bestimmt festgestellt werden, ob der Berührungspunkt selbst eine anfängliche gleitende Geschwindigkeit besitzt oder nicht. In dieser Beziehung wird sich denn auch für manche Fälle die Frage zur Entscheidung aufdrängen, ob und unter welchen Verhältnissen eine augenblickliche oder sehr kurze Zeit wirkende Ursache für den anfänglichen Zustand des Systems dem anfänglichen Berührungspunkte eine fortschreitende, gleitende Geschwindigkeit ertheilen wird, ob z. B. einer auf horizontaler Ebene ruhenden Kugel durch einen Stoß gleichzeitig eine gleitende und eine wälzende Geschwindigkeit ertheilt wird oder ob blos die letztere. Wir werden auf diese Frage im folgenden Buche zurückkommen.

Endlich ist noch zu bemerken, daß für den Fall, wo sich der Körper mit einer Spitze auf eine Fläche stützt, wo also der Berührungspunkt unveränderlich ist, statt der Gleichungen (148) zur Bestimmung der drehenden Bewegung wieder andere, den Gleichungen (145) entsprechende angewendet werden können, indem man durch den Berührungspunkt ein neues Coordinatensystem, dessen Achsen die Hauptachsen des bewegten Körpers für diesen Punkt sind, legt und die Lage des Mittelpunktes der Masse in Bezug auf diese letztern Achsen sucht, um auch die Momente:

$$M\left(\mathfrak{X}\frac{d^2y_{\prime}}{dt^2}-\mathfrak{Y}\frac{d^2x_{\prime}}{dt^2}\right)\quad,\quad \text{u. s. f.}$$

welche die Componenten der drehenden Wirkung einer Kraft F, vorstellen, die im Mittelpunkte der Masse angreift und deren fördernde Componenten nach den festen Achsen durch $M\frac{d^2x_{\prime}}{dt^2}$, $M\frac{d^2y_{\prime}}{dt^2}$, $M\frac{d^2z_{\prime}}{dt^2}$ ausgedrückt sind, welche also die Bewegung eines materiellen Punktes von der Masse M in derselben Weise zu ändern vermag, wie es bei der Bewegung des Berührungspunktes der Fall ist, in andere zu ver-

wandeln, deren Achsen mit den neuen Coordinatenachsen zusammenfallen. Die Gleichungen (146) werden dann wieder dazu dienen, um die Lage des neuen Coordinatensystems in Bezug auf das parallel fortschreitende in Function der Zeit zu bestimmen.

Wenn sich der Bewegte mit einer Schneide oder Kante auf eine feste Ebene stützt, so kann man für den Fall, wo diese Kante nur eine parallel fortschreitende Bewegung erhält, wie in §. 214 deren Endpunkte als eigentliche Berührungspunkte und denjenigen Punkt derselben als gemeinschaftlichen Anfangspunkt für das parallel fortschreitende und das sich drehende Coordinatensystem wählen, für welchen die Achsen des letztern, die Hauptachsen des Körpers für diesen Punkt, die einfachste Lage erhalten. Muß dagegen auch eine drehende Bewegung der Kante berücksichtigt werden, so ist es für die Momente der Reibung nicht mehr gleichgültig, wie sich der resultirende Druck längs der Kante vertheilt, und die Gleichungen (148) sind nicht mehr frei von den Kräften f N; es würde uns indessen hier zu weit führen, wenn wir auf diesen Fall näher eingehen wollten.

Für die Anwendung der vorhergehenden Erörterungen beschränke ich mich deßhalb auch auf die Untersuchung der beiden in §. 215 bereits besprochenen einfachen Fälle, welche auch schon in den §§. 211 und 214 ohne Rücksicht auf Reibung betrachtet worden sind.

§. 217.

Nehmen wir zuerst den homogenen parallelepipedischen Stab, welcher sich mit einer Kante auf eine horizontale Ebene stützt und durch sein Gewicht ohne anfängliche Geschwindigkeit auf dieselbe niederfällt. Diese feste horizontale Ebene sei die der x y und der $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$, die Kante, mit welcher sich der Stab auf sie stützt, die Achse der $\mathfrak{x}$ und in ihrer anfänglichen Lage die der x, ihr Mittelpunkt der Anfangspunkt für die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, die Achsen der positiven z und $\mathfrak{z}$ seien im Sinne der Schwere oder abwärts gerichtet. Es genügen dann die beiden letzten der Gleichungen (147) und die dritte der Gleichungen (148) zur Auflösung unserer Aufgabe; man hat für die erstern die Werthe:

$$\Sigma Y = 0 \quad , \quad \Sigma Z = Mg \ ,$$

$$\mu = \frac{1}{2}\pi \quad , \quad \nu = 0 \quad , \quad m = 0 \quad , \quad n = \frac{1}{2}\pi$$

und findet damit für die fortschreitende Bewegung die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} M\frac{d^2 y_,}{dt^2} &= \pm fN - M\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}, \\ M\frac{d^2 z_,}{dt^2} &= Mg - M\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} - N. \end{aligned}\right.$$

Da aber der Anfangspunkt der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, dessen Coordinaten mit $x_,$, $y_,$, $z_,$ bezeichnet wurden, immer auch der festen Ebene angehören muß, deren Gleichung $z = 0$ ist, so hat man immer $z_, = 0$ und $\frac{d^2 z_,}{dt^2} = 0$, und die letzte der vorstehenden Gleichungen gibt sofort wie früher als resultirenden Druck auf die Ebene

$$N = Mg - M\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} = Mg - M\frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2},$$

da offenbar immer auch $\mathfrak{Z} = \mathbf{Z}$ ist. Wird dieser Werth dann in die erste jener Gleichungen eingeführt, so ergibt sich für die fortschreitende Bewegung der Berührungskante die einzige Gleichung:

$$\text{a.)} \qquad \frac{d^2 y_,}{dt^2} = \pm f\left(g - \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right) - \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2},$$

in welcher für f das obere Zeichen genommen werden muß, so lange $\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}$ positiv ist, das untere dagegen, wenn dieses Aenderungsgesetz negativ wird, und welche zeigt, daß $y_,$ constant, die Kante also unverrückt bleibt, so lange unabhängig vom Zeichen von f

$$\text{b.)} \qquad f\left(g - \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right) > \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}.$$

Um aber diese Bedingung näher untersuchen zu können, müssen wir auch die Gleichung für die drehende Bewegung des Systems aufstellen; dazu seien wieder k und l die Längen der zu der Ebene der $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ parallelen Kanten des Stabes, also $\mathfrak{M} = \frac{1}{3}M(l^2 + k^2) = \frac{1}{3}Ml_,^2$ das Massemoment desselben in Bezug auf die Berührungslinie oder die Achse der $\mathfrak{x}$, und ϑ bezeichne den Winkel, welchen die durch den Schwerpunkt des Stabes und die Mitte der untern Kante gezogene Gerade mit der Achse der negativen $\mathfrak{z}$ macht; es ist dann

$$\Sigma . m\left(\mathfrak{y}\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}-\mathfrak{z}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)=\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{p}}{dt}=\frac{1}{3}Ml_{,}^{2}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\ ,$$

$$\mathfrak{Z}=-\frac{1}{2}l_{,}\cos\vartheta\qquad,\qquad\mathfrak{Y}=\frac{1}{2}l_{,}\sin\vartheta\ ,$$

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}=\frac{1}{2}l_{,}\left[\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2+\sin\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right],\ \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}=\frac{1}{2}l_{,}\left[\cos\vartheta\frac{d^2\vartheta}{dt^2}-\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]$$

$$M_x=Mg\mathfrak{Y}=\frac{1}{2}Mgl_{,}\sin\vartheta\ ,$$

und die dritte der Gleichungen (148) wird damit

$$\frac{1}{3}l_{,}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\frac{1}{2}g\sin\vartheta-\frac{1}{2}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}\cos\vartheta\ ;\qquad\text{(c.}$$

sie kommt aber, so lange die Bedingung (b) besteht, auf die einfache:

$$l_{,}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\frac{3}{2}g\sin\vartheta$$

zurück, welche mit der in §. 179 für die Bewegung eines schweren Körpers um eine feste Achse abgeleiteten übereinstimmt, und deren erstes Integral wie dort den Ausdruck gibt:

$$l_{,}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2=3g(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)\ .\qquad\text{(d.}$$

Für das Ende dieser um die untere Kante wie um eine feste Achse stattfindenden Bewegung hat man vermöge der Bedingung (b) die Gleichung:

$$fg-f\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}-\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}=0$$

oder mit den obigen Werthen von $\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}$ und $\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}$

$$2fg-l_{,}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}(f\sin\vartheta+\cos\vartheta)-l_{,}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2(f\cos\vartheta-\sin\vartheta)=0\ .$$

Eliminirt man dann die Factoren $l_{,}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ und $l_{,}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ mittels der Gleichungen (c) und (d), so folgt die Bedingung:

$$4f-3\sin\vartheta(f\sin\vartheta+\cos\vartheta)-6(\cos\vartheta_0-\cos\vartheta)(f\cos\vartheta-\sin\vartheta)=0\ ,\qquad\text{(e.}$$

mittels welcher der Winkel ϑ bestimmt werden kann, für den die genannte Bewegung ihr Ende erreicht. Zunächst wird man sich aber

durch dieselbe davon überzeugen, ob im Anfange der Bewegung die Verhältnisse von ϑ_0 und f der Art sind, daß kein Ausgleiten der Berührungskante stattfindet. Setzt man nämlich $\vartheta = \vartheta_0$, so wird die Bedingung (e) einfach

$$f(4 - 3\sin^2\vartheta_0) = 3\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0$$

oder

$$\text{h.)} \qquad f = \frac{3\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}{4 - 3\sin^2\vartheta_0} = \frac{3\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0}{1 + 3\cos^2\vartheta_0} \;;$$

d. h. es muß f größer sein als dieser Werth, wenn für den Anfang der Bewegung die Gleichung (d) Anwendung finden soll. Man sieht leicht daraus, daß f sehr klein sein darf, wenn ϑ_0 nahe an Null oder nahe an $\frac{1}{2}\pi$ liegt, daß es also einen größten Werth für f gibt, wenn man ϑ_0 von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen läßt, und zwar findet man leicht als entsprechende Werthe von $\cos\vartheta_0$ und $\sin\vartheta_0$

$$\cos\vartheta_0 = \sqrt{\frac{1}{5}} \quad , \qquad \sin\vartheta_0 = \sqrt{\frac{4}{5}} \,,$$

womit sich $\vartheta_0 = 63^0 26'$, und dann als größter Werth von f

$$f = \frac{3}{4}$$

berechnet. Für $\vartheta_0 = 30^0$ hat man nur $f = 0{,}3997$ oder nahe 0,4.

Der größte Werth, welchen ϑ_0 und ϑ erhalten kann, ist $arc\cos\frac{k}{l_{\prime}} = arc\tan\frac{l}{k}$, also niemals $\frac{1}{2}\pi$; führen wir aber einfach $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, $\cos\vartheta = 0$ in die Bedingung (e) ein, so erhalten wir die Bedingung:

$$-f = 6\cos\vartheta_0 \;,$$

welche durch das Zeichen von f andeutet, daß wenn die drehende Bewegung um die untere Kante bis zu einem von $\frac{1}{2}\pi$ nicht mehr sehr entfernten Werthe von ϑ reicht, das Aenderungsgesetz $\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}$ negativ wird, indem nun der durch die Bewegung um jene Achse hervorgerufene dynamische Druck auf dieselbe überwiegt. Führt man nämlich in den obigen Werth von $\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}$ in Function von ϑ die Werthe für $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$

und $\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$ aus den Gleichungen (c) und (d) ein, so findet man, daß man für das genannte Aenderungsgesetz, also auch für den horizontalen Druck auf die Kante den Werth Null erhält, wenn

$$\cos\vartheta = \frac{2}{3}\cos\vartheta_0$$

geworden ist, daß demnach dieser Druck für ein noch größeres ϑ das Zeichen ändert und positiv wird und daher der untern Kante noch zuletzt eine im Sinne der positiven y gerichtete Bewegung ertheilt, wobei die Reibung natürlich im Sinne der negativen y genommen werden muß.

Die Bedingungsgleichung (e) ist in Bezug auf $\cos\vartheta$ vom vierten Grade und läßt deßhalb keine einfache allgemeine Auflösung zu; löst man sie daher in Bezug auf f auf, wodurch man

$$f = 3\sin\vartheta \frac{3\cos\vartheta - 2\cos\vartheta_0}{1 + 3\cos\vartheta(3\cos\vartheta - 2\cos\vartheta_0)}$$

erhält, so überzeugt man sich leicht, daß es für f wieder einen größten Werth gibt, daß also für den Fall, wo f größer ist als dieser größte Werth, die vorherbesprochene drehende Bewegung fortdauert, bis $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ Null geworden ist und mit f das Zeichen wechselt, und bis zu jenem Werthe von ϑ, durch welchen die Gleichung:

$$(1 + 9\cos^2\vartheta - 6\cos\vartheta\cos\vartheta_0)f = 3\sin\vartheta(2\cos\vartheta_0 - 3\cos\vartheta)$$

befriedigt wird. Diese Verhältnisse übersieht man am besten und bestimmt auch in jedem einzelnen Falle den Grenzwerth von ϑ für die erste Annäherung am leichtesten, wenn man die Werthe von f für verschiedene Werthe von ϑ berechnet und dieselben auch constructiv als Ordinaten einer Curve darstellt, deren Abscissen die entsprechenden Werthe von ϑ sind. In Fig. 111 ist eine solche Curve für den Fall, wo $\vartheta_0 = 30^0$ ist, für die Werthe von ϑ zwischen 30^0 und 60^0 gezeichnet; die Einheit für die ϑ, in Sexagesimal-Graden ausgedrückt, ist $1^{mm},5$, für die f dagegen 5^{cm}. Man hat für diesen Fall folgende Tabelle entsprechender Werthe von ϑ und f.

Für $\vartheta = 30^0$	wird	$f = +$	0,400
$= 35$		$=$	0,449
$= 40$		$=$	0,474
$= 41$		$=$	0,475
$= 45$		$=$	0,452
$= 50$		$=$	0,327
$= 54^0\,44'$		$=$	0,000
$= 60$		$= -$	0,925
$= 65$		$=$	3,067
$= 76$		$=$	10,862
$= 90$		$=$	5,196.

Man sieht aus dieser Tabelle und der Figur 111, daß wenn der Reibungscoeffizient f zwischen 0,4 und dem Maximum 0,475 liegt, die einfache drehende Bewegung um die untere Kante zwischen $\vartheta = 30^0$ und $\vartheta = 41^0$ endigt; ist dagegen f größer als 0,475, so endigt diese Bewegung erst zwischen etwa $\vartheta = 58^0\,2'$ und $\vartheta = 76^0$, wo die negativen f einen größten Werth erhalten, und man muß daher in diesem Falle f negativ nehmen, um den entsprechenden Grenzwerth von ϑ zu erhalten. Im ersten Falle, so lange $f < 0,475$, folgt auf jene einfache drehende Bewegung ein Rückwärtsausgleiten der untern Kante, im zweiten Falle dagegen, wo $f > 0,475$, folgt jener ersten Bewegung eine vorwärts eilende von sehr kurzer Dauer, und nur wenn f größer wäre als das negative Maximum 10,862, könnte der Mittelpunkt des Stabes sich bis zu Ende in einem Kreisbogen bewegen, oder es müßte der Werth von ϑ, wenn der Stab auf der horizontalen Ebene aufliegt, viel kleiner als 76^0, und dann f wenigstens der diesem ϑ in der Figur entsprechenden Ordinate gleich sein.

§. 218.

Nach den vorhergehenden Erörterungen können wir nun die Untersuchung der Bewegung unseres Stabes weiter verfolgen.

Wenn f größer ist als der aus der Bedingungsgleichung (h) sich ergebende Werth, in welchem Falle die untere Kante im Anfang der Bewegung unverrückt bleibt und der Schwerpunkt sich in einem Kreisbogen bewegt, und wenn der Winkel ϑ, bestimmt worden, mit welchem diese Bewegung aufhört, so erhält man die Winkelgeschwindigkeit φ,

für das Ende dieser Bewegung durch die Gleichung (d) unter der Form:

$$\varphi_{,} = \sqrt{\frac{3g}{l_{,}}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_{,})}\ ,$$

leitet daraus die Componenten $\overset{y}{\mathfrak{V}}_{,}$ und $\overset{z}{\mathfrak{V}}_{,}$ der fördernden Geschwindigkeit des Schwerpunktes ab und berechnet die Dauer $t_{,}$ dieser Bewegung durch die Auflösung des aus derselben Gleichung folgenden Integrals:

$$t_{,} = \sqrt{\frac{l_{,}}{3g}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{,}} d\vartheta \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}}\ ,$$

welches bis auf das Zeichen mit dem in §. 179 abgeleiteten übereinstimmt. Endlich hat man für die Lage des Schwerpunktes am Ende dieser Bewegung

$$\mathfrak{Y}_{,} = \mathfrak{Y}_{,} = \frac{1}{2} l_{,} \sin\vartheta_{,}\ , \qquad \mathfrak{Z}_{,} = \mathfrak{Z}_{,} = \frac{1}{2} l_{,} \cos\vartheta_{,}\ .$$

Für den zweiten Theil der Bewegung und in den Fällen, wo f kleiner ist als der obengenannte Werth, müssen für die ganze Bewegung die Gleichungen (a) und (c) angewendet werden. Dazu drückt man den Factor $\frac{d^2 y_{,}}{dt^2}$ in der letztern mittels der erstern und den Werthen von $\frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2}$ und $\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2}$ in Function von ϑ aus und gibt jener dadurch die Form:

$$(4 - 3\cos^2\vartheta - 3 f \sin\vartheta \cos\vartheta) \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$
$$+ 3(\sin\vartheta\cos\vartheta - f\cos^2\vartheta)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 6\frac{g}{l_{,}}(\sin\vartheta - f\cos\vartheta)\ ,$$

oder indem man statt $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit φ einführt und $12\frac{g}{l_{,}}$ durch β bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{l}(4 - 3\cos^2\vartheta - 3 f \sin\vartheta\cos\vartheta)\dfrac{d\,\varphi^2}{d\vartheta} \\ \qquad + 6(\sin\vartheta\cos\vartheta - f\cos^2\vartheta)\varphi^2 = \beta(\sin\vartheta - f\cos\vartheta)\end{array}\right\}.\ \text{(k.}$$

Diese wenig einfache Gleichung kann dadurch für die Integration vorbereitet werden, daß man in ähnlicher Weise wie in §. 156 für φ^2 zwei willkürliche Functionen u und w einführt und über diese so verfügt, daß die Gleichung auf eine mit zwei Gliedern zurückkommt. Gibt man nämlich unserer Gleichung die allgemeine Form:

$$A \frac{d.\varphi^2}{d\vartheta} + B\varphi^2 = C$$

und setzt nun

$$A\varphi^2 = uw \,,$$

wodurch man als Aenderungsgesetz in Bezug auf ϑ

$$A \frac{d.\varphi^2}{d\vartheta} = u\frac{dw}{d\vartheta} + w\frac{du}{d\vartheta} - \varphi^2 \frac{dA}{d\vartheta}$$

erhält, so wird damit unsere Gleichung zuerst

$$u\frac{dw}{d\vartheta} + w\frac{du}{d\vartheta} + \left(B - \frac{dA}{d\vartheta}\right)\frac{uw}{A} = C$$

und kommt dann, wenn man

l.) $$\frac{dw}{d\vartheta} + \left(B - \frac{dA}{d\vartheta}\right)\frac{w}{A} = 0$$

setzt, auf die beiden Glieder:

m.) $$w\frac{du}{d\vartheta} = C$$

zurück. Für unsern Fall, wo man hat

$$\frac{dA}{d\vartheta} = 6 \sin\vartheta \cos\vartheta + 3f \sin^2\vartheta - 3f \cos^2\vartheta \,,$$

wird die Bedingungsgleichung (i)

$$\frac{dw}{d\vartheta} = w\frac{3f}{4 - 3\cos^2\vartheta - 3f \sin\vartheta \cos\vartheta} = w\frac{3f(1 + \tan^2\vartheta)}{1 + 3f \tan\vartheta + 4\tan^2\vartheta},$$

oder wenn man $\tan\vartheta = t$, $1 + \tan^2\vartheta = \frac{dt}{d\vartheta}$ setzt,

$$\frac{dw}{dt} = w\frac{3f}{1 - 3ft + 4t^2}.$$

Daraus zieht man leicht den Werth von w in Function von t und ϑ; dieser allgemeine Werth ist indessen nicht einfach genug, um mittels desselben den Werth von u aus der Gleichung (m) in Function von ϑ zu bestimmen; die Auflösung unserer Aufgabe läßt sich deßhalb nur für besondere Fälle auf dem Wege der Annäherung weiter führen, wobei zu bemerken ist, daß in dem Falle, wo die Bewegung mit einer einfachen Drehung des Stabes um die untere Kante angefangen hat, die vorher bestimmten Werthe von ϑ, und φ, als anfängliche zu nehmen sind. In dem besondern Falle, wo $3f = 4$, also $f = \frac{4}{3}$ und $\vartheta_0 = 30^\circ$ ist, so daß ϑ, zwischen 61° und 62° liegt, und daher der kleinste Werth von $tang\,\vartheta$ oder t nahe $= 2$ ist, hat man

$$1 - 3ft + 4t^2 = (2t-1)^2\,,$$

$$\varDelta\,.\,logn\,w = \varDelta\,.-\frac{2}{2t-1}\,, \qquad w = e^{-\frac{2}{2t-1}}\,,$$

indem man beide Seiten des unbestimmten Integrals mit einander Null werden läßt, also $w = 1$ nimmt, wenn $t = \infty$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ wird. Man wird dann keinen sehr großen Fehler begehen, wenn man für die erste Annäherung in der Reihe:

$$\frac{2}{2t-1} = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4t^3} + \text{etc.}$$

$$= cot\,\vartheta\left(1 + \frac{1}{2}cot\,\vartheta + \frac{1}{4}cot^2\vartheta + \text{etc.}\right)$$

für $cot\,\vartheta$ außerhalb der Klammer $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ setzt und dann innerhalb der Klammer den größten Werth $\frac{1}{2}$ nimmt, wodurch sich der Exponent

$$\frac{2}{2t-1} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \vartheta\right) = \frac{2}{3}(\pi - 2\vartheta)$$

ergibt. Damit hat man dann weiter

$$\frac{du}{d\vartheta} = \beta\left(sin\,\vartheta - \frac{4}{3}cos\,\vartheta\right)e^{\frac{2}{3}(\pi - 2\vartheta)}$$

und zieht daraus durch Integration den einfachen Ausdruck:

$$\varDelta u = \beta\varDelta\,.\,cos\,\vartheta\,e^{\frac{2}{3}(\pi - 2\vartheta)}\,,$$

oder wenn man den Werth von u, welcher dem anfänglichen Werthe $\vartheta_{,}$ von ϑ entspricht, mit $u_{,}$ bezeichnet,

$$u = u_{,} + \beta\left(\cos\vartheta\, e^{\frac{1}{\beta}(\pi-2\vartheta)} - \cos\vartheta_{,}\, e^{\frac{1}{\beta}(\pi-2\vartheta_{,})}\right).$$

Damit findet man sodann

$$\varphi^2 = \frac{u\,w}{A} = \frac{1}{A}\left[u_{,}\, e^{\frac{1}{\beta}(2\vartheta-\pi)} + \beta\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_{,}\, e^{\frac{1}{\beta}(\vartheta-\vartheta_{,})}\right)\right],$$

also auch zur Bestimmung von $u_{,}$ die Gleichung:

$$\varphi_{,}^2 = \frac{1}{A_{,}}\, u_{,}\, e^{\frac{1}{\beta}(2\vartheta_{,}-\pi)},$$

worin zur Abkürzung $A_{,}$ den Werth von A für $\vartheta = \vartheta_{,}$ vorstellt und woraus

$$u_{,} = A_{,}\varphi_{,}^2\, e^{\frac{1}{\beta}(\pi-2\vartheta_{,})}$$

folgt, so daß man nun für φ^2 den Werth erhält:

$$\varphi^2 = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{A}\left[(A_{,}\varphi_{,}^2 - \beta\cos\vartheta_{,})\, e^{\frac{1}{\beta}(\vartheta-\vartheta_{,})} + \beta\cos\vartheta\right].$$

Die endliche Lösung der Aufgabe hängt demnach noch von der angenäherten Bestimmung des Werthes von t in diesem zweiten Theile der Bewegung ab oder von der Berechnung des Integrales:

$$t = \int_{\vartheta_{,}}^{\vartheta} d\vartheta\,.\left[\frac{A}{(A_{,}\varphi_{,}^2 - \beta\cos\vartheta_{,})\, e^{\frac{1}{\beta}(\vartheta-\vartheta_{,})} + \beta\cos\vartheta}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn dieses gefunden ist, so zieht man aus der Gleichung (a), indem man darin $y_{,} + \mathfrak{Y}$ wieder durch $\mathfrak{Y}$ ersetzt, so daß sie der mittleren der Gleichungen (143) entspricht, und beachtet, daß in unserm jetzigen Falle f negativ zu nehmen ist, zuerst

$$\overset{y}{\mathfrak{V}} = \overset{y}{\mathfrak{V}}_{,} + f(\overset{x}{\mathfrak{V}} - \overset{x}{\mathfrak{V}}_{,}) - fgt,$$

und durch eine zweite Integration folgt

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_{,} + f(\mathfrak{X} - \mathfrak{X}_{,}) + (\overset{y}{\mathfrak{V}}_{,} - f\overset{x}{\mathfrak{V}}_{,})\,t - \frac{1}{2}fgt^2,$$

wobei noch zu beachten ist, daß man immer hat

$$\mathbf{z} = -\frac{1}{2} l_{,} \cos\vartheta .$$

Durch diese Gleichungen ist die Lage des Schwerpunktes für ein gegebenes ϑ bestimmt, wenn man zuvor für dasselbe ϑ den Werth von t berechnet hat.

Wenn f ziemlich klein ist und die Bewegung des Stabes sogleich mit einem Ausgleiten der Berührungskante beginnt, so kann man für eine angenäherte Lösung der Aufgabe in den mit A und B bezeichneten Factoren in der Gleichung (k) die Glieder $3 f \sin\vartheta \cos\vartheta$ und $f \cos^2\vartheta$ vernachlässigen, wodurch man aus der Gleichung (l)

$$B - \frac{dA}{dt} = 0 \quad , \qquad \log n\, w = 0 \quad , \qquad w = 1$$

findet, und die Gleichung (m) gibt dann einfach

$$u = \beta\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 + f \sin\vartheta - f \sin\vartheta_0) ,$$

da im jetzigen Falle $\varphi_0{}^2$ und demnach auch u_0 Null ist. Man zieht daraus

$$\varphi^2 = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{u}{A} = \beta\,\frac{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 + f(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)}{4 - 3\cos^2\vartheta}$$

und erhält so für die Zeit t das Integral:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta . \sqrt{\frac{4 - 3\cos^2\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 + f(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0)}} ,$$

welches mit dem am Ende des §. 214 dargestellten übereinstimmt, wenn man $f = 0$ setzt und für β seinen Werth $12 \frac{g}{l_{,}}$ einführt.

Wenn man dann dadurch t in Function von ϑ berechnet hat, so gibt nun, da f positiv, $\overset{y}{V}_0$ und $\overset{z}{V}_{,}$ Null ist, die Gleichung (a) den Ausdruck:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2} f g t^2 - f(\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) ,$$

durch welchen für ein gegebenes ϑ oder $\mathbf{z}$ wieder die Lage der Horizontal-Projection des Schwerpunktes bestimmt wird.

§. 219.

Einfachere und vollständigere Ergebnisse bietet die Untersuchung der Bewegung einer Kugel oder eines Cylinders auf einer geneigten Ebene. *)

Diese Ebene nehme ich als Ebene der xy und lege die der xz durch den anfänglichen Ort des Schwerpunktes, welcher zugleich in der Achse der z liegen soll, und durch die Richtung der Schwere, so daß die Achse der x zu der von dem Schwerpunkte beschriebenen Bahn parallel ist, wenn diesem, wie ich voraussetze, keine oder nur eine zu derselben Achse parallele anfängliche Geschwindigkeit ertheilt wird. Die Achse der positiven z sei aufwärts gerichtet und α der kleinste Winkel, den diese Achse, die Normale zur Ebene, mit der Richtung der Schwere bildet; man hat dann für die erste und dritte der Gleichungen (147), welche bei den gemachten Voraussetzungen für unsere Aufgabe hinreichen, die Werthe:

$$\Sigma X = Mg \sin\alpha \quad , \quad \Sigma Z = -Mg\cos\alpha \ ,$$

$$\cos\lambda = 0 \ , \quad \cos l = 1 \ , \quad \cos\nu = -1 \ , \quad \cos n = 0 \ ,$$

und die genannten Gleichungen nehmen damit die Form an:

$$\text{p.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} M\dfrac{d^2x_{,}}{dt^2} = Mg\sin\alpha - M\dfrac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} \pm fN \ , \\[2ex] M\dfrac{d^2z_{,}}{dt^2} = N - Mg\cos\alpha - M\dfrac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} \ . \end{array} \right.$$

Man hat ferner, wie leicht zu sehen ist, am Ende der Zeit t immer $\mathfrak{X} = 0$, $\mathfrak{Z} = r$, wenn r der Halbmesser des die feste Ebene berührenden verticalen Kreisschnittes ist; man darf aber daraus noch nicht schließen, daß man deßwegen auch $\dfrac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} = 0$ und $\dfrac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} = 0$ setzen könne; denn in dem jetzigen Falle ist der Berührungspunkt veränderlich, und die Aenderungsgesetze $\dfrac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}$ und $\dfrac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}$ drücken die Aenderung der Geschwindigkeiten $\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt}$ und $\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt}$ des Schwerpunktes in Bezug auf den

*) Statt einer Kugel oder eines Cylinders kann auch jeder andere Umdrehungskörper genommen werden, welcher so beschaffen ist, daß seine Achse eine horizontale Lage behält, wenn er auf eine horizontale Ebene frei aufgelegt wird, und unter der Voraussetzung, daß auch auf der geneigten Ebene der Achse am Anfange der Bewegung eine horizontale Lage gegeben wird.

bestimmten Punkt des Körpers aus, dessen Coordinaten am Ende der Zeit t $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ sind, und welcher im folgenden Augenblicke nicht mehr Berührungspunkt ist. Um demnach zu finden, was jene Aenderungsgesetze in unserm Falle werden, denken wir uns den Berührungspunkt einen Augenblick als einen festen Punkt und den Körper um diesen in Bewegung begriffen; sei dann ϑ wieder der Winkel, welchen der durch diesen Punkt gezogene Durchmesser am Ende der Zeit t mit der Achse der z bildet, so daß man allgemein hat

$$\mathfrak{X} = r \sin\vartheta \quad , \quad \mathfrak{Z} = r \cos\vartheta ,$$

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = r \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \quad , \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = - r \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} .$$

Am Ende der Zeit t ist aber ϑ jedesmal Null; man hat daher immer

$$\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = r \frac{d\vartheta}{dt} = r\varphi \quad , \quad \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = 0$$

und findet demnach in unserm Falle die Werthe:

$$\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} = r \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = r \frac{d\varphi}{dt} \quad , \quad \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} = 0 ,$$

worin φ nun die Winkelgeschwindigkeit des Systems um eine durch den augenblicklichen Berührungspunkt gelegte horizontale Achse bedeutet. Endlich gehört dieser Berührungspunkt immer der festen Ebene der xy an; man hat daher auch immer

$$\frac{d^2 z_{,}}{dt^2} = 0 ,$$

und die zweite der Gleichungen (p) wird einfach

$$N = Mg \cos\alpha .$$

Damit und mit dem obigen Werthe von $\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}$ nimmt die erste die Form an:

$$\frac{d^2 x_{,}}{dt^2} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - r\frac{d\varphi}{dt} \qquad (q.$$

und gibt durch die erste Integration, wenn man die fördernde Geschwindigkeit $\frac{dx_{,}}{dt}$ des Berührungspunktes in Bezug auf die festen Coordinatenachsen oder die gleitende Geschwindigkeit des Mittelpunktes mit u und die fördernde relative Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = r\varphi$ des letztern

in Bezug auf den Berührungspunkt oder seine wälzende Geschwindigkeit mit w, die anfänglichen Werthe dieser Veränderlichen mit u_0 und w_0 bezeichnet,

r.) $$u = u_0 + gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) - (w - w_0) .$$

Die zweite der Gleichungen (148) drückt die drehende Bewegung um die durch den augenblicklichen Berührungspunkt gelegte horizontale Achse der $\mathfrak{y}$ aus; für unsern Fall wird dieselbe

$$\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} = Mrg\sin\alpha - Mr\frac{d^2x_1}{dt^2} ,$$

oder wenn man das Massemoment $\mathfrak{B}$ in Bezug auf jene Achse durch $M(k^2 + r^2)$ bezeichnet, so daß Mk^2 das Massemoment in Bezug auf die parallele geometrische Achse des Körpers vorstellt, und beachtet, daß in unserm Falle $\mathfrak{q} = \varphi$ ist, einfacher

s.) $$(k^2 + r^2)\frac{d\varphi}{dt} = rg\sin\alpha - r\frac{du}{dt} .$$

Man zieht daraus durch einmalige Integration die Gleichung:

t.) $$w - w_0 = \frac{r^2}{k^2 + r^2}(gt\sin\alpha + u_0 - u) ;$$

man muß sich aber wohl hüten, hier die Differenz $u - u_0$ mittels der Gleichung (r) eliminiren zu wollen; man muß vielmehr wieder zuvor die Fälle unterscheiden, für welche in der Gleichung (q) die fördernde Wirkung der Reibung kleiner oder größer ist als die der andern Kräfte. Die Grenze dieser Fälle wird durch die Bedingungsgleichung:

$$g\sin\alpha - r\frac{d\varphi}{dt} - fg\cos\alpha = 0 ,$$

oder wenn man durch Elimination von $\frac{du}{dt}$ aus den Gleichungen (q) und (s) den Werth von $r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{k^2}fg\cos\alpha$ bestimmt und einführt,

u.) $$\sin\alpha - \frac{k^2 + r^2}{k^2}f\cos\alpha = 0 .$$

Für die homogene Kugel z. B. ist $k^2 = \frac{2}{5}r^2$, für den homogenen Cylinder $k^2 = \frac{1}{2}r^2$; für die erstere hat man also, um die betreffenden Fälle zu unterscheiden, die Bedingung:

$$\sin\alpha - \frac{7}{2}f\cos\alpha = 0$$

Für den zweiten Körper dagegen wird sie

$$\sin\alpha - 3f\cos\alpha = 0 .$$

Sobald man nämlich weiß, daß

$$\sin\alpha > \frac{k^2+r^2}{k^2} f\cos\alpha \quad \text{oder} \quad \tang\alpha > \frac{k^2+r^2}{k^2} f ,$$

so kann man unbedenklich in den Gleichungen (q) und (s) oder (r) und (t) die Eliminationen vornehmen und sie dadurch auf die den Gleichungen (143) und (144) entsprechende Form bringen; man findet so aus (q) und (r)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x_{,}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2} &= \frac{d^2 X}{dt^2} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \\ u + w &= \overset{x}{V} = \overset{x}{V}_0 + gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}\right\}$$

und schließt daraus, daß in diesem Falle die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Masse dieselbe ist, wie bei einem gleitenden Körper unter sonst gleichen Umständen; man findet aber ferner aus (s) und (t) wie oben

$$\left.\begin{aligned} r\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{dw}{dt} = \frac{r^2}{k^2} fg\cos\alpha \\ w &= w_0 + \frac{r^2}{k^2} fgt\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

und damit aus (q) und (r) wieder

$$u = u_0 + gt\left(\sin\alpha - \frac{k^2+r^2}{k^2} f\cos\alpha\right) , \qquad (v.$$

und diese Ausdrücke lehren den Antheil kennen, welchen die gleitende Geschwindigkeit, und den, welchen die wälzende Bewegung an der ganzen Geschwindigkeit $\overset{x}{V}$ des Mittelpunktes hat; es ist dann auch nicht schwer, daraus abzuleiten, welcher Theil des beschriebenen Weges von dem Körper mit gleitender, und welcher mit wälzender Bewegung zurückgelegt wird.

In denjenigen Fällen dagegen, in welchen

$$\tang\alpha < \frac{k^2+r^2}{k^2} f ,$$

müssen die Gleichungen (r) und (t) angewendet werden, und es ist dann wieder in Betreff der anfänglichen Geschwindigkeit wohl zu unter=

scheiden, wie groß die anfängliche gleitende Geschwindigkeit des Berührungspunktes und wie groß die anfängliche Geschwindigkeit der wälzenden Bewegung ist.

Wenn der Körper seine Bewegung ohne anfängliche gleitende Geschwindigkeit beginnt, so hat man immer

$$u = 0 \quad , \quad \overset{x}{V} = w \, ,$$

und die Gleichung (t) gibt einfach

$$\overset{x}{V} = w = w_0 + \frac{r^2}{k^2 + r^2} g t \sin\alpha \; .$$

So hat man für eine Kugel, welche ohne alle anfängliche Geschwindigkeit auf einer so geneigten Ebene herabrollt, daß $\tan\alpha < \frac{7}{2} f$ ist, für die Geschwindigkeit des Mittelpunktes die Gleichung:

$$\overset{x}{V} = \frac{5}{7} g t \sin\alpha \; ,$$

für die eines Cylinders dagegen, so lange $\tan\alpha < 3 f$ ist,

$$\overset{x}{V} = \frac{2}{3} g t \sin\alpha \; .$$

Besitzt der Körper dagegen eine anfängliche gleitende Geschwindigkeit u_0, so wird diese nach der Gleichung:

$$u = u_0 - g t \left(\frac{k^2 + r^2}{k^2} f \cos\alpha - \sin\alpha \right)$$

fortwährend abnehmen, nach der Zeit

$$t_{,} = \frac{u_0}{g \left(\frac{k^2 + r^2}{k^2} f \cos\alpha - \sin\alpha \right)}$$

Null geworden sein und von da an Null bleiben. Es beginnt also mit diesem Zeitpunkte die einfache wälzende Bewegung, für welche man nun die Gleichung:

$$w = w_{,} + \frac{r^2}{k^2 + r^2} g (t - t_{,}) \sin\alpha$$

erhält, worin $w_{,}$ die wälzende Geschwindigkeit bedeutet, die sich der Körper in der Zeit $t_{,}$ erworben hat, und für welche man

$$w_{,} = w_0 + u_0 \frac{r^2 f \cos\alpha}{(k^2 + r^2) f \cos\alpha - k^2 \sin\alpha}$$

findet, wenn man in die Gleichung:

$$w = w_0 + \frac{r^2}{k^2} f g t \cos\alpha ,$$

welche bis zur Zeit t, gültig bleibt, den obigen Werth von t, für t einführt.

§. 220.

Zu den Fällen, in welchen

$$\tan\alpha < \frac{k^2 + r^2}{k^2} f ,$$

gehört offenbar und namentlich derjenige, wo der Umdrehungskörper sich auf einer horizontalen Ebene bewegt, wo also $\alpha = 0$ ist. In diesem Falle werden unsere Gleichungen (r) und (t)

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 - f g t - (w - w_0) \\ w &= w_0 - \frac{r^2}{k^2 + r^2}(u - u_0) \end{aligned}\right\} , \qquad \text{(w.}$$

und die erste nimmt für den anfänglichen Theil der Bewegung, so lange noch eine gleitende Geschwindigkeit vorhanden ist, auch durch Elimination von $w - w_0$ die der Gleichung (v) entsprechende Form an:

$$u = u_0 - \frac{k^2 + r^2}{k^2} f g t ;$$

sie zeigt so, daß u nach einer Zeit $t_{,}$, für welche man hat

$$t_{,} = \frac{k^2}{k^2 + r^2} \frac{u_0}{fg} ,$$

Null wird und Null bleibt. Während dieser Zeit hat man dann wie oben

$$w = w_0 + \frac{r^2}{k^2} f g t ;$$

es wird daher am Ende derselben

$$w_{,} = w_0 + \frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0 ,$$

und mit dieser constanten Geschwindigkeit rollt der Körper von da an zufolge der zweiten der Gleichungen (w), in welcher nun das Glied mit $u - u_0$ wegfällt, gleichförmig fort.

Wird dem Körper dagegen eine im Sinne der negativen x gerichtete anfängliche gleitende Geschwindigkeit u_0 ertheilt, während die wälzende im positiven Sinne gerichtet ist, so daß aber jene größer ist als diese und daher auch die resultirende Geschwindigkeit $-(u_0 - w_0) = -V_0$ negativ wird, so hat man auch f mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen und findet damit für den Anfang der Bewegung

$$x.)\quad \left\{ \begin{array}{l} u = -u_0 + \frac{k^2 + r^2}{k^2} fgt\ , \\ w = w_0 - \frac{r^2}{k^2} fgt\ ; \end{array} \right.$$

die gleitende Geschwindigkeit wird also wieder Null nach der Zeit:

$$t_{,} = \frac{k^2}{k^2 + r^2} \frac{u_0}{fg}\ ,$$

und am Ende derselben hat man

$$w_{,} = w_0 - \frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0\ .$$

Dieser Werth wird negativ, wenn u_0, das wir größer als w_0 vorausgesetzt haben, auch größer ist als $\frac{k^2 + r^2}{r^2} w_0$, und in diesem Falle rollt der Körper mit dieser Geschwindigkeit $w_{,}$ im Sinne der anfänglichen Geschwindigkeit weiter. Ist dagegen

$$u_0 > w_0 \quad \text{und} \quad < \frac{k^2 + r^2}{r^2} w_0\ ,$$

so bleibt $w_{,}$ positiv, und der Körper muß von der Zeit $t_{,}$ an sich mit der Geschwindigkeit $w_{,}$ im Sinne der positiven x gleichförmig fortbewegen; es muß also auch vorher einen Zeitpunkt gegeben haben, wo die resultirende Geschwindigkeit V, die anfangs negativ war, Null wurde und das Zeichen wechselte; diese Zeit $t_{,,}$ folgt aus der Bedingung:

$$V = u + w = -(u_0 - w_0) + fgt_{,,} = 0\ ,$$

$$t_{,,} = \frac{u_0 - w_0}{fg}\ ,$$

und da diese Zeit kleiner sein muß, als $t_{,}$, weil diese Bedingung nur während dieser Zeit gültig ist, so hat man für das Eintreten dieses Falles die Bedingung:

$$u_0 - w_0 < \frac{k^2}{k^2 + r^2} u_0$$

oder wie vorher

$$u_0 < \frac{k^2 + r^2}{r^2} w_0 \; .$$

Wir haben demnach in diesem Falle drei Bewegungen; zuerst eine gleichförmig verzögerte im Sinne der negativen x oder der anfänglichen gleitenden und resultirenden Geschwindigkeit, welche bis zum Ende der Zeit $t_{''}$ dauert und für welche die Gleichungen (x) gelten oder die daraus folgende:

$$V = -(V_0 - fgt) \; . \qquad (y.$$

Am Ende dieser Zeit $t_{''}$ hat man zufolge der Gleichungen (x)

$$\left.\begin{aligned} -u_{''} &= u_0 - \frac{k^2 + r^2}{k^2}(u_0 - w_0) = \frac{r^2}{k^2}\left(\frac{k^2 + r^2}{r^2} w_0 - u_0\right) \\ w_{''} &= w_0 - \frac{r^2}{k^2}(u_0 - w_0) \qquad = \frac{r^2}{k^2}\left(\frac{k^2 + r^2}{r^2} w_0 - u_0\right) \end{aligned}\right\} ,$$

$$V_{''} = u_{''} + w_{''} = 0 \; .$$

Dann folgt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung im Sinne der positiven x vom Ende der Zeit $t_{''}$ bis zum Ende der Zeit $t_{,}$, für welche sich die Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_{''} + \frac{k^2 + r^2}{k^2} fg(t - t_{''}) \\ w &= w_{''} - \frac{r^2}{k^2} fg(t - t_{''}) \end{aligned}\right\} ,$$

und woraus nun, da $w_{''} + u_{''} = 0$ ist,

$$V = fg(t - t_{''})$$

als resultirende Geschwindigkeit hervorgeht. *) Führt man dann in diese Gleichungen die Werthe von $t_{,}$ und $t_{''}$ ein, mit welchen man

---

*) Man darf aber nicht geradezu aus der Gleichung:

$$V = -(V_0 - fgt)$$

schließen, daß wenn $V_0 = 0$ geworden ist, $V = fg(t - t_{''})$ sein muß, da die Reibung nie Bewegung erzeugen kann, wenn die Geschwindigkeit Null ist oder geworden ist, und diese Gleichung ist falsch, sobald man $t > t_{,}$ nimmt, oder überhaupt, wenn $w_0 =$ oder $\nless \frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0$ ist.

$$t_{,} - t_{,,} = \frac{1}{fg}\left(w_0 - \frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0\right)$$

findet, so erhält man für das Ende der Zeit $t_{,}$ die Werthe:

$$u_{,} = \frac{k^2 + r^2}{k^2}\left(w_0 - \frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0\right) - \frac{r^2}{k^2}\left(\frac{k^2 + r^2}{r^2} w_0 - u_0\right) = 0,$$

$$w_{,} = \frac{r^2}{k^2}\left(\frac{k^2 + r^2}{r^2} w_0 - u_0\right) - \frac{r^2}{k^2}\left(w_0 - \frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0\right),$$

$$V_{,} = w_{,} = w_0 - \frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0 ,$$

wie oben. Von da an beginnt endlich die im positiven Sinne fortgehende gleichförmige Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit $V_{,} = w_{,}$.

In dieser letzten Betrachtung ist die vollständige und ungezwungene Erklärung des bekannten Versuches mit einer Billard-Kugel enthalten, welche durch einen nahe vertical geführten, stark tangirenden Schlag mit der Hand fortgetrieben wird und gleichzeitig eine entgegengesetzt wirkende drehende Bewegung erhält und deßhalb nach kurzer Zeit mit einer meistens kleineren Geschwindigkeit zurückrollt. Wenn dieser Versuch gelingen soll, so muß nach dem Obigen, da für die Kugel $k^2 = \frac{2}{5} r^2$ ist,

$$w_0 \text{ zwischen } u_0 \text{ und } \frac{5}{7} u_0$$

liegen. Nehmen wir das Mittel $\frac{6}{7} u_0$, so werden die beiden entgegengesetzten Geschwindigkeiten am Ende der Zeit $t_{,,}$

$$-u_{,,} = w_{,,} = \frac{1}{2} u_0 ,$$

und die Kugel rollt vom Ende der Zeit $t_{,}$ an mit der constanten Geschwindigkeit

$$V_{,} = w_{,} = \frac{1}{7} u_0 = V_0$$

fort, oder vielmehr sie würde fortrollen, wenn keine andern Widerstände vorhanden wären, als die einfache gleitende Reibung.

Nimmt man z. B. $u_0 = g$, $w_0 = \frac{6}{7} g$, $V_0 = \frac{1}{7} g$, $f = \frac{1}{5}$, so findet man für die Dauer der gleichförmig verzögerten Bewegung

$t_{\prime\prime} = \frac{3}{7}$ Secunde, und der Weg, welcher im Sinne dieser Bewegung zurückgelegt wird, und für welchen man die Gleichung:

$$X_{\prime\prime} = V_0 t_{\prime\prime} - \frac{1}{2} f g t_{\prime\prime}^2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{fg}$$

erhält, beträgt $\frac{3}{98} g = 0^m,30$; für die Zeit $t_\prime$ hat man ferner den Werth $\frac{6}{7}$ Secunden $= 2t_{\prime\prime}$; es dauert also auch die rückwärts gehende gleichförmig beschleunigte Bewegung $\frac{3}{7}$ Secunde; der entsprechende Weg ist ebenfalls gleich $0^m,30$, und da auch $V_\prime = V_0$ ist, so kommt die Kugel an dem Orte, von dem sie nach der Rechten hin fortgetrieben wurde, nach $\frac{6}{7}$ Secunde mit der anfänglichen Geschwindigkeit wieder an und rollt mit dieser Geschwindigkeit nach der Linken hin gleichförmig weiter.

Wenn endlich w_0 gerade gleich $\frac{r^2}{k^2 + r^2} u_0$ und wie bisher der u_0 dem Sinne nach entgegengesetzt ist, so wird w gleichzeitig mit u und V Null; der Bewegte kommt daher in diesem Falle nach der Zeit $t_\prime = t_{\prime\prime}$ zur Ruhe, wie ein Körper, welcher nur gleiten kann.

Alle diese Ergebnisse stehen in bester Uebereinstimmung mit der Erfahrung und folgen, wie man sieht, ungezwungen aus unsern Gleichungen (q) und (s), oder allgemeiner betrachtet, aus den Gleichungen (147) und (148), während die Anwendung der Gleichungen (143) und (144) für die Fälle, wo $tang\,\alpha < \frac{k^2 + r^2}{k^2} f$ ist, nur mittels unrichtiger oder ungerechtfertigter Annahmen oder künstlicher Wendungen zu den oben erhaltenen Ergebnissen führt, wie es in Betreff der von Poisson, Hrn. Professor Burg und Hrn. Dr. Broch gegebenen Auflösungen unserer letzten Aufgabe der Fall ist. *)

*) Poisson hat in seiner Traité de mécanique, II, §. 464 insbesondere die Bewegung einer Kugel auf einer horizontalen Ebene untersucht oder vielmehr besprochen, da die von ihm angegebenen Gesetze dieser Bewegung aus den von ihm zu Grunde gelegten Gleichungen (b) pag. 251, welche sich übrigens speciell nur auf den obigen Fall mit der Billard-Kugel beziehen, nicht streng hervorgehen. Denn während zuerst diese Gleichungen (b) als die ursprünglichen erscheinen, und der Werth von v (unserm u entsprechend) als eine Folge derselben, so werden nachher umgekehrt die Werthe von $\frac{dx}{dt}$ und ω nach dem von v bestimmt. Wenn aber, wie es der Augenschein lehrt, die Werthe von $\frac{dx}{dt}$ und ω nicht für alle Werthe

III. Relative Bewegung eines festen Systems.

§. 221.

Werfen wir endlich noch einen Blick auf die relative Bewegung eines festen Systems oder auf diejenige Bewegung, welche ein festes System für einen Beobachter zu haben scheint, der selbst in Bewegung begriffen ist. — Wir werden dazu wieder wie im letzten Kapitel des ersten Buches ein Coordinatensystem der ξ, η, ζ annehmen, gegen welches der Beobachter eine unveränderliche Lage behält, und die Bewegung des festen Systems auf dieses neue in Bewegung begriffene Coordinatensystem beziehen. Es wird dann sogleich einleuchten, daß die Gleichungen (136) für die fortschreitende Bewegung des festen Systems oder des Mittelpunktes seiner Masse durch eine Reihe ähnlicher Umwandlungen, wie sie in dem genannten Kapitel des ersten Buches vorgenommen

---

von t richtig sind, wie darf man annehmen, daß der daraus abgeleitete Ausdruck für v richtig sei, und wenn, wie Poisson Seite 252 sagt, die in den Schwerpunkt versetzte Reibung es ist, welche die Billard-Kugel gegen den Ort, von dem sie ausgegangen, zurückführt, so ist darnach nicht einzusehen, warum diese Kraft nicht auch ferner wirkt und die Bewegung in dieser Richtung fort und fort beschleunigt. Endlich folgt aus der Bedingung v = 0 wohl

$$\frac{dx}{dt} = -c\omega,$$

aber es ist nirgends ein analytischer Grund zu entdecken, warum diese Geschwindigkeiten constant werden; jene Bedingung bestimmt vielmehr mit den Gleichungen (b) verbunden nur einen einzigen Werth für t oder einen Zeitpunkt, wo sie erfüllt ist, aber darüber hinaus gar nichts. — Hr. Professor Burg und Hr. Dr. Broch haben, der erstere in dem „Supplement zum Compendium der populären Mechanik,“ Aufgabe 51, der letztere in seinem „Lehrbuch der Mechanik,“ I. Abtheilung, §. 129, die Bewegung einer Kugel oder eines Cylinders auf der geneigten Ebene behandelt und sich zu der Annahme genöthigt gesehen, der erstere, daß in allen Fällen, wo $tang\,\alpha =$ oder $< \frac{7}{2} f$ ist, $f \cos\alpha = \frac{2}{7} \sin\alpha$ genommen werden könne, der letztere, daß die Reibung $F =$ oder $< fN$ sei, wenn N den Normaldruck bedeute, also der erstere zu einer Annahme, welche nur dadurch gerechtfertigt wird, daß sie die Untersuchung mit der Erfahrung in Uebereinstimmung bringt, der letztere zu einer gänzlich unrichtigen.

wurden, für die relative Bewegung dieses Punktes drei den Gleichungen (112) (§. 119 daselbst) entsprechende:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2\xi_{,}}{dt^2} &= \Xi + F\cos l' \\ M\frac{d^2\eta_{,}}{dt^2} &= H + F\cos m' \\ M\frac{d^2\zeta_{,}}{dt^2} &= Z + F\cos n' \end{aligned}\right\} \quad (149.$$

geben werden, worin nun $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Masse in Bezug auf die Coordinatenachsen der ξ, η, ζ bedeuten, Ξ, H, Z die entsprechenden Componenten einer fördernden Resultirenden R_{ξ} vorstellen, welche aus der fördernden Resultirenden R aller an dem System thätigen Kräfte und den in entgegengesetztem Sinne genommenen Kräften R_1 und R_2 entsteht, durch die der Mittelpunkt der Masse dieselbe Bewegung erhalten kann wie ein Punkt von gleicher Masse, der mit dem beweglichen Coordinatensystem fest verbunden ist, und worin F eine Kraft ausdrückt, welche in jedem Augenblicke die Bewegungsgröße $2M\varphi V_{\xi}\sin\vartheta$ in der Einheit der Zeit zu erzeugen vermag (I. Buch, §. 119). Es gelten demnach wieder alle Gesetze für die relative Bewegung eines materiellen Punktes auch für die relative fortschreitende Bewegung eines festen Systems oder des Mittelpunktes seiner Masse.

Was endlich noch die relative drehende Bewegung eines festen Systems betrifft, so wird man aus der Form der Gleichungen (137) und aus den Umwandlungen, durch welche dieselben in §. 204 abgeleitet wurden, sogleich schließen, daß diese Gleichungen in Bezug auf ein mit dem Beobachter parallel zu festen Achsen fortschreitendes Coordinatensystem unverändert bleiben, daß also auch die relative drehende Bewegung eines festen Systems um seinen Mittelpunkt in Bezug auf ein parallel fortschreitendes Coordinaten-System dieselbe ist, wie die absolute drehende Bewegung.

Besitzt dagegen das mit dem Beobachter bewegliche Coordinaten-System auch eine gegebene drehende Bewegung in Bezug auf die festen Achsen, so können durch die bekannten Gesetze oder die Bedingungen derselben die Winkel $\vartheta_{,}$, $\omega_{,}$, $\psi_{,}$, welche die beweglichen Achsen mit den festen am Ende der Zeit t bilden, in Function dieser letztern Veränderlichen ausgedrückt werden, und der einfachste Weg zur Bestimmung der

relativen drehenden Bewegung eines festen Systems um den Mittelpunkt seiner Masse in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem wird darin bestehen, zuerst durch die Gleichungen (138) und (129) die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ um seine natürlichen Drehungsachsen in Function der Winkel ϑ, ψ, ω, durch welche die Lage dieser Achsen gegen ein festes Coordinatensystem bestimmt wird, und dann diese selbst in Function der Zeit t auszudrücken, d. h. die Gesetze der absoluten drehenden Bewegung des Systems um seinen Mittelpunkt darzustellen. Sind dann ϑ', ψ', ω' die Winkel, durch welche die Lage dieser natürlichen Drehungsachsen in Bezug auf die beweglichen Coordinatenachsen festgestellt werden soll, so hat man einfach

$$\vartheta' = \vartheta - \vartheta_{,} \ , \qquad \psi' = \psi - \psi_{,} \ , \qquad \omega' = \omega - \omega_{,} \ ,$$

und wenn daraus auch die zuletzt genannten Winkel in Function der Zeit t abgeleitet sind, so kann man mittels ihrer wieder umgekehrt die relativen Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$ um die drei Hauptachsen im Mittelpunkte aus den Gleichungen (129) berechnen, womit die Gesetze der relativen drehenden Bewegung bekannt sein werden.

Diese relative drehende Bewegung eines festen Systems hat indessen bis jetzt für die Anwendung so wenig Interesse, daß ich mich begnügen muß, die Untersuchung derselben hiemit angedeutet zu haben.

Druck von J. P. Himmer in Augsburg.

Taf. 1.

Fig. 5.

Q T'' S C S Q T P T' R S D

Fig. 8.

(§. 2.)

Q B D P'

P+P'' P'' P'' H K 15. L P'' P'' N P P+P''

Fig 14.

(§ 6.)

P P' M N P' P

Fig. 19

(§ 9)

P P P

n o p N

P P P P

Fig. 21

Q

Q-P

P

M N O R

P

Q-P

Q

(§ 17)

Fig. 28

P

+Z

M‴ m″

Y m′ Pz A

P′

Pp Py

P P′ −Z

−X

Taf. 3.

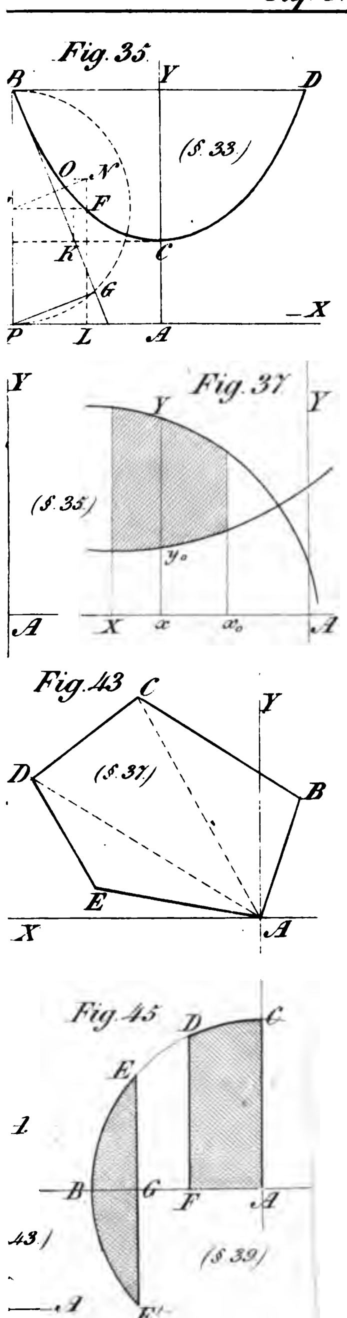
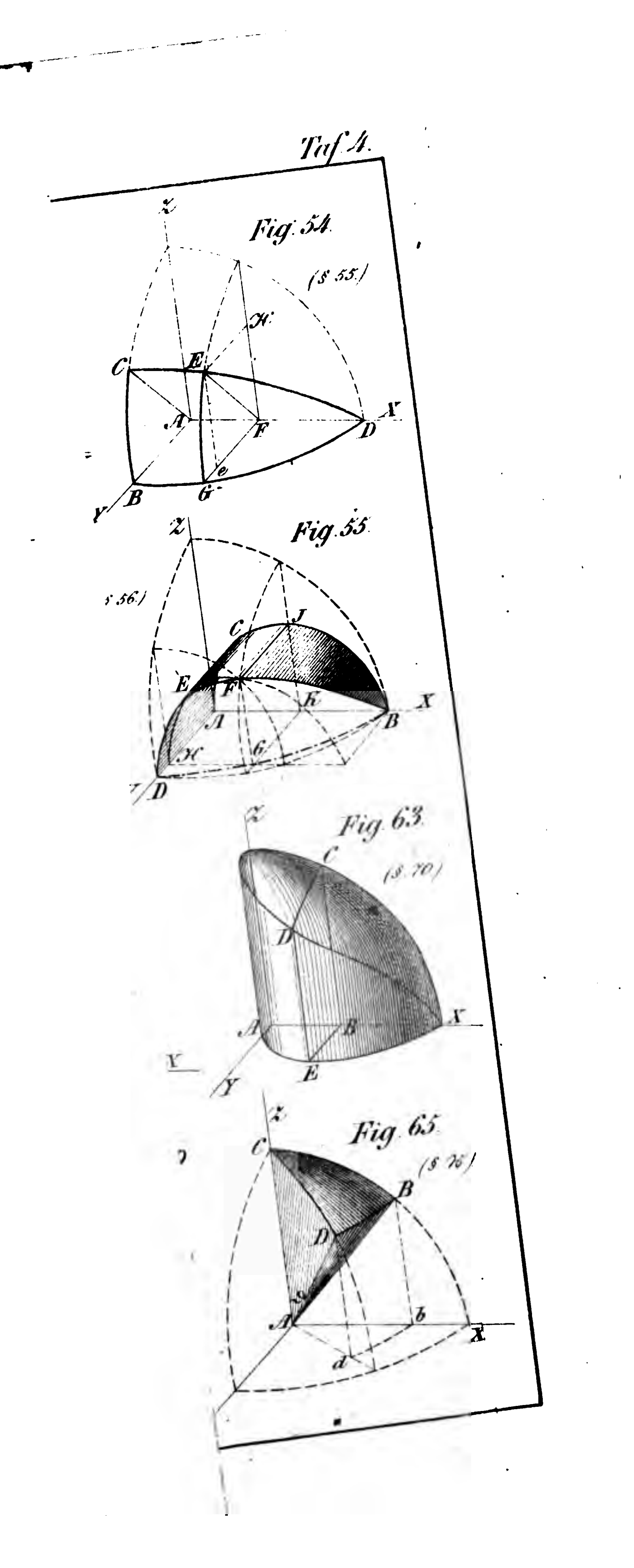


Fig. 35.
B
Y
D
(§. 33.)
O
N
F
K
C
G
X
P
L
A
Y
Fig. 37.
Y
Y
(§. 35.)
y_0
A
X
x
x_0
A
Fig. 43
C
Y
D
(§. 37.)
B
E
X
A
Fig. 45
D
C
E
B
G
F
A
(§. 39.)
E'

Taf. 4.



Taf. 5.

Taf. 6.

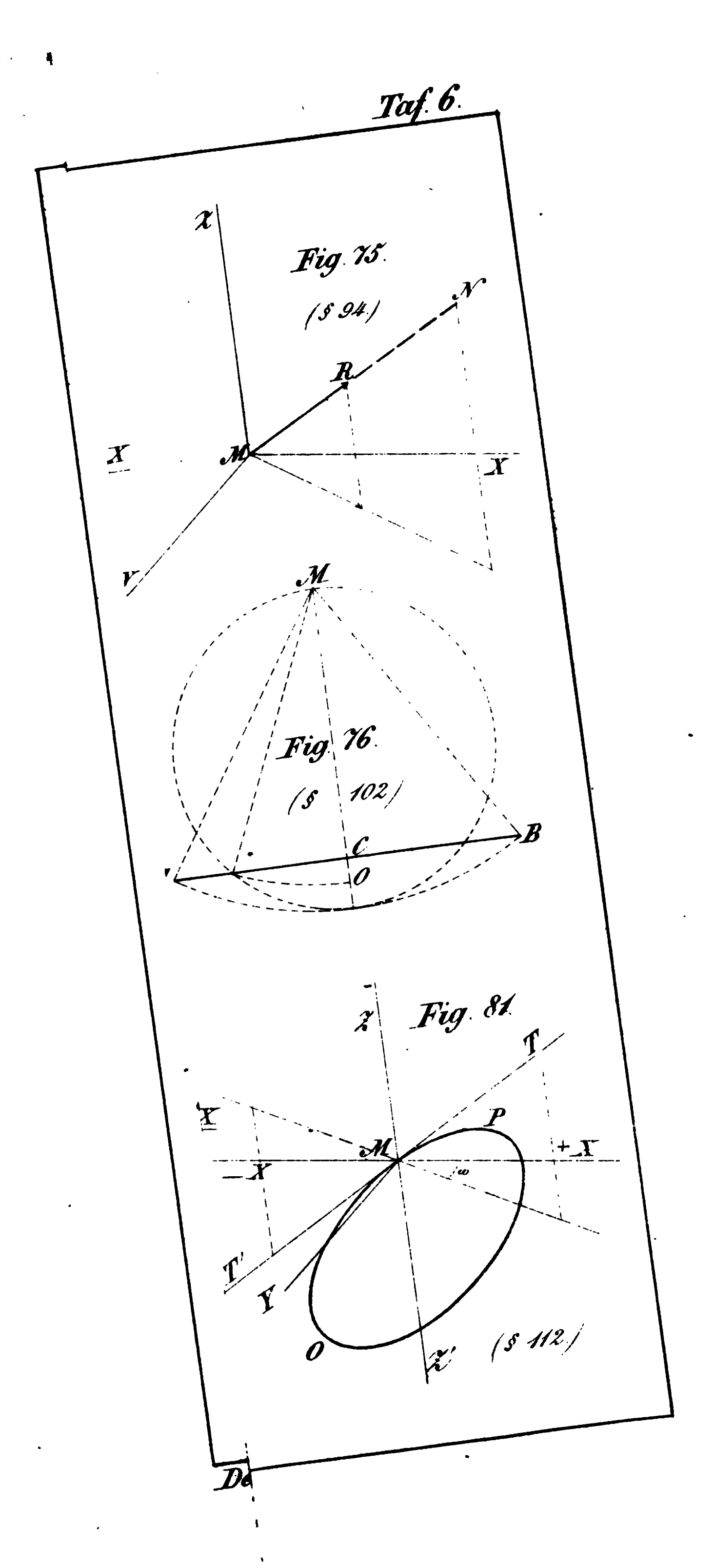


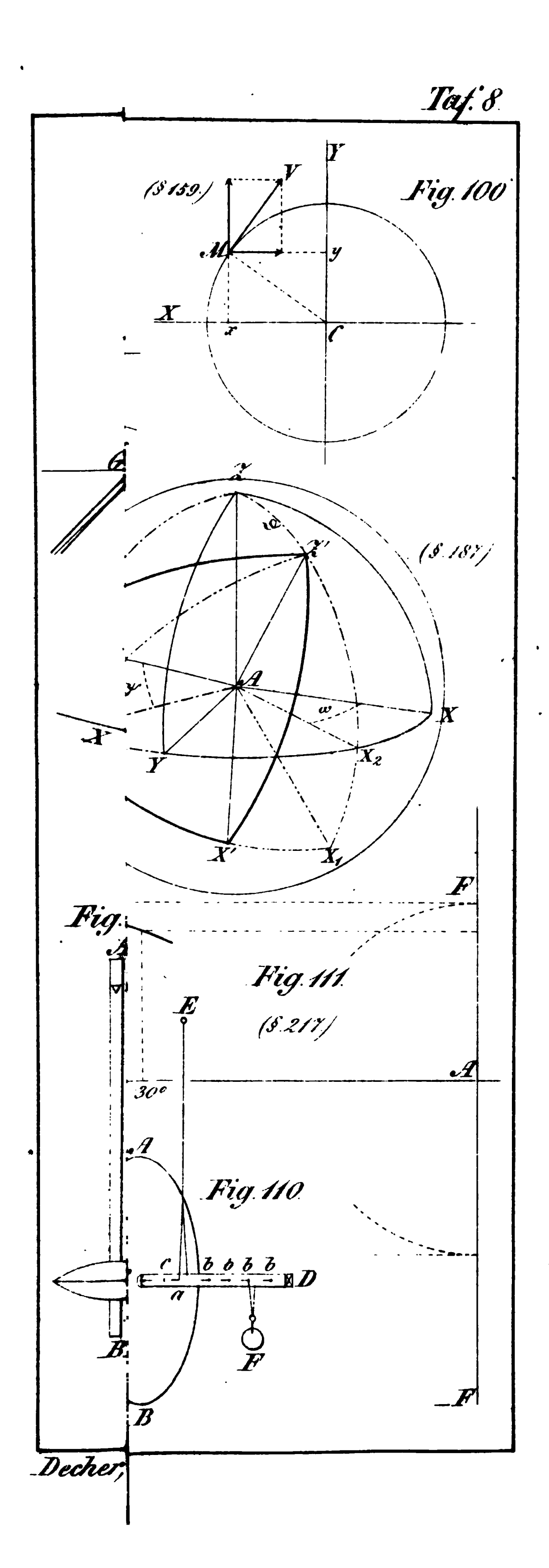
Fig. 85. (§ 128.)

Fig. 90.

Fig. 91. (§ 132.)

Fig. 94. (§ 133.)

Fig. 97. (§ 142.)


Fig. 100.
(§ 159.)
V
Y
M
y
X
x
C
(§ 187.)
A
X
Y
X₂
X'
X₁
Fig.
Fig. 111.
(§ 217.)
E
F
A
30°
Fig. 110.
c
b b b b
D
a
F
B
Decher,